УДК 515.123

О СИЛЬНОЙ КОЛЛЕКТИВНОЙ НОРМАЛЬНОСТИ ТИХОНОВСКИХ ПРОСТРАНСТВ

Ч.А.АБЛАБЕКОВА
E.mail. ksucta@elcat.kg

Мейкиндиктердин күчтүү биргелишкен нормалдуу, бир калыптагы күчтүү нормалдуу жана функционалдуу бир калыптагы R-паракомпакттуу классы киргизилген. Функционалдуу бир калыптагы R–паракомпакттуу мейкиндиктер классында $\mathcal{M}$ *- универсалдулугу бир калыптагы күчтүү нормалдулугуна тең күчтүүлүгү экендиги далилденди.*

Введены классы сильно коллективно нормальных, равномерно сильно нормальных и функционально равномерно R-паракомпактных пространств. Доказан, что в классе функционально равномерно R-паракомпактных пространств $\mathcal{M}$ *-универсальность равносильна равномерной сильной нормальности.*

The strongly normal, uniformly strongly normal and functional uniformly R-paracompact spaces classes are introduced. It is proved at the functional uniformly R-paracompact spaces class the $\mathcal{M}$ *- fine spaces is equivalent to the uniformly strongly normality.*

Введение

В работе введены равномерный аналог сильной коллективной нормальности тихоновских и “функциональный” аналог равномерных парокомпактов по Райсу (равномерные *R*-парокомпакты), которые введены в работах /3/ и /7/ соответственно. Это функционально равномерные *R*-паракомпактные пространства и равномерно сильно нормальные пространства. Для введенных классов равномерных пространств посредством описания их баз установлены их различные характеристики.

1. Необходимые сведения

Необходимую информацию о равномерных пространствах можно найти в книгах /1, 2, 10/.

Пусть X – тихоновское пространство. Через $\mathcal{U}_X$ обозначается *универсальная* равномерность пространства X /1, 2/. Покрытие, состоящее из *конуль-множеств* /4/, называется *функционально открытым*. Все функционально открытые множества образуют базу топологии тихоновского пространства /4/.

Предложение 1.1 /1, 2/. *Универсальная равномерность* $\mathcal{U}_X$ *тихоновского пространства* X *обладает базой, состоящей из всех локально конечных функционально открытых покрытий.*

Определение 1.2 /3/. Тихоновское пространство X называется *сильно коллективно нормальным,* если универсальная равномерность пространства $\mathcal{U}_X$ состоит из всех открытых покрытий пространства X .

Определение 1.3 /6/. Равномерное пространство и $(X,\mathcal{U})$ называется $\mathcal{M}$ - универсальным, если для всякого равномерно непрерывного отображения $f:(X,\mathcal{U})\to(M,\rho)$ равномерного пространства $(X,\mathcal{U})$ в метрическое пространство (M,ρ) отображение $f:(X,\mathcal{U})\to(M,\mathcal{U}_M)$ остается равномерно непрерывным, где $\mathcal{U}_M$ – универсальная равномерность метрического пространства (M,ρ) .

Определение 1.4 /7/. Покрытие α равномерного пространства $(X,\mathscr{U})$ называется *равномерно локально конечным*, если существует равномерное покрытие $\beta \in \mathscr{U}$, каждый элемент которого пересекается лишь с конечным числом элементов покрытий α.

Определение 1.5 /7/. Равномерное пространство $(X,\mathscr{U})$ называется *равномерно R-паракомпактным*, если в любое открытое покрытие можно вписать равномерно локально конечное открытое покрытие.

Определение 1.6 /8, 9/. Подмножество $O \subset X$ равномерного пространства $(X,\mathscr{U})$ называется *равномерно открытым*, если существует такое равномерно непрерывное отображение $f:(X,\mathscr{U}) \to (M,\rho)$ равномерного пространства $(X,\mathscr{U})$ в метрическое пространство (M,ρ), что $O = f^{-1}(V)$ для некоторого открытого множества $V \subset M$.

Предложение 1.2 /8, 9/. *Подмножество $O \subset X$ равномерного пространства $(X,\mathscr{U})$ равномерно открыто тогда и только тогда, когда $O = f^{-1}((0,1])$ для некоторой равномерно непрерывеной функции $f:(X,\mathscr{U}) \to I = [0,1]$.*

2. Основные результаты

Следующие предложения устанавливают характеристику сильно нормальных пространств посредством базы универсальной равномерности.

Предложение 1.1. *Тихоновское пространство X сильно коллективно нормально тогда и только тогда, когда универсальная равномерность $\mathscr{U}_X$ обладает базой из всех функционально открытых покрытий.*

Доказательство. Пусть X сильно коллективно нормально и α – произвольное открытое покрытие X. Поскольку все функционально открытые множества образуют базу тихоновской топологии пространства X, для каждого $A \in \alpha$ найдется семейство β_A функционально открытых множеств такое, что $A = \cup\beta_A$. Тогда семейство $\beta = \{\beta_A : A \in \alpha\}$ – функционально открытое покрытие, вписанное в покрытие α.

Пусть $\mathscr{B}'$ – семейство всех функционально открытых покрытий сильно нормального пространства X. Тогда $\mathscr{B}' \subseteq \mathscr{U}_X$. Для любых $\alpha, \beta \in \mathscr{B}'$ покрытие $\alpha \wedge \beta \quad \{A \cap B : A \in \beta, B \in \beta\}$ функционально открыто, следовательно, $\alpha \wedge \beta \in \mathscr{B}'$.

Пусть $\mathscr{B}$ – база равномерности $\mathscr{U}_X$, состоящая из всех локально конечных функционально открытых покрытий. Тогда $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{B}'$. Пусть $\alpha \in \mathscr{B}'$ произвольно, тогда существует локально конечное функционально открытое покрытие $\beta \in \mathscr{B} \subseteq \mathscr{B}'$, звездно вписанное в α. Итак, $\mathscr{B}'$ образует базу универсальной равномерности $\mathscr{U}_X$ сильно нормального пространства X.

Обратно, пусть универсальная равномерность $\mathscr{U}_X$ обладает базой $\mathscr{B}'$, состоящей из всех функционально открытых покрытий, и $\mathscr{U}$ – множество всех открытых покрытий пространства X. Пусть $\alpha \in \mathscr{U}$ – произвольное открытое покрытие. Тогда, как мы показали выше, существует $\beta \in \mathscr{B}'$, вписанное в α, т.е. $\alpha \in \mathscr{U}_X$. Итак, $\mathscr{U} \subseteq \mathscr{U}_X$. С другой стороны, универсальная равномерность $\mathscr{U}_X$ обладает базой $\mathscr{B}$, состоящей из всех локально конечных функционально открытых покрытий (предложение 1.1), следовательно $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{B}'$. Тогда $\mathscr{U}_X \subseteq \mathscr{U}$. Итак $\mathscr{U}_X \subseteq \mathscr{U}$ и $\mathscr{U}_X$ состоит из всех открытых покрытий, следовательно, X – сильно нормально.

Класс сильно коллективно нормальных пространств достаточно широк, так как всякий паракомпакт X, наделенный равномерностью $\mathscr{U}_X$, является сильно нормальным пространством /7/, но простые примеры показывают существование сильно коллективно нормальных пространств, не являющихся паракомпактными (/5/, задачи 6. Д.).

Следующее определение является “функциональным” аналогом равномерных *R*-паракомпактов.

Определение 1.2. Равномерное пространство $(X,\mathcal{U})$ называется *функционально равномерно R-паракомпактным*, если в любое равномерно открытое покрытие можно вписать равномерно локально конечное равномерно открытое покрытие.

Предложение 1.3. *Тихоновское пространство X сильно коллективно нормально тогда и только тогда, когда равномерное пространство $(X,\mathcal{U}_X)$ функционально равномерно R-паракомпактно.*

Доказательство. Пусть X сильно коллективно нормально и α – функционально открытое покрытие. Так как $\alpha\in\mathcal{U}_X$, то существует локально конечное функционально открытое покрытие β, вписанное в α. У каждой точки $x\in X$ существует открытая окрестность V_x, пересекающаяся лишь с конечным числом элементов покрытия β. Тогда открытое покрытие $\{V_x : x\in X\}$ есть элемент $\mathcal{U}_X$, следовательно, β равномерно локально конечно. Это означает, что равномерное пространство $(X,\mathcal{U}_X)$ – функционально равномерно R-паракомпактно.

Обратно, если $(X,\mathcal{U}_X)$ функционально равномерно R-паракомпактно,тогда, как было показано в доказательстве предложения 1.1, универсальная равномерность $\mathcal{U}_X$ обладает базой из всех функционально открытых покрытий, т.е. $\mathcal{U}_X$ состоит из всех открытых покрытий X, следовательно, X – сильно нормально.

Теорема 1.4 *Равномерное пространство $(X,\mathcal{U})$ функционально равномерно R-паракомпактно тогда и только тогда, когда для любого равномерно открытого покрытия α покрытие $\alpha^{\angle}=\{\cup\alpha' : \alpha'\subset\alpha$ и $\alpha'-$конечно$\}$ есть равномерное покрытие, т.е. $\alpha^{\angle}\in\mathcal{U}$.*

Доказательство. Пусть равномерное пространство $(X,\mathcal{U})$ функционально равномерно R-паракомпактно и α – произвольное равномерно открытое покрытие. Тогда существует равномерно локально конечное равномерно открытое покрытие β, вписанное в α. Пусть $\gamma\in\mathcal{U}$ – такое равномерное покрытие, что каждый элемент γ пересекается лишь конечным числом элементов в β. Тогда γ вписано в $\beta^{\angle}$ и, тем более, вписано в $\alpha^{\angle}$, следовательно $\alpha^{\angle}\in\mathcal{U}$.

Обратно, пусть $\gamma^{\angle}\in\mathcal{U}$ для любого равномерно открытого покрытия γ. Пусть $\alpha\in\mathcal{U}$ сильно звездно вписано в $\gamma^{\angle}$. Тогда (1.4.5 /10/) существует равномерная псевдометрика $\rho : X\times X\to \mathbf{R}^{+}$ $[0,+\infty)$ такая, что $\rho(x,y)<1$ тогда и только тогда, когда $y\in\alpha(x)$ для всех $x,y\in X$. Это означает, что $\langle\Gamma\rangle_{\tau_\rho}\neq\varnothing$ для любого $\Gamma\in\gamma^{\angle}$ и покрытие $\langle\gamma^{\angle}\rangle=\{\langle\Gamma\rangle_{\tau_\rho} : \Gamma\in\gamma^{\angle}\}$ – открытое покрытие псевдометрического пространства (X,ρ). В силу теоремы Стоуна /11/ в покрытиие $\langle\gamma^{\angle}\rangle$ можно вписать открытое локально конечное покрытие β псевдометрического пространства (X,ρ). Так как псевдоравномерность $\mathcal{U}_\rho$, порожденная псевдометрикой ρ, содержится в равномерности $\mathcal{U}$, то $\langle\gamma^{\angle}\rangle$ и β являются равномерно открытыми покрытиями равномерного пространства $(X,\mathcal{U})$ /8, 9/. Для каждого $B\in\beta$ положим $\xi_B=\{B\cap\Gamma_B^i : i=1,2,\dots,n(B)\}$, где $B\subset\left\langle\bigcup_{i=1}^{n(B)}\Gamma_B^i\right\rangle_{\tau_\rho}$ и $\bigcup_{i=1}^{n(B)}\Gamma_B^i\in\gamma^{\angle}$.

Пусть $\xi=\{\xi_B : B\in\beta\}$, тогда ξ является локально конечным равномерно открытым покрытием равномерного пространства $(X,\mathcal{U})$, вписанным в покрытие γ. Это легко следует из построения покрытия ξ. В силу локальной конечности покрытия β у каждой точки $x\in X$ существует равномерно открытая окрестность V_x, пересекающаяся лишь с конечным числом элементов покрытия β. По условию теоремы для равномерно открытого покрытия $\eta=\{V_x : x\in X\}$ выполнено $\eta^{\angle}\in\mathscr{U}$. Ясно, что каждый элемент покрытия $\eta^{\angle}$ пересекается лишь с конечным числом элементов покрытия ξ, следовательно, ξ является равномерно локально конечным равномерно открытым покрытием, вписанным в равномерно открытое покрытие γ.

Определение 1.5. Равномерное пространство $(X,\mathscr{U})$ называется *равномерно сильно нормальным, если* равномерность $\mathscr{U}$ обладает базой, состоящей из всех равномерно открытых покрытий.

Лемма 1.6. *Всякое равномерно сильно нормальное равномерное пространство $\mathcal{M}$ универсально.*

Доказательство. Пусть $(X,\mathscr{U})$ – равномерно сильно нормальное пространство и $f:(X,M)\to(M,\mathscr{U}_\rho)$ – равномерно непрерывное отображение $(X,\mathscr{U})$ в метрическое равномерное пространство $(X,\mathscr{U}_\rho)$, где $\mathscr{U}_\rho$ – равномерность, порожденная метрикой ρ. Пусть $\mathscr{U}_M$ – универсальная равномерность метрического пространства (M,ρ). В силу паракомпактности (X,τ_ρ) (теорема Стоуна /11/), где τ_ρ – топология, порожденная метрикой ρ, универсальная равномерность $\mathscr{U}_M$ состоит из всех открытых покрытий пространства (X,τ_ρ) /7/. Пусть $\alpha\in\mathscr{U}_M$ – произвольное открытое покрытие. Тогда $f^{-1}(A)$ равномерно открыто в X для любого $A\in\alpha$ и покрытие $\{f^{-1}(A): A\in\alpha\}\in\mathscr{U}$ равномерно. Это означает, что отображение $f:(X,\mathscr{U})\to(M,\mathscr{U}_M)$ равномерно непрерывно, следовательно, $(X,\mathscr{U})$ – $\mathcal{M}$-универсальное равномерное пространство.

Лемма 1.7. *Всякое функционально равномерно R-паракомпактное $\mathcal{M}$-универсальное равномерное пространство является равномерно сильно нормальным.*

Доказательство. Пусть α – произвольное равномерно открытое покрытие функционально равномерно R-паракомпактного $\mathcal{M}$-универсального пространства $(X,\mathscr{U})$. Тогда существует равномерно локально конечное равномерно открытое покрытие β, вписанное в α. Покрытие β имеет вид $\beta=\{f_s^{-1}((0;1]): s\in S\}$, где $f_s:(X,\mathscr{U})\to I=[0;1]$ – равномерно непрерывная функция для любого $s\in S$. В силу равномерно локальной конечности покрытия β определена функция $f(x)=\sum\limits_{s\in S} f_s(x)$, для любых $x\in X$, так как существует равномерное покрытие $\gamma\in\mathscr{U}$ такое, что для любого $\Gamma\in\gamma$ существует конечное $S_\Gamma=\{s_1,s_2,\ldots,s_k\}\subset S$ и для всех $x\in\Gamma$ выполнено $f(x)=f_{s_1}(x)+f_{s_2}(x)+\ldots+f_{s_k}(x)$ и $f(x)=0$ для всех $s\in S\setminus S_\Gamma$. В силу того, что покрытие γ равномерно, функция $f:(X,\mathscr{U})\to(\mathbf{R},\mathscr{U}_{|\cdot|})$ – равномерно непрерывна, где $\mathscr{U}_{|\cdot|}$ – равномерность, порожденная метрикой $\rho(x,y)=|x-y|$. Равномерное пространство $(X,\mathscr{U})$ $\mathcal{M}$-универсально, следовательно, отображение $f:(X,\mathscr{U})\to(\mathbf{R},\mathscr{U}_{\mathbf{R}})$ также равномерно непрерывно, $\mathscr{U}_{\mathbf{R}}$ – универсальная равномерность числовой прямой $\mathbf{R}$. Тогда покрытие β равномерно, т.е. $\beta\in\mathscr{U}$, следовательно, $\alpha\in\mathscr{U}$.

Теорема 1.8. *Пусть $(X,\mathscr{U})$ – функционально $\mathbf{R}$-паракомпактное равномерное пространство. Тогда следующие условия равносильны:*

1. $(X,\mathscr{U})$ – равномерно сильно нормально

2. $(X,\mathscr{U})$ – $\mathcal{M}$-универсально

Доказательство. ($1\Rightarrow 2$). Вытекает из леммы 1.6.

($2\Rightarrow 1$).Вытекает из леммы 1.7.

Список литературы

1. Энгелькинг Р. Общая топология. – М.: Мир, 1986.
2. Isbell J. R. Uniform spaces. – Providence, 1964.
3. Shapiro H. L., Smith F. A. Neighborhoods of the diagonal and strong normality properties. //Proc. Amer. Math. Soc. 71, 1978. p. 329-333.
4. Gilman H., Jenison M. Ring of continuous functions. Princeton, 1960.
5. Келли Дж. Л. Общая топология. – М.: Наука, 1981.
6. Hager A. W. Some nearly fine uniform spaces. //Proc. London Math. Soc. 1974. V 28(3). p. 517-546.
7. Rice M. D. A note on uniform paracompactness. // Proc. Amer. Math. Soc. (2) 62 (1977) pp. 359-362.
8. Charalambous M. G. Uniform Dimension Function. // Ph. D. dissertation. Univ. of London. 1971.
9. Charalambous M. G. A new covering dimension functions for uniform spaces. // J. London Math. Soc. 1975. v 11 (2). p. 137-143.
10. Борубаев А. А., Чекеев А. А. Равномерные пространства. – Б., 2003.
11. Stone A.H. Paracompactness and product spaces. // Bull. Amer. Math. Soc. 1948. 54. p. 977-982.