КЫРГЫЗ РЕСПУБЛИКАСЫНЫН БИЛИМ ЖАНА ИЛИМ

МИНИСТРЛИГИ

И. РАЗЗАКОВ АТЫНДАГЫ КЫРГЫЗ МАМЛЕКЕТТИК ТЕХНИКАЛЫК УНИВЕРСИТЕТИ

СЫЗЫКТУУ АЛГЕБРАНЫН ЭЛЕМЕНТТЕРИ

Биринчи курстун сырттан окуу бөлүмүнүн

студенттери үчүн методикалык көрсөтмө

Бишкек – 2012

Жогорку математика кафедрасынын отурумунда каралды протокол № 7 3.04.12

Энергетика факультетинин методикалык комиссиясы колдоду протокол №

УДК 517 (07.07)

Түзгөндөр: ПАХЫРОВ З.П., УСЕНОВ А.У., ТАГАЕВА С.Б.

Бул методикалык көрсөтмө айылдан кыргызча окуп, орус тилин жакшы үйрөнө элек студенттер үчүн жазылды. Китепчеде жогорку математиканын башталышы болгон аныктагычтар, матрицалар жана алардын алгебралык сызыктуу теңдемелердин системаларын чыгарууга колдонулушу, векторлор жана алардын үстүнөн жүргүзүлгөн амалдар каралды. Бул көрсөтмө менен иштеген учурда, студенттер программада көрсөтүлгөн окуу китептерин жана маселелер жыйнактарын пайдалануулары зарыл. Башкача айтканда, жогоруда айтылган ар бир бөлүмдү өздөштүрүш үчүн маселелер жыйнактарынан тийиштүү мисалдарды чыгаруу керек.

КГТУ. Түзгөндөр: Пахыров З.П., Усенов А.У., Тагаева С.Б. - БИЦ «Текник», 2012.

Адабияттар: 7

Рецензент: ст.преп. Сабиров Я.А.

Ветордук жана сызыктуу алгебранын элементтери.

§ 1. Аныктагычтар теориясынын элементтери

1. <u>Экинчи тартиптеги аныктагычтар жана алардын касиеттери</u>.

Төрт элементтен (сандан) турган таблица берилсин

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Бул таблицаны матрица дейбиз. Матрица эки жолчого жана эки мамычага ээ. Матрицанын элементтери $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ эки индекске ээ болуп, биринчи индекси ал элемент жайгашкан жолчонун, ал эми экинчи индекси мамычанын номурун көрсөтөт.

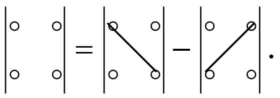
(1) матрицасынын экинчи тартиптеги матрицасы деп $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ санын айтабыз.

Экинчи тартиптеги аныктагыч төмөнкү белги менен белгиленет: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$.

Ошентип,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \qquad (2)$$

$a_{11}a_{12}, a_{21}a_{22}$ сандары аныктагычтын элементтери деп аталышат. (2) формуласы боюнча экинчи тартиптеги аныктагыч эсептелет. Бул формула схема түрүндө көрсөтүүгө болот:



Мисалы, $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 2 \cdot 7 - (-1) \cdot 3 = 14 + 3 = 17.$

Экинчи тартиптеги аныктагычтар төмөнкүдөй касиеттерге ээ:

1. Эгерде аныктагычтын жолчолорун аларга туура келүүчү мамычалары менен алмаштырсак, анда аныктагыч өзгөрбөйт, б.а.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}. \qquad (3)$$

2. Аныктагычтын эки жолчосунун (же мамычасынын) ордун алмаштырсак, анда аныктагыч белгисин карама – каршыга өзгөртөт (абсолюттук чоңдугун сактоо менен), б.а.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}. \qquad (4)$$

3. Аныктагыч нөлгө барабар, эгерде эки жолчосу (мамычасы) бирдей болсо. Мисалы,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = 0.$$

4. Аныктагычтын жолчосунун (же мамычасынын) бардык элементтеринин жалпы көбөйтүүчүсүнүн аныктагыч белгисинин сыртына чыгарууга болот. Мисалы,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & ka_{12} \\ a_{21} & ka_{22} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}. \qquad (5)$$

5. Эгерде аныктагычтын жолчосунун (же мамычасынын) бардык элементтери нөлгө барабар болушса, анда аныктагыч нөлгө барабар болот.

6. Эгерде кандайдыр бир жолчонун (же мамычанын) бардык элементтерине башка бир жолчонун (же мамычанын) бирдей санга көбөйтүлгөн туура келүүчү элементтерин кошсок, анда аныктагыч өзгөрбөйт, б.а.

$$\begin{vmatrix} a_{11}+\lambda a_{12} & a_{12} \\ a_{21}+\lambda a_{22} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}. \qquad (6)$$

Көрсөтүлгөн касиеттердин бардыгы аныктагычты эсептөө жолу менен далилденет.

Мисалы алтынчы касиетти далилдейли. Ал үчүн (6) формуласынын сол жактагы аныктагычын эсептейбиз:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+\lambda a_{12} & a_{12} \\ a_{21}+\lambda a_{22} & a_{22} \end{vmatrix} = (a_{11}+\lambda a_{12})a_{22} - (a_{21}+\lambda a_{22})a_{12} = a_{11}a_{22} + \lambda a_{12}a_{22} -$$

$$-a_{21}a_{12} - \lambda a_{22}a_{12} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

2. <u>Үчүнчү тартиптеги аныктагыч.</u>

Тогуз сандан турган таблицаны карайбыз:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}. \qquad (7)$$

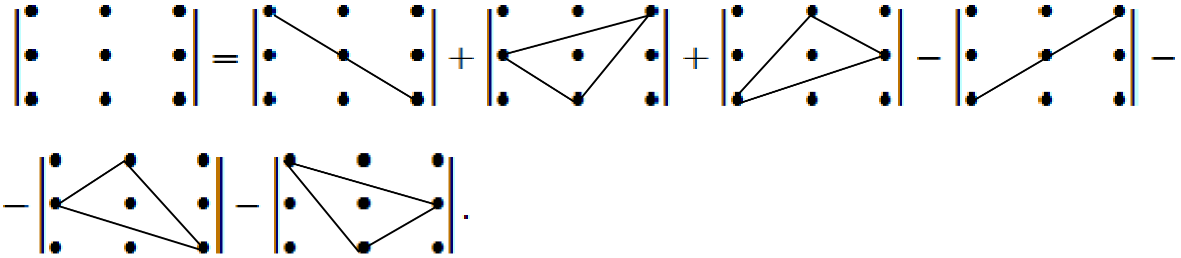
(7) матрицанын үчүнчү тартиптеги аныктагычы деп,

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{31} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}$$

санын айтабыз жана

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

белгиси аркылуу белгилейбиз. Үчүнчү тартиптеги аныктагычтарды ажыратуу үчүн үч бурчтуктар (Саррюстун) эрежеси деп аталган эрежени колдонобуз. Бул эрежени символдук түрдө төмөндөгүдөй жазабыз:



(8)

Ошентип, үчүнчү тартиптеги аныктагычтардын аныктоосу боюнча төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{31} + a_{12}a_{23}a_{31} -$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}. \qquad (9)$$

Мисал. Үч бурчтуктар эрежесин пайдаланып төмөнкү аныктагычты эсептейбиз.

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 \cdot (-;4) + (-3) \cdot 4 \cdot 3 + 0 \cdot 1 \cdot 1 -$$

$$-1 \cdot 1 \cdot 3 - (-3) \cdot 0 \cdot (-4) - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -8 - 36 + 0 - 3 - 0 - 8 = -55.$$

Экинчи тартиптеги аныктагычтардын бардык касиеттери ·үчүнчү тартиптеги үчүн да орун алат.

Аныктама 1. Аныктагычтын a_{ij} элементинин минору деп аныктагычтын i жолчосунун жана j мамычасынын элементтерин сызганда кийинки алынган аныктагычты айтабыз жана M_{ij} белгиси аркылуу белгилейбиз.

Мисалы:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = M_{ij},$$

a_{32} элементинин минору болот. Ушундай эле жол менен

$$M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Аныктама 2. $(-1)^{ij}M_{ij}$ көбөйтүндүсү аныктагычтын a_{ij} элементинин алгебралык толуктоочусу деп аталат жана A_{ij} аркылуу белгиленет.

Ошентип, $A_{ij} = (-1)^{ij}M_{ij}$. (10)

Мисалы: $A_{32} = (-1)^{3+2}M_{32} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$, $A_{13} = (-1)^{1+3}M_{32} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$.

1 – теорема. Аныктагыч анын кандайдыр бир жолчосунун (же мамычасынын) элементтери менен аларга туура келүүчү алгебралык толуктоочторунун көбөйтүндүлөрүнүн суммасына барабар, б.а.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3},$$

$$\Delta = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + a_{3j}A_{3j} \quad (11)$$

мында, $i = 1,2,3$; $j = 1,2,3$.

Мисалы: $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & -4 \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} = 2\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} +$

$+0 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2(-4-4) + 0 + 3(-12-1) =$

$= 2 \cdot (-8) + 3 \cdot (-13) = -16 - 39 = -55.$

2 – теорема. Аныктагычтын кандайдыр бир жолчосунун (же мамычасынын) элементтери менен анын башка жолчосунун (мамычасынын) туура келүүчү элементтеринин алгебралык толуктоочторуна болгон көбөйтүндүлөрүнүн суммасы нөлгө барабар, б.а. $a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} = 0$, $a_{11}A_{21} + a_{21}A_{22} + +a_{31}A_{32} = 0$, ж.б.у.э.

Мисалы:
$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \end{vmatrix} = a_{11}A_{12} + a_{21}A_{22} + a_{31}A_{32} = 2 \cdot (-1)\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} +$

$$+(-2)\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + 5 \cdot (-1)\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -2(-6-10) - 2(6-0) - 5(4-0) =$$

$$= -2(-16) - 2 \cdot 6 - 5 \cdot 4 = 32 - 12 - 20 = 0.$$

§ 2. Үч белгисиздүү биринчи даражадагы үч теңдемелер системасы

Төмөнкү теңдемелер системасын карайбыз:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3. \end{cases} \qquad (12)$$

Белгисиздердин коэффициенттеринен түзүлгөн

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad (13)$$

аныктагычын системанын аныктагычы дейбиз.

(12) системасын чыгарабыз. Ал үчүн системанын биринчи теңдемесин A_{11} ге, экинчисин A_{21} ге жана үчүнчүсүн A_{31} ге мүчөлөп көбөйтөбүз:

$$A_{11}a_{11}x + A_{11}a_{12}y + A_{11}a_{13}z = A_{11}b_1,$$

$$A_{21}a_{21}x + A_{21}a_{22}y + A_{21}a_{23}z = A_{21}b_2,$$

$$A_{31}a_{31}x + A_{31}a_{32}y + A_{31}a_{33}z = A_{31}b_3.$$

Бул теңдемелердин баарын кошуп төмөнкүгө келебиз

$$(A_{11}a_{11} + A_{21}a_{21} + A_{31}a_{31})x + (A_{11}a_{12} + A_{21}a_{22} + A_{31}a_{32})y +$$

$$+(A_{11}a_{13} + A_{21}a_{23} + A_{31}a_{33})z = A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + A_{31}b_3. \qquad (14)$$

$A_{11}a_{11} + A_{21}a_{21} + A_{31}a_{31} = \Delta$ экендиги бизге белгилүү жана yменен z белгисиздеринин коэффициенттери нөлгө барабар. Андыктан (14) формуласы төмөнкүгө келет

$$\Delta x = A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + A_{31}b_3. \qquad (15)$$

Төмөнкү аныктагычты карайлы

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_{13} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad (16)$$

бул аныктагыч Δ аныктагычынан биринчи мамычасын б.а. системадагы x белгисинин коффициенттерин системанын бош мүчөлөрү b_1, b_2, b_3 менен алмаштырганда алынат. Δ_x аныктагычын биринчи мамычанын элементтери боюнча ажыратабыз

$$A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + A_{31}b_3 = \Delta_x. \qquad (17)$$

Анда, (15) формуласынан төмөнкүгө келебиз

$$\Delta x = \Delta_x. \qquad (18)$$

Ушундай эле жол менен төмөнкү барабардыктар алынат

$$\Delta y = \Delta_y, \qquad \Delta z = \Delta_z, \qquad (19)$$

мында

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{23} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Δ_y жана Δ_z аныктагычтары Δ аныктагычынан x жана y коэффициенттерин b_1, b_2, b_3 бош мүчөлөрү менен алмаштырып алынат.

1. Эгерде $\Delta \neq 0$ болсо, анда системанын жалгыз чыгарылышы болот жана ал чыгарылыш төмөнкү формула аркылуу аныкталат.

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \qquad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}. \qquad (20)$$

(20) формуласы Крамердин формулалары деп аталат.

2. Эгерде $\Delta = 0$ болуп, ал эми $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$тердин жок дегенде бирөө нөлгө барабар болбосо, анда система чыгарылышка ээ болбойт.

3. Эгерде $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$ болсо, анда система чексиз көп чыгарылышка ээ болот же чыгарылышка ээ болбойт.

1 – мисал.

$$\begin{cases} x + 2y - z = 2, \\ 2x - 3y + 2z = 2, \\ 3x + y + z = 8. \end{cases}$$

системасын чыгаргыла.

Чыгаруу.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 + 12 - 2 - 9 - 4 - 2 = -8 \neq 0$$

система жалгыз чыгарылышка ээ. $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$ −аныктагычтарын табабыз.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 8 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -6 + 32 - 2 - 24 - 4 - 4 = -8,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 8 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 12 - 16 + 6 - 16 - 4 = -16,$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 8 \end{vmatrix} = -24 + 12 + 4 + 18 - 32 - 2 = -24.$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-8}{-8} = 1, \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-16}{-8} = 2, \qquad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-24}{-8} = 3.$$

2 – мисал.

$$\begin{cases} x - y + 2z = 2, \\ 2x - 2y + 4z = 4, \\ 3x - 3y + 6z = 3 \end{cases}$$ системасын чыгаргыла

Чыгаруу.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ 3 & -3 & 6 \end{vmatrix} = 0, \qquad \Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 4 \\ 3 & -3 & 6 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 0, \qquad \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ 3 & -3 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

Системасынын үчүнчү теңдемесинин эки жагын тең 3 кө бөлүп төмөнкүгө келебиз:

$$\begin{cases} x - y + 2z = 2, \\ 2x - 2y + 4z = 4, \\ x - y + 2z = 1. \end{cases}$$

Системанын биринчи жана үчүнчү теңдемелери бири – бирине карама – каршы теңдемелер. Себеби, бул теңдемелердин сол жактары $x-y+2z$ ке барабар, ал эми оң жактары барабар эмес $(2 \neq 1)$. Биринчи жана экинчи теңдемелерди канааттандырган белгисиздин маанилери үчүнчү теңдемени канааттандырбагандыктан, система чыгарылышка ээ эмес.

3 – мисал.

$$\begin{cases} 2x+2y+z=2, \\ x-5y+2z=3, \\ 4x+6y+2z=0 \end{cases}$$ системасын чыгаргыла.

Чыгаруу.

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & 2 \\ 4 & 6 & 2 \end{vmatrix}=0, \qquad \Delta_x=\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \\ 0 & 6 & 2 \end{vmatrix}=-1 \neq 0$$

болгондуктан система чыгарылышка ээ эмес.

4 – мисал.

$$\begin{cases} 2x+3y-z=3, \\ 4x+6y-2z=6, \\ 3x-y+2z=-1 \end{cases}$$ системасын чыгаргыла.

Чыгаруу. Бул теңдемелер системасы үчүн $\Delta=0, \Delta_x=0, \Delta_y=0, \Delta_z=0$.

Системасын экинчи теңдемеси биринчи теңдеменин эки жагын тең 2 ге көбөйткөндөн алынгандыктан, берилген теңдемелердин системасы өзүнө тең күчтүү төмөнкү системага келтирилет:

$$\begin{cases} 2x+3y-z=3, \\ 3x-y+2z=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+3y=3+z, \\ 3x-y=-1-2z. \end{cases}$$

Бул системада белгисиздердин саны теңдемелердин санынан көп. Ошондуктан система чексиз көп чыгарылышка ээ

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 3+z & 3 \\ -1-2z & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}}=\frac{-3-z+3+6z}{-2-9}=-\frac{5}{11}z,$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}2 & 3+z\\ 3 & -1-2z\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & -1\end{vmatrix}}=\frac{-2-4z-9-3z}{-11}=1+\frac{7}{11}z, \quad z=z.$$

Мында z каалагандай мааниге ээ боло алат. Мисалы, $z=11$ ден алсак, $x=-5$,

$y=8, z=11$ болгон системанын бир чыгарылышын алабыз. z ке башка мани берүү менен системанын дагы башка чыгарылыштарын алууга болот.

§ 3. Матрицалар жана алардын үстүнөн жүргүзүлгөн амалдар

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n}\\ & & & \cdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix}$$

түрүндөгү m жолчосу жана n мамычасы болуп, a_{ij}, $i=1,2,\dots,m$, $j=1,2,\dots,n$ сандарынан түзүлгөн таблица $m\times n$ өлчөмдүү матрица деп аталат. Берилген A матрицасын кыскача (a_{ij}) түрүндө белгилейбиз.

Бирдей өлчөмдөгү эки $A=(a_{ij})$ жана $B=(b_{ij})$ матрицалары үчүн $a_{ij}=b_{ij}$ барабардыгы орун алса, б.а. тиешелүү элементтеринин бардыгы барабар болушса (мисалы $a_{11}=b_{11}, a_{23}=b_{23},\dots$), анда алар барабар матрицалар деп аталышат. Бардык элементтери нөлгө барабар болсо, ал матрица нөл – матрица деп аталып 0 символу аркылуу белгиленет.

Аныктама.

$$\begin{pmatrix} a_1\\ a_2\\ \dots\\ a_m\end{pmatrix}$$

түрүндөгү матрица мамыча матрица, $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ түрүндөгү матрица жолчо матрица деп аталат.

Квадраттык матрицанын элементтеринен түзүлгөн аныктагыч матрицанын аныктагычы деп аталат. Мисалы,

$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$ болсо, анда $|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}$ болот.

Бирдей $m \times n$ өлчөмдөгү $A = (a_{ij})$ жана $B = (b_{ij})$ матрицалардын суммасы $A + B$ деп, ошол эле өлчөмдөгү жана алардын ар бир элементи алардын тийиштүү элементтеринин суммасынан турган

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, (i = 1,2, \ldots, m, \qquad j = 1,2, \ldots, n)$$

$C = c_{ij}$ матрицасы аталат.

Мисалы.

$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 7 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ жана $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ матрицаларынын суммасы C матрицасы төмөнкүчө табылат:

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 3+2 & 0+1 & 7+(-2) \\ -2+4 & 5+3 & 1+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 5 \\ 2 & 8 & 7 \end{pmatrix}.$$

$A = (a_{ij})$ матрицасынын α санына болгон көбөйтүндүсү деп, анын ар бир элементин α санына көбөйткөндө келип чыккан $B = (b_{ij})$ матрицасын айтабыз. Ошентип,

$$b_{ij} = \alpha a_{ij}, i = 1,2, \ldots, m, \qquad j = 1,2, \ldots, n.$$

$m \times n$ өлчөмдүү $A = (a_{ij})$ матрицанын $n \times k$ өлчөмдүү $B = (b_{ij})$ матрицасына болгон көбөйтүндүсү дер, i жолчо менен j мамычасынын кесилишиндеги d_{ij} элементи A матрицасынын i жолчосунун элементи менен B матрицасынын j мамычасынын элементтеринин көбөйтүндүсүнүн суммасына барабар, б.а.

$$d_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

болгон матрица $D = (d_{ij})$ аталат. Матрицалардын көбөйтүндүсүн табууга мисал келтиребиз:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 + 5 \cdot 4 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 5 \cdot 5 \\ 3 \cdot (-1) + 4 \cdot 1 + 6 \cdot 4 & 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 6 \cdot 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 + 2 + 20 & 2 + 6 + 25 \\ -3 + 4 + 24 & 6 + 12 + 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 33 \\ 25 & 48 \end{pmatrix}.$$

<u>1 – эскертүү</u>. A менен B матрицаларын көбөйтүү мүмкүн болсун үчүн A нын мамычаларынын саны B нын жолчолорунун санына сөзсүз барабар болушу керек.

2 – эскертүү. A жана B матрицалары үчүн $AB = BA$ барабардыгы бардык учурда сакталбайт.

Мисалы:

$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ жана $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ берилсе,

$AB = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9-4 & 12-10 \\ 15+8 & 20+20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 23 & 40 \end{pmatrix}$.

$BA = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9+20 & -6+16 \\ 6+25 & -4+20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 & 10 \\ 31 & 16 \end{pmatrix}$.

$AB \neq BA$ экендиги көрүнүп турат.

Матрицалардын үстүнөн жүргүзүлгөн төмөнкү амалдардын тууралыгын текшергиле:

а) $A + B = B + A,\ A + (B + C) = (A + B) + C$;

б) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A,\ \alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B, (\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$;

в) $A(BC) = (AB)C,\ A(B + C) = AB + AC$.

Бирдик матрица деп, башкы диагоналындагы элементтери 1 ге, калган элементтери 0 гө барарбар болгон матрица аталат.

Мисалы $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ үчүнчү тартиптеги бирдик матрица.

Тескери матрица. Аныктагычы нөлгө барабар болгон квадраттык матрица өзгөчө матрица деп, ал эми аныктагычы нөлгө барабар болбосо, өзгөчө эмес матрица деп аталат. Эгерде A өзгөчө эмес болсо, анда ал үчүн

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E$$

барабардыгы канааттандырган жана A га тескери матрица деп аталган бирден бир гана A^{-1} матрицасы табылат. Берилген A матрицасына тескери A^{-1} матрицасынын структурасы төмөнкүчө жазылат:

$$A=\begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta}, & \frac{A_{21}}{\Delta}, \dots, & \frac{A_{n1}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta}, & \frac{A_{22}}{\Delta}, \dots, & \frac{A_{n2}}{\Delta} \\ & . \ . \ . & \\ \frac{A_{1n}}{\Delta}, & \frac{A_{2n}}{\Delta}, \dots, & \frac{A_{nn}}{\Delta} \end{pmatrix},$$

мында $A - a_{ij}$ элементинин алгебралык толуктоочусу, $\Delta - \boldsymbol{A}$ матрицасынын аныктагычы.

§4. Сызыктуу теңдемелерди тескери матрицанын жардамы аркылуу чыгаруу

n белгисиз n теңдеменин системасы берилди дейли

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad . \quad . \quad . \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{21}$$

Бул система матрица түрүндө төмөнкүчө жазылат:

$$AX = B. \tag{22}$$

Мында

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ & . \ . \ . \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

A өзгөчө эмес матрица болгон учурда, (22) теңдеменин эки жагын тең тескери матрица A^{-1}га көбөйтүп, берилген теңдеменин чыгарылышын төмөнкү түрдө жаза алабыз:

$$X = A^{-1}B. \tag{23}$$

Бул формуладан матрицалык ыкма теңдемелер системасы жалгыз чыгарылышка ээ болгондо гана колдонууга болоорлугу көрүнүп турат.

Теңдемелердин системасын чыгаргыла:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 + 5x_2 = -3. \end{cases}$$

Чыгаруу.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 10 + 2 + 1 - 15 = -2 \neq 0.$$

болгондуктан

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

өзгөчө матрица эмес. Ошондуктан A тескери матрицага ээ болот.

A^{-1} ны табабыз:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = -5; \ A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 5; \ A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 3;$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1; \ A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1; \ A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 11; \ A_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -13; \ A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -7.$$

Ошондуктан

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{11}{2} & \frac{13}{2} & \frac{7}{2} \end{pmatrix}.$$

(23) формуласын колдонуп төмөнкүгө келебиз:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{11}{2} & \frac{13}{2} & \frac{7}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix},$$

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{25-30+9}{2}\\\dfrac{-5+6-3}{2}\\\dfrac{-55+78-21}{2}\end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{34-30}{2}\\\dfrac{-8+6}{2}\\\dfrac{78-76}{2}\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

Матрицалардын барабардыгын пайдаланып, системанын чыгарылыштарын алабыз: $x_1=2, x_2=-1, x_3=1$.

§5. Матрицанын рангасы

Берилген A матрицасынын нөлгө барабар болбогон эң чоң минорунун тартиби анын рангысы деп аталат. Нөлгө барабар эмес ал минорду базистик минор дейбиз.

Мисалы төмөнкү матрицанын рангысы 2 ге барабар

$$A=\begin{pmatrix}2&-4&3&1&0\\1&-2&1&-4&2\\0&1&-1&3&1\\4&-7&4&-4&5\end{pmatrix}.$$

Себеби төмөнкү экинчи тартиптеги минор нөлгө барабар эмес.

$$M_2=\begin{vmatrix}-4&3\\-2&1\end{vmatrix}=-4+6=2\neq 0.$$

Ал эми калган үчүнчү жана төртүнчү тартиптеги минорлордун бардыгы нөлгө барабар.

$$M_3=\begin{vmatrix}2&-4&3\\1&-2&1\\0&1&-1\end{vmatrix}=0,\ \begin{vmatrix}2&-4&3&1\\1&-2&1&-4\\0&1&-1&3\\4&-7&4&-4\end{vmatrix}=0,\begin{vmatrix}2&-4&3&0\\1&-2&1&3\\0&1&-1&1\\4&-7&4&5\end{vmatrix}=0.$$

§6. Кронекера – Капелланын теоремасы

Биз буга чейин n белгисиздүү n сызыктуу теңдемелер системасын карадык. Азыр n белгисизи бар m теңдемелер системасын кароого өтөбүз. Бул система төмөнкүчө жазылат:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad . \quad . \quad . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \qquad (24)$$

Бул системаны матрица түрүндө жазабыз:

$AX = B$.

Мында,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ & . \quad . \quad . \\ a_{m1} & a_{m2} \dots a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Эгерде $B = 0$ болсо, система бир тектүү, нөлгө барабар болбосо бир тектүү эмес деп аталат.

Кронекера – Капелланын теоремасы.

Система (24) чыгарылышка ээ болсун үчүн

$$rangA = rang\overline{A} \qquad (25)$$

шартынын аткарылышы зарыл жана жетиштүү.

Мында,

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} & b_2 \\ & . \quad . \quad . & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

кеңейтилген матрица деп аталат.

Төмөнкү системанын чыгарылышка ээ болоорун далилдегиле жана анны чыгаргыла:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 = 2, \\ 4x_1 + x_3 - 7x_4 = 3, \\ 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 2x_4 = 3. \end{cases}$$

Чыгаруу. Системанын негизги жана кеңейтилген матрицаларын жазып алабыз:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -3 \\ 4 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & -4 & -2 \end{pmatrix}, \quad \overline{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -3 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & -7 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -4 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$rangA = rang\overline{A} = 2$ болгондуктан, система чыгарылышка ээ болот. Базистик минор үчүн

$$M_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}$$

тандап алсак, анда системаны кыскартып, төмөнкүчө жаза алабыз:

$$2x_1 + x_2 = 2 + x_3 + 3x_4,$$

$$4x_1 = 3 - x_3 + 7x_4.$$

(калган эки тендеме берилген теңдемелерден келип чыгат).

$x_3 = C_1$ жана $x_4 = C_2$ деп алып, кыскартылган системаны чыгарсак, базистик белгисиздердин төмөнкүдөй чыгарылыштарына ээ болобуз:

$$x_1 = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}C_1 + \frac{7}{4}C_2, \quad x_2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}C_2.$$

§ 7. Гаусстун ыкмасы

Эгерде теңдемелердин саны белгисиздердин санынан көп же аз болуп калган учурда, жогорку ыкмаларды колдонууга болбойт. Бардык түрдөгү теңдемелердин системаларын чыгарууга Гаусстун же белгисиздерди чыгарып салу ыкмасы деп аталган жалпы ыкманы колдонууга ыңгайлуу. Бул ыкманы мисалдардын жардамы менен кароого өтөлүк.

1 – мисал. Системаны чыгаргыла:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 1, \\ 3x + 2y - 2z = 1, \\ x - y + 2z = 5. \end{cases}$$

Чыгаруу. Биринчи теңдеменин эки жагын тең экиге бөлүп жиберебиз:

$$\begin{cases} x + 0{,}5y - 0{,}5z = 0{,}5, \\ 3x + 2y - 2z = 1, \\ x - y + 2z = 5. \end{cases}$$

Биринчи теңдеменин эки жагын тең үчкө көбөйтүп, экинчи теңдемеден алып, андан кийин үчүнчү теңдемеден биринчи теңдемени алсак, төмөнкү теңдемелер системасына ээ болобуз:

$$\begin{cases} x + 0{,}5y - 0{,}5z = 0{,}5, \\ 0{,}5y - 0{,}5z = -0{,}5, \\ -1{,}5y + 2{,}5z = 4{,}5. \end{cases}$$

Экинчи теңдеменин эки жагын тең 0,5 бөлүп жибеосек, төмөнкүнү алабыз:

$$\begin{cases} x + 0{,}5y - 0{,}5z = 0{,}5, \\ y - z = -1, \\ -1{,}5y + 2{,}5z = 4{,}5. \end{cases}$$

Экинчи теңдеменин эки жагын тең -1,5 көбөйтүп, үчүнчү теңдемеден алсак, анда төмөнкү теңдемелер системасына ээ болобуз:

$$\begin{cases} x + 0{,}5y - 0{,}5z = 0{,}5, \\ y - z = -1, \\ z = 3. \end{cases}$$

Акыркы тендемелер системасынан

$z = 3,\ y = -1 + 3 = 2,\ x = 0{,}5 - 0{,}5y + 0{,}5z = 0, -1 + 1{,}5 = 1$ келип чыгат.

Ошентип, системанын чыгарылышы $x = 1, y = 2, z = 3$ болуп эсептелет.

2 – мисал. Системаны чыгаргыла

$$\begin{cases} x + 2y - 4z = 1, \\ 2x + y - 5z = -1, \\ x - y - z = -2. \end{cases}$$

Чыгаруу. Биринчи теңдеменин эки жагын тең экиге көбөйтүп экинчи теңдемеден алып, биринчи теңдемени үчүнчү теңдемеден алгандан кийин төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\begin{cases} x + 2y - 4z = 1, \\ 0 - 3y + 3z = -3, \\ 0 - 3y + 3z = -3. \end{cases}$$

Экинчи жана үчүнчү теңдемелер бирдей болгондуктан система эки теңдемеден туруп, үч белгисизге ээ болот. Белгисиздердин саны теңдемелердин санынан көп болгондуктан система чексиз көп чыгарылышка ээ. Акыркы системадан

$y = 1 + z, x = 1 + 4z - 2y = 1 - 2 - 2z + 4z = 2z - 1$ алабыз. Ошентип система чексиз көп чыгарылышка ээ болот: $x = 2z - 1, y = 1 + z$, мында $z -$ ар кандай маанилерди алат.

3 – мисал. Системаны чыгаргыла:

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = 5, \\ 2x - y - z = 2, \\ 4x - 2y - 2z = -3. \end{cases}$$

Чыгаруу. Биринчи теңдеменин эки жагын тең үчкө бөлүп, төмөнкү системага ээ болобуз:

$$\begin{cases} x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z = \frac{5}{3}, \\ 2x - y - z = 2, \\ 4x - 2y - 2z = -3. \end{cases}$$

Биринчи теңдемени экиге көбөйтүп, экинчи теңдемеден алсак жана биринчи теңдемени төрткө көбөйтүп, үчүнчү теңдемеден алсак төмөнкү система келип чыгат:

$$\begin{cases} x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z = \frac{5}{3}, \\ 0 - \frac{1}{3}y - \frac{7}{3}z = -\frac{4}{3}, \\ 0 - \frac{2}{3}y - \frac{14}{3}z = -\frac{29}{3}. \end{cases}$$

Акыркы система чыгарылышка ээ болбойт. Себеби экинчи жана үчүнчү теңдемелердин сол жактары бирдей болгондуктан, ар түрдүү сандарга барабар болушу мүмкүн эмес.

§8. Векторлор жана алардын үстүнөн жүргүзүлгөн амалдар

1. Скалярдык жана вектордук чоңдуктар

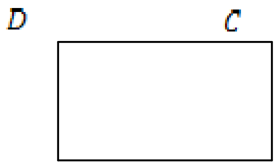
Физика, механика жана техникалык сабактардын көп бөлүктөрүн окуган учурда сандар менен гана мүнөздөлө турган чоңдуктарга кездешебиз. Мындай чоңдуктарды скалярдык деп аташат. Мисалы скалярдык чоңдуктар болуп, узундук, аянт, көлөм, масса, температура жана башкалар эсептелинет. Мындан башка да жалаң гана сандар менен гана мүнөздөлбөстөн, багыттарын дагы билүү талап кылынган чоңдуктар кездешет. Мындай чоңдуктарды вектордук чоңдуктар деп аташат. Мисалы нерсеге аракет эткен күч, нерсенин мейкиндиктеги кыймылынын ылдамдыгы, ылдамдануусу, магнит талаасынын точкадагы багыты ж.б. ушул сыяктуу чоңдуктар вектордук чоңдуктар болушат. Вектордук чоңдуктардын жардамы менен сүрөттөшөт.

Мейкиндиктеги багытка жана узундукка ээ болгон кесинди вектор деп аталат. Башкача айтканда вектор деп башталышы жана аягы кандайдыр бир тамгалар менен белгиленген кесинди аталат. Башталышы A точкасы болгон, аягы B точкасы болгон вектор $\overrightarrow{AB}$ же $\bar{a}$ белгиленет. $\overrightarrow{AB}$ векторунун узундугу анын модулу же абсолюттук чоңдугу деп аталат жана $|\overrightarrow{AB}|$ аркылуу белгиленет. Эгерде вектордун башталышы менен аягы дал келишсе, анда ал нөл – вектор деп аталат да 0 символу аркылуу белгиленет. Нөл – вектор белгилүү бир багытта ээ болбоцт жана анын модулу нөлгө барабар, б.а. $\vec{0} = 0$ болот.

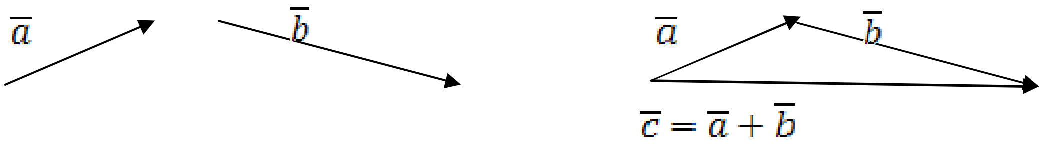
Аныктоолор: 1. Бир же жарыш түз сызыктардын үстүндө жайланышкан $\bar{a}$ жана $\bar{b}$ векторлору коллинеардуу деп аталышат.

2. Эгерде $\bar{a}$ жана $\bar{b}$ векторлору: 1) барабар модулдарга ээ; 2) коллинеардуу; 3) бирдей багытталган болушса, анда алар барабар векторлор деп аталышат. Бул учурда $\bar{a}$=$\bar{b}$ деп жазышат. 2. аныктоодон векторду мейкиндикте өзүнө жарыш жылдырууга мүмкүн экендиги келип чыгат.

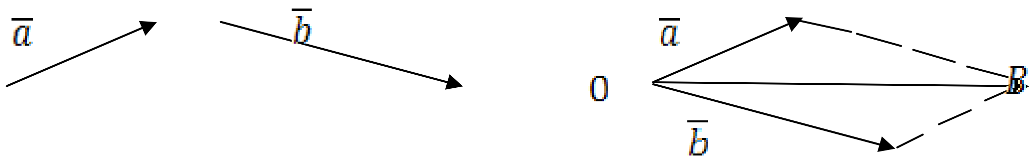
Мисалы, $ABCD$ квадратынан $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ экендигин көрөбүз. Ар бир $\bar{a}(\bar{a} \neq \bar{0})$ векторуна карама – каршы векторду табууга болот. Ал векторду - $\bar{a}$ аркылуу белгилейбиз, $\|-\bar{a}\| = \|\bar{a}\|$ экендиги көрүнүп турат.



<u>Векторлорду кошуу.</u> $\bar{a}$ векторунун башталышы менен $\bar{b}$ векторунун аягын туташтырууда $\bar{c}$ вектору $\bar{a}$ жана $\bar{b}$ векторунун суммасы деп аталат.

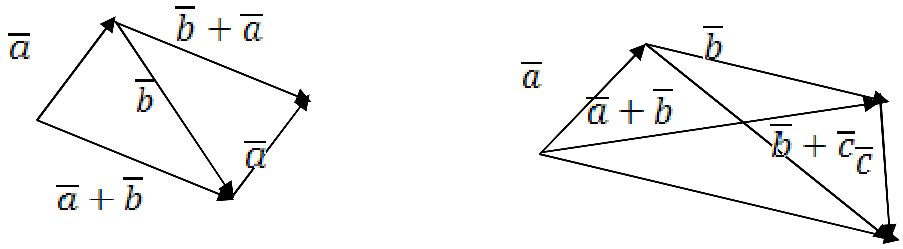


Векторлорду кошуунун бул ыгы үч бурчтук эрежеси делет.



Векторлордун суммасын башка жол менен дагы табууга болот. Ал үчүн $\overline{a}$ жана $\overline{b}$ векторлорунун башталыштарын O точкасына келтирип, $OABC$ параллелограммын тургузабыз. $\overrightarrow{OB}$ вектору $\overline{a}$ жана $\overline{b}$ векторлорунун суммасы болоорун көрүп турабыз. Векторлорду кошуунун мындай ыгы параллелограмм эрежеси делет.

Векторлордун суммасы орун алмаштыруу, топтоштуруу закондоруна баш иет, б.а. $\overline{a}+\overline{b}=\overline{b}+\overline{a}$: $(\overline{a}+\overline{b})+\overline{c}=\overline{a}(\overline{b}+\overline{c})$.

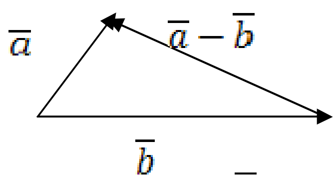


$(\overline{a}+\overline{b})+\overline{c}=\overline{a}(\overline{b}+\overline{c})$

<u>Векторлорду кемитүү.</u> $\overline{a}$ жана $\overline{b}$ векторлорунун аларды бир точкага алып келгенден кийинки айырмасы $\overline{a}-\overline{b}$ деп $\overline{c}=\overline{a}-\overline{b}$ эгерде $\overline{a}=\overline{b}+\overline{c}$ болсо, башталышы $\overline{b}$ векторунун аягы, башталышы $\overline{a}$ векторунун аягы болгон векторду айтабыз.

Эгер $\overline{a}$ жана $\overline{b}$ векторлоруна

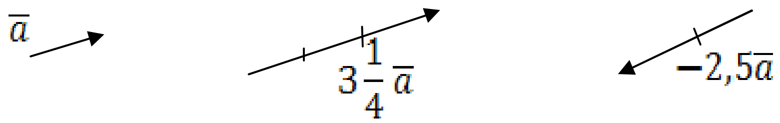
параллелограмм тургузсак,



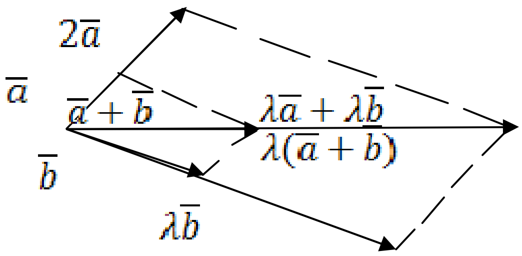
анда анын бир диагоналы $\overline{a}+\overline{b}$ векторун берсе, экинчиси $\overline{a}-\overline{b}$ векторун берет.

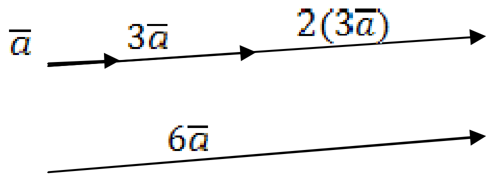
§9. Векторлорду санга көбөйтүү

$\overline{a}$ векторунун λ санына болгон көбөйтүндүсү деп, модулу $|\lambda||\overline{a}|$ барабар $\lambda > 0$ болгон учурда, багыты $\overline{a}$ нын багытындай, $\lambda < 0$ болгондо, $\overline{a}$ нын багытына карама – каршы багыттагы $\overline{c}$ векторун айтабыз. Мисалы



Эгерде $\overline{a}$ жана $\overline{b}$ коллинеардуу болушса, анда $\overline{a} = \lambda\overline{b}$ барабардыгы орун алат. $\overline{a} = |\overline{a}|\overline{n}$, $\overline{n}$ –бирдик вектор. $\lambda(\overline{a}+\overline{b}) = \lambda\overline{a} + \lambda\overline{b}$, $(\lambda_1\lambda_2)\overline{a} = \lambda_1(\lambda_2\overline{a})$ барабардыктары аткарыларын оңой эле далилдөөгө болот. Мисалы





Сызыктуу көз каранды жана сызыктуу көз каранды эмес векторлор.

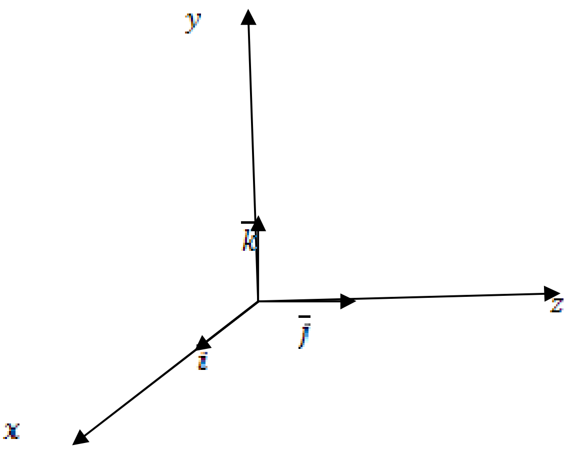
Аныктама. Эгерде $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_k$ векторлору үчүн $\lambda_1\overline{a}_1 + \lambda_2\overline{a}_2 + \ldots + \lambda_k\overline{a}_k == 0$ аткарылса жана $\lambda_1, \lambda_1, \ldots, \lambda_k$ бардыгы нөлгө барабар болушса, анда $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_k$ сызыктуу көз каранды векторлор деп аталышат.

Эгерде барабардык $\lambda_1 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0$ болгон учурда гана орун алса, анда $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_k$ сызыктуу көз каранды эмес векторлор деп аталышат.

Теорема 1. Тегиздиктеги ар кандай үч вектор сызыктуу – көз каранды.

Теорема 2. Мейкиндиктеги ар кандай төрт вектор сызыктуу көз каранды. Бул теоремаларды далилдөөсүз кабыл алабыз.

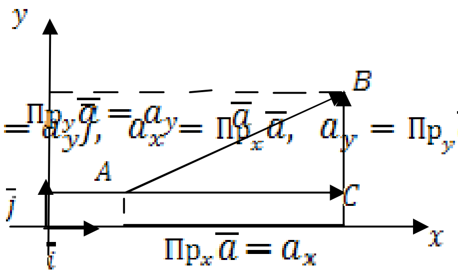
Аныктама. Тегиздиктин эки сызыктуу – көз каранды эмес вектору анын базиси деп аталат. Тегиздиктин базиси үчүн координата огунун бирдик векторлорун алабыз. Мейкиндиктеги ар кандай сызыктуу көз каранды эмес үч вектор мейкиндиктин базиси деп аталат. Мейкиндиктин базиси үчүн координата огундагы бирдик векторлорду алууга болот.



Тегиздиктеги (мейкиндиктеги) берилген векторду базистик векторлордун суммасына (бирден – бир гана жол менен) ажыратууга мүмкүн.

$$\overline{a} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}, \quad \overrightarrow{AC} = a_x\overline{i},$$

$$\overrightarrow{CB} = a_y\overline{j}, \quad a_x = \text{Пр}_x\overline{a}, \quad a_y = \text{Пр}_y\overline{a}.$$



Ошентип, $\overline{a}$ векторунун базистик векторлорго ажырашы

$$\overline{a} = a_x\overline{i} + a_y\overline{j} \qquad (26)$$

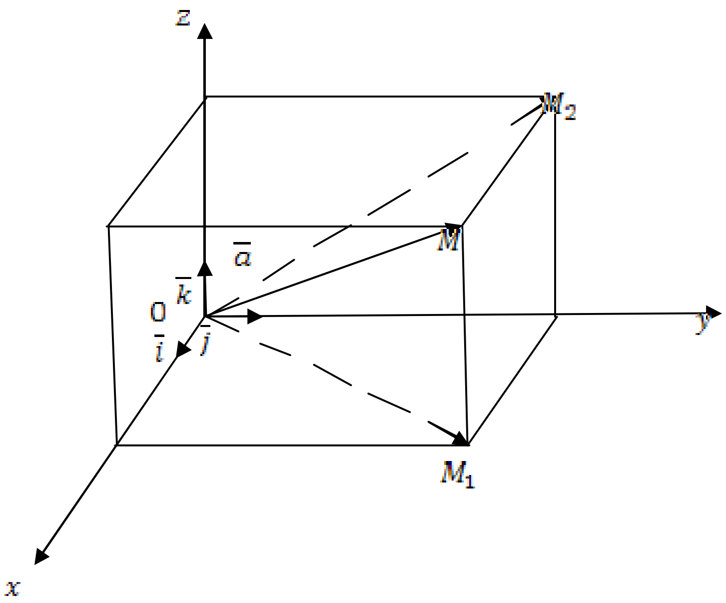
түрүнө ээ болот. Ушундай эле жол менен мейкиндиктеги векторун ажыратабыз

$$\overline{a} = \overrightarrow{0M_1} + \overrightarrow{M_1M_2},$$

$$\overrightarrow{0M_1} = a_x\overline{i} + a_y\overline{j},$$

$$\overrightarrow{M_1M_2} = a_z\overline{k},$$

$$\overline{a} = a_x\overline{i} + a_y\overline{j} + a_z\overline{k}.$$



Эгерде $\overline{a}$ тегиздиктеги вектор болсо, анын модулу

$$|\overline{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}, \qquad (27)$$

мейкиндиктеги вектор болсо, анда

$$|\overline{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \qquad (28)$$

экендиги көрүнүп турат.

Ошентип, вектордун модулу анын проекцияларынын квадраттарынын суммасынын квадраттык тамырына барабар.

1 – мисал. Чокулары $A(3;-1;2)$, $B(0;-4;2)$ жана $C(-3;2;1)$ чекиттери болушкан үч бурчтук тең капталдуу болоорун далилдегиле.

Чыгаруу. $M_1(x_1;y_1;z_1)$ жана $M_2(x_2;y_2;z_2)$ чекиттери берилишсе $\overrightarrow{M_1M_2}$ вектору төмөнкүчө жазылат:

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1)\overline{i} + (y_2 - y_1)\overline{j} + (z_2 - z_1)\overline{k}$$

векторлорунун модулдарын табабыз:

$$\overrightarrow{AB} = -3\overline{i} - 3\overline{j};\ \overrightarrow{AC} = -6\overline{i} + 3\overline{j} - \overline{k};\ \overrightarrow{BC} = -3\overline{i} + 6\overline{j} - \overline{k}.$$

Формула (28) тин негизинде

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2};\ |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{36+9+1} = \sqrt{46};$$

$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{9+36+1} = \sqrt{46},\ |\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}|$$

биз берилген үч бурчтуктун тең капталдуу экендигин далилдейбиз.

2 – мисал. Абсцисса огунда пайдаланыщкан жана $A(-3;4;8)$ чекитинен 12 бирдикке алыс турган чекитти тапкыла.

Чыгаруу. Абсцисса огунда жайланышкан чекиттин координаталары $(x;0;0)$ болоорун билебиз. Бул чекитти M менен белгилейбиз,

$$|\overrightarrow{MA}| = \sqrt{(-3-x)^2 + 16 + 64} = 12$$

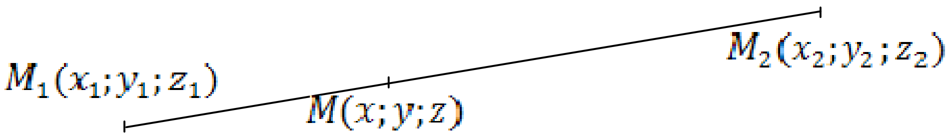
$$(x+3)^2 = 144 - 80;\ (x+3)^2 = 64;\ x + 3 = \pm 8;$$

1) $x = 5$, 2) $x = -11$.

Демек $M(5;0;0)$ жана $M(-11;0;0)$ изделүүчү чекит.

§ 10. Кесиндини берилген калыпта бөлүү

$M_1(x_1;y_1;z_1)$ жана $M_2(x_2;y_2;z_2)$ чекиттери берилген. M_1M_2 кесиндисин берилген катышта $M_1M:MM_2=\lambda$ бөлүү үчүн M чекитинин координатасын табуу жетиштүү болот. Ал координаталар төмөнкү формулалар аркылуу аныкталат.



$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\ \ y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\ \ z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}. \qquad (29)$$

Эгерде $\lambda=1$ болсо, M чекити M_1M_2 кесиндисинин тең ортосу болот. Анда M чекитинин координаталары

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\ \ y=\frac{y_1+y_2}{2},\ \ z=\frac{z_1+z_2}{2} \qquad (30)$$

болоору (29) формуладан келип чыгат. Кесиндинин тең ортосундагы чекитинин координаталары анын учтарынын координаталарынын арифметикалык орто санына барабар.

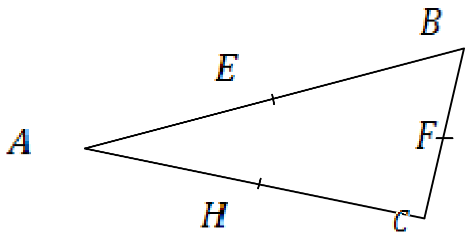
1 – мисал. Үч бурчтуктун чокулары $A(2;-1;4)$, $B(3;2;-6)$ жана $C(-5;0;2)$ берилди. Анын жактарынын ортолорун тапкыла.

Чыгаруу.

AB кесиндисинин ортоңку чекитин

$E(x_1;y_1;z_1)$, BC ныкын $F(x_2;y_2;z_2)$,

AC ныкын $H(x_3;y_3;z_3)$ аркылуу



белгилейбиз. (30) формуласын пайдалансак

$$x_1=\frac{3+2}{2}=2\frac{1}{2},\ \ y_1=\frac{2-1}{2}=\frac{1}{2},\ \ z_1=\frac{-6+4}{2}=-1;$$

$$x_2 = \frac{3-5}{2} = -1,\ \ y_2 = \frac{2+0}{2} = 1,\ \ z_2 = \frac{-6+2}{2} = -2;$$

$$x_3 = \frac{2-5}{2} = -1{,}5,\ \ y_3 = \frac{-1+0}{2} = -\frac{1}{2},\ \ z_1 = \frac{4+2}{2} = 3.$$

Үч бурчтуктун жактарынын ортоңку чекиттеринин координаталары табылды:

$$E\left(2\frac{1}{2};\ \frac{1}{2};\ -1\right);\ F(-1;1;-2);\ H\left(-1\frac{1}{2};\ -\frac{1}{2};3\right).$$

2 – мисал. Бир тектүү стерженддин оордук борбору – $C(1;-1;5)$ жана бир учу $A(-2;-1;7)$ чекиттерине жайланышкан. Анын экинчи учунун координаталарын тапкыла.

Чыгаруу. Маселенин шарты боюнча (30) формуласынан

$$1 = \frac{-2+x_2}{2},\qquad -1 = \frac{-1+y_2}{2},\ \ 5 = \frac{7+z_2}{2}$$

алабыз. Бул барабардыктан $x_2 = 4; y_2 = -1; z_2 = 3$ стерженддин экинчи учунун координаталары келип чыгат.

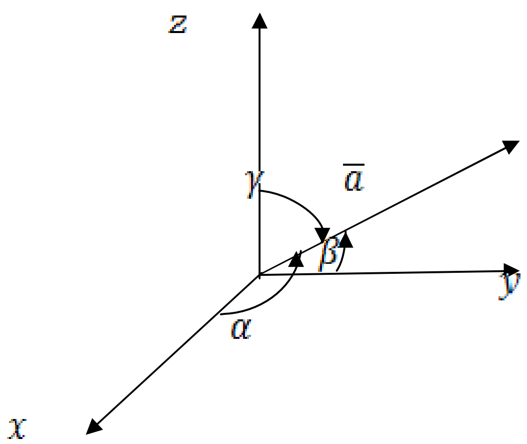
3 – мисал. $M_1(1;2)$ жана $M_2(3;4)$ чекиттери берилди. M_1M_2 кесиндисин $\lambda = 1:2$ катышында бөлгүлө.

Чыгаруу. Формула (29) ду пайдалансак, M чекитинин $x = \frac{1+\frac{1}{2}\cdot 3}{1+\frac{1}{2}} = \frac{5}{3}$,

$y = \frac{2+\frac{1}{2}\cdot 4}{1+\frac{1}{2}} = \frac{8}{3}$ болгон координаталары келип чыгат.

§ 11. Вектордун багыттоочу косинустары

Мейкиндиктеги $\overline{a}$ вектору координата окторуу менен α, β жана γ бурчтарын түзөт дейлик. $Cos\alpha, Cos\beta, Cos\gamma$ $\overline{a}$ векторунун багыттоочу косинустары деп аталышат. $\overline{a} = a_x\overline{i} + a_y\overline{j} + a_z\overline{k}$ болсун дейлик. Анда $a_x = |\overline{a}|Cos\alpha$,



$a_y = |\overline{a}|Cos\beta, \ a_z = |\overline{a}|Cos\gamma$. Мында $Cos\alpha = \frac{a_x}{|\overline{a}|}, Cos\beta = \frac{a_y}{|\overline{a}|}, Cos\gamma = \frac{a_z}{|\overline{a}|}$ экендигин табабыз. Эгерде $|\overline{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$ экенин эске алсак,

$$Cos\alpha = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, Cos\beta = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, Cos\gamma = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} \qquad (31)$$

келип чыгат. Ар бир барабардыкты квадратка көтөрүп, андан кийин кошсок, $Cos^2\alpha + Cos^2\beta + Cos^2\gamma = 1$ теңдештигин алабыз, б.а. каалаган вектордун багыттоочу косинустарынын квадраттарынын суммасы бирге барабар болот.

1 – мисал. Эгерде $A(1;2;3)$, $B(2;4;5)$ берилишсе, $\overrightarrow{AB}$ векторунун координата октору менен түзгөн бурчтарынын косинустарын тапкыла.

Чыгаруу. $\overrightarrow{AB}$ векторунун координата окторундагы проекцияларын табабыз.

$a_x = 2 - 1 = 1, a_y = 4 - 2 = 2, a_z = 5 - 3 = 2.$

Формула (31) ди пайдалансак, $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1 + 4 + 4} = 3$ болгон берилген вектордун багыттоочу косинустары келип чыгат.

Эки вектордун коллинеардуулук шарты.

$\overline{a} = a_x\overline{i} + a_y\overline{j} + a_z\overline{k}$ жана $\overline{b} = b_x\overline{i} + b_y\overline{j} + b_z\overline{k}$ векторлору коллинеардуу болушсун дейлик.

Бул учурда $\overline{a} = \lambda\overline{b}$ (λ –кандайдыр бир сан) барабардыгы орун алат. Эки вектор алардын тийиштүүпроекциялары барабар болгон учурда гана барабар болушкандыктан $a_x = \lambda b_x, a_y = \lambda b_y, \ a_z = \lambda b_z$ келип чыгат. Жогоркулардан төмөнкү барабардыктарды алабыз:

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}. \qquad (32)$$

Ошентип, коллинеардуу векторлордун координаталары (проекциялары) пропорционалдуу болушат. Тескерисинче векторлордун координаталары пропорционалдуу болушса, векторлор коллинеардуу болушат.

Мисал. $\overline{a} = \{2;-1;3\}$ жана $\overline{b} = \{-6;3;-9\}$векторлорунун коллинеардуулугун текшергиле жана бири экинчисинен канча эсе узун экендигин тапкыла.

Чыгаруу. Мисалдын шарты боюнча $a_x = 2,\ b_x = 6,\ a_y = -1,\ b_y = 3,$ $a_z = 3, b_z = -9;\ \frac{2}{-6} = \frac{-1}{3} = \frac{3}{-9}$ болоорлугу көрүнүп турат. Демек берилген веторлор коллинеардуу.

$$|\overline{a}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 1 + 9} = \sqrt{14},$$

$$|\overline{b}| = \sqrt{(-6)^2 + 3^2 + (-9)^2} = \sqrt{36 + 9 + 81} = \sqrt{126} = 3\sqrt{14},$$

$\overline{a}$ векторунан $\overline{b}$ вектору үч эсе узун.

§ 12. Координаталары менен берилген векторлордун үстүнөн аткарылган амалдар

Координаталары менен берилген векторлордун үстүнөн аткарылган амалдардын эрежелерин карайлы.

$(\overline{i}, \overline{j}, \overline{k})$ базисинде $\overline{a} = (x_1; y_1; z_1)$ жана $\overline{b} = (x_2; y_2; z_2)$ векторлору берилсин дейли.

1. Эки (же андан көп) вектордун суммасынын ар бир координатасы, кошуучулардын тиешелүү координаталарынын суммасына барабар:

$$\overline{a} + \overline{b} = (x_1 + x_2;\ y_1 + y_2; z_1 + z_2).$$

2. Эки вектордун айырмасынын ар бир координатасы, бул векторлордун тиешелүү координаталарынын айырмасына барабар:

$$\overline{a} - \overline{b} = (x_1 - x_2;\ y_1 - y_2; z_1 - z_2).$$

3. Вектордун санга болгон көбөйтүндүсүнүн ар бир координатасы, берилген вектордун тиешелүү координатасын ал санга көбөйткөнгө барабар:

$$\lambda\overline{a} = (\lambda x_1;\ \lambda y_1; \lambda z_1).$$

Мисал. $\overline{a} = (-2;3;0),\ \overline{b} = (1;-1;5)$ векторлорунун координаталары боюнча 1) $\overline{a} + \overline{b}$; 2) $\overline{a} - \overline{b}$; 3) $2\overline{a}$; 4) $3\overline{a} + 2\overline{b}$ векторлорунун координаталарын тапкыла.

Чыгаруу. 1.-3. эрежелерин колдонуп, төмөнкүлөрдү табабыз:

1) $\overline{a}+\overline{b}=(-2+1;3-1;0+5)=(-1;2;5);$

2) $\overline{a}-\overline{b}=(-2-1;3-(-1);0-5)=(-3;4;-5);$

3) $2\overline{a}=(-4;6;0);$

4) $3\overline{a}=(-6;9;0);\ 2\overline{b}=(2;-2;10),$

$3\overline{a}+2\overline{b}=(-6+2;9-2;0+10)=(-4;7;10).$

§ 13. Скалярдык көбөйтүндү

Векторду санга көбөйтүүнү мурда карап чыкканбыз. Азыр векторду векторго көбөйтүүнү карайбыз. Векторду векторго бир закон боюнча көбөйтсөк сан келип чыкса, экинчи бир закон боюнча көбөйтсөк вектор келип чыгат. Ошондуктан скалярдык жана вектордук көбөйтүндүлөр каралат.

Аныктама. $\overline{a}$ жана $\overline{b}$ векторлорунун скалярдык көбөйтүндүсү деп, алардын модулдарынын көбөйтүндүсүн арасындагы бурчтун косинусуна көбөйткөндөгү келип чыккан санды айтабыз жана $\overline{a}\cdot\overline{b}$ символу аркылуу белгилейбиз. Ошентип аныктама боюнча

$$\overline{a}\cdot\overline{b}=|\overline{a}|\cdot\left|\overline{b}\right|Cos\varphi. \qquad (33)$$

Мисал. Материалдык чекит l түз сызыгынын үстүндө багыты жана чоңдугу турактуу болгон күч $\vec{F}$ тин жардамы менен M_1 чекитинен M_2 чекитине жылдырылат. Аткарылган жумушту тапкыла.

Чыгаруу. $\vec{F}$ күч l түз сызыгы менен φ бурчун түзсө аткарылган жумуш $A=F\cdot M_1\cdot M_2\cdot Cos\varphi$ формуласы боюнча эсептөөлөрү физикадан белгилүү. Аныктама боюнча

$$F\cdot M_1\cdot M_2\cdot Cos\varphi=\vec{F}\cdot\overrightarrow{M_1M_2},\ \ A=\vec{F}\cdot\overrightarrow{M_1M_2}.$$

Турактуу күчтүн жардамы менен түз жолдун үстүндө аткарылган жумуштун чоңдугу күч вектору $\vec{F}$ менен эки чекиттин ортосундагы пайда болгон вектордун $\overrightarrow{M_1M_2}$ скалярдык көбөйтүндүсүнө барабар.

Аныктамада берилген (33) формуласын башка түргө келтиребиз.

$\text{пр}_{\overline{b}}\overline{a} = |\overline{a}| \cdot Cos\varphi$

, $\text{пр}_{\overline{a}}\overline{b} = |\overline{b}| \cdot Cos\varphi$

болгондуктан

$\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}| \cdot \text{пр}_{\overline{a}}\overline{b}$ жана

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{b}| \cdot \text{пр}_{\overline{b}}\overline{a}. \qquad (34)$$

Эки вектордун скалярдык көбөйтүндүсү бир вектордун модулу менен экинчи вектордун биринчи вектордогу проекциясына болгон көбөйтүндүсүнө барабар. (34) ден бир вектордун экинчисиндеги проекциясын табабыз:

$$\text{пр}_{\overline{a}}\overline{b} = \frac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{|\overline{a}|}, \quad \text{пр}_{\overline{b}}\overline{a} = \frac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{|\overline{b}|}. \qquad (35)$$

Эгерде $\overline{a} = \overline{l}$ б.а. $|\overline{a}| = 1$ болсо, анда $\text{пр}_{\overline{l}}\overline{b} = \frac{\overline{l} \cdot \overline{b}}{1} = \overline{l} \cdot \overline{b}$. Вектордун бирдик вектордогу проекциясы алардын скалярдык көбөйтүндүсүнө барабар.

Скалярдык көбөйтүндүнүн касиеттери

1. Эки вектордун скалярдык көбөйтүндүсү орун алмаштыруу касиетине ээ болот, б.а. орун алмаштыруу $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{b} \cdot \overline{a}$. Бул касиет скалярдык көбөйтүндүнүн аныктамасынан келип чыгат:

$\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| Cos\varphi = |\overline{b}| \cdot |\overline{a}| Cos\varphi = \overline{b} \cdot \overline{a}$.

2. Скалярдык көбөйтүндү скалярдык көбөйтүндүлөргө карата топтоштуруу законуна ээ болот, б.а. $\lambda(\overline{a} \cdot \overline{b}) = (\lambda\overline{a})\overline{b} = \overline{a}(\lambda\overline{b})$.

3. Эки вектордун скалярдык көбөйтүндүсү бөлүштүрүүчүлүк законуна ээ болот, б.а. $(\overline{a} + \overline{b})\overline{c} = \overline{ac} + \overline{bc}$.

4. Эгерде эки вектордун скалярдык көбөйтүндүсү нөлгө барабар болсо, анда алардын бирөө нөлгө же алардын ортосундагы бурчтун косинусу нөлгө барабар б.а. векторлор перпендикулярдуу болуулары керек. $\overline{a}$ нын скалярдык квадратын карайбыз: $\overline{a} \cdot \overline{a} = \overline{a}^2$, $\overline{a} \cdot \overline{a} = |\overline{a}||\overline{a}| \cdot COS0^o = |\overline{a}||\overline{a}| = |\overline{a}|^2$, $\overline{a}^2 = |\overline{a}|^2$

Ошентип, вектордун квадраты анын модулунун квадратына барабар.

Скалярдык көбөйтүндүнү көбөйтүүчүлөрү проекциялары аркылуу туюнтуу

$\overline{a} = a_x\overline{i} + a_y\overline{j} + a_z\overline{k}$ жана $\overline{b} = b_x\overline{i} + b_y\overline{j} + b_z\overline{k}$ векторлору берилди. Бул учурда

$$\overline{a}\overline{b} = \left(a_x\overline{i} + a_y\overline{j} + a_z\overline{k}\right)\left(b_x\overline{i} + b_y\overline{j} + b_z\overline{k}\right) = a_xb_x\overline{i}\overline{i} + a_yb_x\overline{j}\overline{i} + a_zb_x\overline{k}\overline{i} + a_xb_y\overline{j}\overline{i} +$$

$$+a_yb_y\overline{j}\overline{j} + a_zb_y\overline{k}\overline{j} + a_xb_z\overline{i}\overline{k} + a_yb_z\overline{j}\overline{k} + a_zb_z\overline{k}\overline{k}.$$

Кашааларды ачкан учурда, биз скалярдык көбөйтүндүнүн бөлүштүрүү жана топтоштуруу закондорун пайдаландык. Скалярдык квадрат болгондуктан, $\overline{i}\overline{i} = \left|\overline{i}\right|^2 = 1,\ \overline{j}\overline{j} = \left|\overline{j}\right|^2 = 1,\ \overline{k}\overline{k} = \left|\overline{k}\right|^2 = 1.$

Перпендикулярдуу болгондуктан, $\overline{j}\overline{i} = \overline{k}\overline{i} = \overline{j}\overline{k} = \overline{k}\overline{j} = \overline{i}\overline{j} + \overline{i}\overline{k} = 0,$

$$\overline{a}\overline{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z. \qquad (36)$$

Эки вектордун скалярдык көбөйтүндүсү алардын координаталарынын көбөйтүндүлөрүнүн суммасына барабар.

Эгерде $a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z = 0$ шарты аткарылса, $\overline{a} \perp \overline{b}$ болот. Эки вектордун өз ара перпендикулярдуу болушуна (36) шартынын аткарылышы зарыл жана жетиштүү.

Мисалы. $\overline{a} = 2\overline{i} + 3\overline{j} - \overline{k}$ жана $\overline{b} = \overline{i} - 5\overline{j} - 13\overline{k}$ векторлору өз ара перпендикулярдуу, себеби: $2 \cdot 1 - 3 \cdot 5 - 1 \cdot 13 = 2 + 13 - 15 = 0.$

Векторлордун арасындагы бурчтун косинусу

$\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}| \cdot \left|\overline{b}\right| Cos\varphi$ скалярдык көбөйтүндүсүнөн төмөнкүнү алабыз:

$$Cos\varphi = \frac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{|\overline{a}| \cdot \left|\overline{b}\right|} = \frac{a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}. \qquad (37)$$

Мисалы. $\overline{a} = 3\overline{i} + \overline{j} - \overline{k}$ жана $\overline{b} = 2\overline{i} + 2\overline{j} + \overline{k}$ векторлорунун арасындагы бурчтун косинусун тапкыла.

Чыгаруу.

$$Cos\varphi = \frac{3\cdot 2 + 1\cdot 2 + (-1)\cdot 1}{\sqrt{3^2+1^2+(-1)^2}\sqrt{2^2+2^2+1^1}} = \frac{7}{3\sqrt{11}} \approx 0{,}703.$$

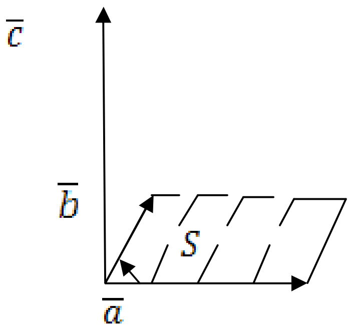
§ 15. Вектордук көбөйтүндү

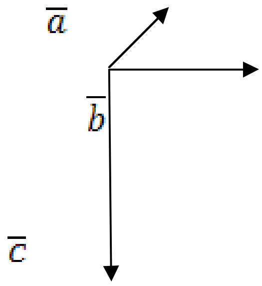
$\overline{a}$ векторунун $\overline{b}$ векторуна болгон көбөйтүндүсү деп, төмөнкүчө аныкталган $\overline{c}$ векторун айтабыз.

1. $\overline{c}$ векторунун модулу $\overline{a}$ жана $\overline{b}$ векторлорунан түзүлгөн параллелограммдын аянтына барабар, б.а.

$|\overline{c}| = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \sin(\overline{a}\,^\wedge \overline{b}\,)$. (38)

2. $\overline{c}$ вектору $\overline{a}$ жана $\overline{b}$ векторлорунун ар бирине перпендикулярдуу.
3. $\overline{c}$ векторунун багыты, анын учунан караганда, $\overline{a}$ векторун $\overline{b}$ векторуна дал келтирүү үчүн саат стрелкасынын багытына карама – каршы багытта болот.





Вектордук көбөйтүндүнү $\overline{a} \times \overline{b}$ символу аркылуу белгилейбиз.

<u>Вектордук көбөйтүндүнүн негизги касиеттери</u>

1. Көбөйтүүчүлөрдүн орундарын алмаштырсак, вектордук көбөйтүндүнүн белгиси карама – каршы белгиге өзгөрөт, б.а.

$\overline{a} \times \overline{b} = -\overline{b} \times \overline{a}.$

2. Вектордук көбөйтүндү скалярдык көбөйтүүчүгө карата топтоштуруу законуна ээ болот, б.а.

$$\lambda(\overline{a}\times\overline{b})=(\lambda\overline{a})\times\overline{b}=\overline{a}\times(\lambda\overline{b}).$$

3. Вектордук көбөйтүндү бөлүштүрүү законуна баш иет, б.а.

$$\overline{a}\times(\overline{b}+\overline{c})=\overline{a}\times\overline{b}+\overline{a}\times\overline{c}.$$

4. Вектордук көбөйтүндү нөл – векторго барабар болсун үчүн алардын бирөө нөлгө же арасындагы бурчун нөлгө барабар б.а. векторлор коллинеардуу болуулары керек. Ошентип, $\overline{a}\times\overline{a}=0$ болот.

Мисалы. $(2\overline{a}+3\overline{b})\times(\overline{a}-2\overline{b})=2\overline{a}\times\overline{a}-4\overline{a}\times\overline{b}+3\overline{b}\times\overline{a}-6\overline{b}\times\overline{b}=$

$=-4\overline{a}\times\overline{b}+3\overline{b}\times\overline{a}=-7\overline{a}\times\overline{b}=7\overline{b}\times\overline{a}.$

Вектордук көбөйтүндүнү алардын координаталары аркылуу туюнтуу

$\overline{a}=a_x\overline{i}+a_y\overline{j}+a_z\overline{k}$ жана $\overline{b}=b_x\overline{i}+b_y\overline{j}+b_z\overline{k}$ векторлору берилди. Вектордук көбөйтүндү $\overline{a}\times\overline{b}$ ны алардын координаталары a_x, a_y, a_z жана b_x, b_y, b_z аркылуу туюнтабыз. Коллинеардуу векторлордун вектордук көбөйтүндүсү нөлгө барабар болгондуктан:

$$\overline{i}\times\overline{i}=\overline{j}\times\overline{j}=\overline{k}\times\overline{k}=0. \quad (39)$$

$$|\overline{i}\times\overline{j}|=|\overline{i}||\overline{j}|sin\phi=1.$$

$\overline{i}\times\overline{j}$ вектору $\overline{i}$ жан $\overline{j}$ векторлорунун тегиздигине перпендикулярдуу болгондуктан, z огунда жайланышат жана $\overline{k}$ векторуна барабар, б.а. $\overline{i}\times\overline{j}=\overline{k}$. Анда $\overline{j}\times\overline{i}=-\overline{k}.$ (40)

Ошондой эле жол менен $\overline{j}\times\overline{k}=\overline{i},\ \overline{k}\times\overline{j}=-\overline{i}, \overline{k}\times\overline{i}=\overline{j}.$ (41)

Вектордук көбөйтүндүнүн 3. жана 4. касиеттерин жана (39), (40), (41) барабардыктарын колдонуп, төмөнкүнү алабыз:

$$\overline{a}\times\overline{b}=(a_x\overline{i}+a_y\overline{j}+a_z\overline{k})\times(b_x\overline{i}+b_y\overline{j}+b_z\overline{k})=a_xb_x\overline{i}\times\overline{i}+a_xb_y\overline{i}\times\overline{j}+$$

$$+a_xb_z\overline{i}\times\overline{k}+a_yb_x\overline{j}\times\overline{k}+a_yb_y\overline{j}\times\overline{j}+a_yb_z\overline{j}\times\overline{k}+a_zb_x\overline{k}\times\overline{i}+a_zb_y\overline{k}\times\overline{j}+$$

$$+a_zb_z\overline{k}\times\overline{k}=(a_yb_z-a_zb_y)\overline{i}+(a_zb_x-b_za_x)\overline{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\overline{k}=$$

$$=\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}\overline{i}-\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}\overline{j}+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\overline{k}.$$

Үчүнчү тартиптеги аныктагычтын ажыралышын эске алсак,

$$\overline{a}\times\overline{b}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix} \qquad (42)$$

формуласы келип чыгат.

Мисалы. $\overline{a}=2\overline{i}+3\overline{j}-\overline{k}$ жана $\overline{b}=3\overline{i}-\overline{j}-4\overline{k}$ векторлорунун вектордук көбөйтүндүсүн тапкыла.

$$\overline{a}\times\overline{b}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ 2 & 3 & -1\\ 3 & -1 & -4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3 & -1\\ -1 & -4\end{vmatrix}\overline{i}-\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & -4\end{vmatrix}\overline{j}+\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & -1\end{vmatrix}\overline{k}=$$

$$=(-12-1)\overline{i}-(-8+3)\overline{j}+(-2-9)\overline{k}=-13\overline{i}+5\overline{j}-11\overline{k}.$$

§ 16. Үч вектордун аралаш көбөйтүндүсү

$\overline{a},\overline{b}$ жана $\overline{c}$ векторлорунун $(\overline{a}\times\overline{b})\cdot\overline{c}$ көбөйтүндүсүн карайбыз. Биринчи эки вектор вектордук көбөйтүлүп, экинчи жолу $\overline{c}$ векторуна скалярдык көбөйтүлгөндүктөн, $(\overline{a}\times\overline{b})\cdot\overline{c}$ көбөйтүндүсү вектордуу – скалярдык же аралаш көбөйтүндү деп аталат. Аралаш көбөйтүндү кандайдыр бир санга санга барабар экендиги көрүнүп турат. Аралаш көбөйтүндүнү табабыз:

$$\overline{a}\times\overline{b}=\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}\overline{i}-\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}\overline{j}+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\overline{k}$$

жана $\overline{c}=c_x\overline{i}+c_y\overline{j}+c_z\overline{k}$ экендигин билебиз.

$$(\overline{a}\times\overline{b})\cdot\overline{c}=\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}c_x-\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}c_y+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}c_z,$$

$$(\overline{a}\times\overline{b})\cdot\overline{c}=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}. \qquad (43)$$

Аралаш көбөйтүндү жолчолору көбөйтүндүлөрдүн тийиштүү координаталарына түзүлгөн үчүнчү тартиптеги аныктагычка барабар.

Аралаш көбөйтүндүнүн геометриялык мааниси

$\overline{a}, \overline{b}$ жана $\overline{c}$ векторлорун бир точкага алып келип, кырлары берилген векторлордун узундуктарындай параллелепипед түзөбүз.

$\overline{d} = \overline{a} \times \overline{b}$

векторун тургузабыз.

Бул вектордун модулу $\overline{a}$ жана $\overline{b}$

векторлорунан түзүлгөн

параллелограммдын аянтына барабар,

б.а. $\overline{d} = S = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \sin(\overline{a} \wedge \overline{b})$.

Скалярдык көбөйтүндүнүн аныктоосунан

пайдаланып,

$(\overline{a} \times \overline{b}) \cdot \overline{c} = \overline{d} \cdot \overline{c} = |\overline{d}| \cdot |\overline{c}| Cos\varphi = S|\overline{c}| Cos\varphi$ экендигин табабыз. $|\overline{c}| Cos\varphi = h$ экендиги көрүнүп турат. Ошентип, $(\overline{a} \times \overline{b}) \cdot \overline{c} = S \cdot h = \pm V$,

$$V = |(\overline{a} \times \overline{b}) \cdot \overline{c}|. \qquad (44)$$

Үч вектордун аралаш көбөйтүндүсү, кырлары алардын узундуктарындай болгон параллелепипеддин көлөмүнө барабар болот (же ал көлөмдөн белгиси менен гана айырмаланат).

Векторлордун компланардуулугунун белгиси

Бир тегиздикте жайланышкан же бир тегиздикке жарыш болушкан векторлор компланардуу деп аталышаарын билебиз, $\overline{a}, \overline{b}$ жана $\overline{c}$ векторлору компланардуу болсун дейли. Анда $(\overline{a} \times \overline{b}) \cdot \overline{c} = \overline{d} \cdot \overline{c}$ шарты аткарылат.

Демек, эгерде берилген векторлор компланардуу болушса, алардын аралаш көбөйтүндүсү нөлгө барабар. Тескерисинче, аралаш көбөйтүндү нөлгө барабар болсо, берилген векторлор компланардуу болушат. $\overline{a}, \overline{b}$ жана $\overline{c}$ векторлорунун компланардуу болушу үчүн

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0 \qquad (45)$$

шартынын аткарылышы зарыл жана жетиштүү.

Мисалы. $\overline{a} = -\overline{i} + 3\overline{j} + 2\overline{k}$, $\overline{c} = -3\overline{i} + 12\overline{j} + 6\overline{k}$ жана $\overline{b} = 2\overline{i} - 3\overline{j} - 4\overline{k}$ векторлору компланардуу.

Себеби

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -3 & 12 & 6 \\ 2 & -3 & -4 \end{vmatrix} = 0.$$

Адабияттар

1. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики./ М: Наука, 1985 г.
2. Шнейдер В.Е., Слуцкий А.И., Шумов А.С. Краткий курс высшей математики./ М: Высшая школа, 1978 г., т.1.
3. Бугров Я.С., Никольский С.М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии, 1988 г.
4. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. М.: Гостехиздат, 1986
5. Марусич А.И. и др. Наглядно-иллюстративные материалы по высшей математике, часть 1, Фрунзе, 1982
6. Качкыналиев А.К. Усулдук курал. Детерминанттар жана алардын колдонулуштары. 1982
7. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М.: Наука, 1980, 1984 и т.д.