

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ**

**КЫРГЫЗСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ им. И. РАЗЗАКОВА**

Кафедра “Высшая математика”

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

*Методическое руководство
по организации самостоятельной работы студентов
дистанционной формы обучения всех специальностей*

БИШКЕК 2011

Рассмотрены
на заседании кафедры
высшей математики
Прот. №4 от 19.12.2011

Утверждены
на заседании методической комиссии
центра дистанционного обучения
Прот. № 67 от 26.01.2012г.

УДК 517 (07.07)

Составители: ПАХЫРОВ З.П., УСЕНОВ А.У., ТАГАЕВА С.Б.

Высшая математика: Методическое руководство по организации самостоятельной работы студентов дистанционной формы обучения всех специальностей. /КГТУ. Сост.: Пахыров З.П., Усенов А.У., Тагаева С.Б. - БИЦ «Текник», 2011.

Предлагаемое методическое руководство содержит рабочую программу курса “Высшая математика”, список учебной литературы, общие рекомендации по работе над курсом, задания для контрольных работ.

Предназначено для студентов дистанционной формы обучения всех специальностей.

Табл. 8. Библиогр.: 17 назв.

Рецензент: доцент Сулайманов Б.Э.

тех. редактор *Бейшеналиева А.Р.*

Подписано к печати 01.03.2012 г. формат бумаги $60 \times 84 \frac{1}{16}$.

Бумага офс. Печать офс. Объем 2,25 п.л. Тираж 200 экз. заказ 80

Бишкек, ул. Сухомлинова, 20. ИЦ «Текник» КГТУ им. И. Раззакова, т.: 54-29-43

e-mail: beknur@mail.ru

С о д е р ж а н и е

Общие рекомендации по работе над курсом и выполнение контрольных работ	4
Распределение теоретического курса по специальностям и семестрам	6
Распределение заданий по специальностям, контрольным работам и семестрам	6
Распределение заданий по контрольным работам и семестрам для студентов, имеющих средне- специальное (техникум) образование	8
Единая таблица для определения по шифру студента номеров задач контрольных работ	10
Задания для контрольных работ	
часть – 1	10
часть – 2	17
часть – 3	23
Рабочая программа курса	31
Список рекомендуемых литератур	35

ОБЩИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО РАБОТЕ НАД КУРСОМ

Изучение курса высшей математики начинается на установочных сессиях, где студенты слушают обзорные лекции, приобретают навыки в решении примеров и задач и получают методические рекомендации по самостоятельной работе в межсессионный период. После работы студенты приступают к самостоятельному изучению программного материала по учебникам, пособиям и другой литературе; выполняют контрольные работы и готовятся к собеседованию, зачету или экзамену.

Основной формой обучения студента-заочника является самостоятельная работа над учебным материалом, в которую включается: изучение материала по учебникам, решение примеров и задач, самопроверка, выполнение контрольных работ. Завершающим этапом изучения отдельных разделов курса высшей математики является собеседование по выполненным контрольным работам, сдача зачета или экзамена.

При изучении материала по учебнику полезно вести конспект, в который рекомендуется вписывать определения, формулировки теорем, формулы, уравнения и т.п. На полях конспекта следует отмечать вопросы, выделенные студентом для получения письменной или устной консультации преподавателя.

Письменное оформление конспекта имеет исключительно важное значения. Записи в нем должны быть сделаны аккуратно и расположены в определенном порядке. Хорошее внешнее оформление конспекта по изученному материалу не только приучит студента к необходимому порядку, но и позволит ему избежать многочисленных ошибок, которые происходят из-за небрежных, беспорядочных записей.

Выводы, полученные в виде формул, рекомендуется в конце, подчеркнуть или выделить рамкой, чтобы при чтении конспекта они выделялись и лучше запоминались. Опыт показывает, что многим студентам помогает в работе составление листа, содержащего важнейшие и наиболее часто употребляющиеся формулы курса. Такой лист не только помогает запомнить формулы курса, но и может служить постоянным справочником для студента.

Чтение учебника должно сопровождаться решением задач, для чего рекомендуется завести специальную тетрадь.

При решении задач нужно обосновать каждый этап решения, исходя из теоретических положений курса. Если студент видит несколько путей решения, то он должен сравнить их и выбрать самый лучший. Полезно до начала вычислений составить краткий план решения.

Решения задач и примеров следует излагать подробно, вычисления располагать в строгом порядке, отделяя вспомогательные вычисления от основных. Чертежи можно выполнять от руки.

ВЫПОЛНЕНИЕ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

К выполнению каждой контрольной работы следует приступать только после соответствующего изучения материала курса по учебнику и решения достаточного количества задач по материалу, соответствующему контрольному заданию.

При этом следует руководствоваться следующими правилами:

1. Каждая контрольная работа должна быть выполнена в отдельной тетради в клетку чернилами любого цвета, кроме красного, с полями шириной 3-4 сантиметра для замечаний рецензента.

2. На внешней обложке тетради должны быть ясно написаны фамилия студента, его инициалы, факультет, группа, шифр, название дисциплины, номер контрольной работы; здесь же следует указать дату отсылки и домашний адрес студента.

3. В работу должны быть включены только задания своего варианта.

4. В конце работы следует привести список используемой литературы, роспись, поставить дату выполнения работы, и оставить несколько чистых страниц для исправлений, дополнений по указанию рецензента.

5. Перед решением задачи нужно полностью выписать ее условие. Если несколько задач имеют общую формулировку, переписывать следует только условие задачи нужного варианта.

6. Решение каждой задачи следует сопровождать подробными объяснениями и ссылками на соответствующие формулы, теоремы и правила.

7. Чертежи и графики должны быть выполнены аккуратно и четко с указанием единиц масштаба, координатных осей и других элементов чертежа. Объяснения к задачам должны соответствовать тем обозначениям, которые даны на чертеже.

Контрольные работы, выполненные без соблюдения этих правил, а также выполненные не по своему варианту или содержащие не все задачи, не проверяются, а студенты к собеседованию по контрольным работам не допускаются.

После проверке контрольной работы и получения допуска следует устранить отмеченные рецензентом недочеты и, пройдя устное собеседование, получить по контрольной работе зачет. На итоговый зачет или экзамен студент должен явиться с зачтенными контрольными работами.

**РАСПРЕДЕЛЕНИЕ РАЗДЕЛОВ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО КУРСА ПО
СПЕЦИАЛЬНОСТЯМ И СЕМЕСТРАМ**

I. По специальностям технологического направления, направления информационных технологий (кроме специальностей 550201.01 «Управление и информатика в технических системах», 552801.04 «Программное обеспечение вычислительной техники и автоматизированных систем») и Института управления и бизнеса

Таблица 1

Семестры	Разделы
1	Линейная алгебра. Векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Введение в математический анализ. Дифференциальное исчисление функции одной переменной. (Исследование функции с помощью производной). Функции нескольких переменных.
2	Неопределенный интеграл. Определенный интеграл. Дифференциальные уравнения. Ряды. Кратные и криволинейные интегралы.

II. По специальностям энергетического направления, направления транспорта и машиностроения и технологического направления.

Таблица 2

Семестры	Разделы
1	Линейная алгебра. Векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Введение в математический анализ. Дифференциальное исчисление функции одной переменной. (Исследование функции с помощью производной).
2	Функции нескольких переменных. Неопределенный интеграл. Определенный интеграл и его приложения.

**III. По специальностям
направления информационных технологий
(кроме специальностей (кроме специальностей 550201.01 «Управление и
информатика в технических системах» , 552801.04 «Программное
обеспечение вычислительной техники и автоматизированных систем»)**

Таблица 3

Семестры	Разделы
1	Курс. <u>Линейная алгебра</u> Линейная алгебра Векторная алгебра Аналитическая геометрия
1	Курс. <u>Математический анализ.</u> Введение в математический анализ. Дифференциальное исчисление функции одной переменной. (Исследование функции с помощью производной). Функции нескольких переменных. Неопределенный интеграл.
2	Определенный интеграл и его приложения. Несобственные интегралы. Кратные и криволинейные интегралы. Дифференциальные уравнения. Ряды. Ряд Фурье.

**РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЗАДАНИЙ (ЧАСТЬ – 1, ЧАСТЬ – 2 И ЧАСТЬ – 3) ПО
СПЕЦИАЛЬНОСТЯМ, КОНТРОЛЬНЫМ РАБОТАМ
И СЕМЕСТРАМ**

**I. По специальностям технологического направления , направления
информационных технологий (кроме специальностей (кроме
специальностей 550201.01 «Управление и информатика в технических
системах» , 552801.04 «Программное обеспечение вычислительной
техники и автоматизированных систем») и Института управления и
бизнеса**

Таблица 4

Семестры	Задания по частям	Номер контрольной работы
1	Часть – 1. Задания с 11 по 90. Часть – 2. Задания с 1 по 10, с 31 по 40.	1
2	Часть – 2. Задания с 41 по 90. Часть – 3. Задания с 1 по 90.	2

II. По специальностям энергетического направления, направления транспорта и машиностроения и технологического направления.

Таблица 5

Семестры	Задания по частям	Номер контрольной работы
1	Задания по часть – 1.	1
2	Задания по часть – 2.	2

III. По специальностям направления информационных технологий (кроме специальностей (кроме специальностей 550201.01 «Управление и информатика в технических системах» , 552801.04 «Программное обеспечение вычислительной техники и автоматизированных систем»)

Таблица 6

Семестры	Задания по частям	Номер контрольной работы
1	<u>Курс. Линейная алгебра.</u> Часть – 1. Задания с 1 по 50.	1
1	<u>Курс. Математический анализ.</u> Часть – 1. Задания с 51 по 90. Часть – 2. Задания с 1 по 50.	1
2	Часть – 2. Задания с 51 по 90. Часть – 3. Задания с 1 по 90.	2

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЗАДАНИЙ (ЧАСТЬ – 1, ЧАСТЬ – 2 И ЧАСТЬ – 3) ПО КОНТРОЛЬНЫМ РАБОТАМ И СЕМЕСТРАМ ДЛЯ СТУДЕНТОВ, ИМЕЮЩИХ СРЕДНЕЕ СПЕЦИАЛЬНОЕ (ТЕХНИКУМ) ОБРАЗОВАНИЕ

Таблица 7

№	По специальностям факультетов	1 семестр	2 семестр
		Контрольная работа №1	Контрольная работа №2
1.	Факультет информационных технологий	Часть – 1. Задания с 31 по 40, с 71 по 90. Часть – 2. Задания с 1 по 10, с 21 по 50.	Часть – 2. Задания с 61 по 70. Часть – 3. Задания с 1 по 50, с 71 по 90.
2.	Энергетический факультет	Часть – 1. Задания с 31 по 80. Часть – 2. Задания с 1 по 40.	Часть – 2. Задания с 61 по 80. Часть – 3. Задания с 1 по 30, с 41 по 60, с 71 по 90.
3.	Факультет транспорта и машиностроения и ТМО технологического.фак ультета	Часть – 1. Задания с 31 по 50, с 81 по 90. Часть – 2. Задания с 1 по 10, с 31 по 40, с 81 по 90.	Часть – 3. Задания с 1 по 30, с 41 по 60, с 71 по 90.
4.	Технологический факультет	Часть – 1. Задания с 31 по 40, с 71 по 80. Часть – 2. Задания с 31 по 40, с 71 по 80.	Часть – 3. Задания с 1 по 30, с 41 по 50, с 71 по 90.

5.	Институт управления и бизнеса	Часть – 1. Задания с 11 по 20, с 31 по 40, с 71 по 80. Часть – 2. Задания с 31 по 40, с 61 по 70.	Часть – 2. Задания с 71 по 80. Часть – 3. Задания с 1 по 30, с 31 по 50.
6.	Институт электроники и телекоммуникаций	Часть – 1. Задания с 71 по 90. Часть – 2 с 41 по 70. Часть – 3. Задания с 1 по 20, с 31 по 50.	

**ЕДИНАЯ ТАБЛИЦА ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПО ШИФРУ
СТУДЕНТА НОМЕРОВ ЗАДАЧ КАНТРОЛЬНЫХ РАБОТ ПО ЧАСТЯМ
(ЧАСТЬ – 1, ЧАСТЬ – 2 И ЧАСТЬ – 3).**

Таблица 8

Последняя цифра шифра									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
3	4	5	6	7	8	9	10	1	2
14	15	16	17	18	19	20	11	12	13
25	26	27	28	29	30	21	22	23	24
36	37	38	39	40	31	32	33	34	35
47	48	49	50	41	42	43	44	45	46
58	59	60	51	52	53	54	55	56	57
69	70	61	62	63	64	65	66	67	68
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
88	89	90	81	82	83	84	85	86	87

Внимание!

Во избежания составления излишних таблиц для определения номеров контрольных заданий по шифру студента, составлена единая таблица (таблица № 8) для всех контрольных работ с нумерациями с 1 по 90 (включительно). Задания контрольных работ по разделам разделены на три части (часть – 1, часть-2, часть-3), каждая часть состоит из 9 блоков каждый блок по 10 всего 90 задач. Задачи контрольных работ регулируются по частям часть – 1, часть-2 и часть-3.

Например, студент группы ЭЭ по шифру 9153 по таблице определяет номера своих задач по последней цифре 3, это соответствует номерам 5, 16, 27, 38, 49, 60, 61, 73, 90.

Это означает, что студент по контрольной работе №1 выполняет задания 5, 16, 27, 38, 49, 60, 61, 73, 90. По части –1 и по контрольной работе №2 эти же номера по задания по части-2.

**ЗАДАЧИ ДЛЯ КОНТРОЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ
ЧАСТЬ - 1**

РАЗДЕЛЫ: «Линейная алгебра», «Векторная алгебра», «Аналитическая геометрия».

1-10. Даны матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 4 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -3 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Найти матрицу С:

1. $C = A \cdot B - 4A + 3E + E \cdot A$ 2. $C = B \cdot A + 2B - E - 4B \cdot E$

$$\begin{array}{ll}
3. C = 4A - A \cdot B + 2E - 3E \cdot A & 4. C = 2B + B \cdot A - 7E + E \cdot B \\
5. C = A \cdot B - 4A + 3E - B \cdot E & 6. C = B \cdot A + 2B - E + 4A \cdot E \\
7. C = A^2 - 7B + 2E - B \cdot E & 8. C = B^2 - 2A + 4E + 2A \cdot E \\
9. C = 3A - B^2 + E - B \cdot 4E & 10. C = 2B - A^2 + 4E - A \cdot E
\end{array}$$

11-20. Доказать совместность системы линейных уравнений и решить ее тремя способами: 1) по правилу Крамера; 2) матричным методом; 3) методом Гаусса.

$$11. \begin{cases} x - 2y + z = -3 \\ 4x - 2y - 4z = 1 \\ 3x - y + 3z = -4 \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} x + y + 2z = -1 \\ 2x - y + 2z = -4 \\ 4x + y + 4z = -2 \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} 6x + 2y - 2z = -1 \\ 3x + 2y + z = 2 \\ x - 3y + 2z = -5 \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} 5x + y - 3z = -2 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \\ 2x - 3y + z = 17 \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} 2x + y - z = 5 \\ 2x - 2y + 4z = 0 \\ 7x + y - z = 10 \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} 5x - 3y + 4z = 6 \\ 2x - y - z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} x - y + z = 2 \\ 2x + 3y - z = 5 \\ 6x - 2y + 4z = 7 \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} 2x - 3y - z = 0 \\ 3x + y - 4z = 3 \\ x - y + 3z = 4 \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} 2x + 3y + 5z = 0 \\ x + y - z = -3 \\ 3x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y - 2z = -1 \\ x + 4y + z = 4 \end{cases}$$

21-30. Даны координаты вершин треугольника ABC. Сделав рисунок, найти: 1) длину стороны AB; 2) уравнение медианы BM; 3) уравнение высоты проведенной из вершины C; 4) внутренний угол при вершине A.

$$21. A(1;-3), B(4;5), C(-1;3).$$

$$22. A(0;-3), B(3;-1), C(-1;4).$$

$$23. A(1;-1), B(2;4), C(3;-4).$$

$$24. A(1;5), B(-1;2), C(2;-3).$$

$$25. A(2;7), B(0;3), C(-1;3).$$

$$26. A(2;3), B(4;-1), C(0;4).$$

$$27. A(-1;3), B(0; 2), C(1;7).$$

$$28. A(1;4), B(0;-1), C(2;7).$$

$$29. A(0;-3), B(0;4), C(4;0).$$

$$30. A(2;-4), B(1;2), C(3;2).$$

31-40. Даны точки A, B, C, D.

Найти: 1) координаты векторов $\vec{a}=\overline{AB}$, $\vec{b}=\overline{AC}$, $\vec{c}=\overline{AD}$; 2) скалярное произведение векторов \vec{a} и \vec{b} ; 3) угол φ между векторами \vec{a} и \vec{b} ; 4) направление вектора \vec{c} в пространстве; 5) векторное произведение векторов \vec{a} и \vec{b} ; 6) площадь ΔABC ; 7) смешанное произведение векторов \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} ; 8) написать уравнение прямой AB и найти ее точки пересечения с координатными плоскостями; 9) найти точку Q, симметричную точке A относительно плоскости, проходящей через B, C, D.

31. A(1;-1;2), B(0;4;2), C(-1;1;3), D(1;1;4).

32. A(0;1;2), B(1;-3;-2), C(1;3;-1), D(2;0;-2).

33. A(4;3;5), B(-1;2;7), C(2;4;5), D(-1;2;-3).

34. A(2;3;1), B(3;0;-5), C(2;0;-2), D(0;-2;5).

35. A(3;-1;7), B(-1;2;-5), C(1;5;-1), D(2;9;-3).

36. A(3;-1;7), B(-1;5;0), C(0;-3;3), D(1;2;6).

37. A(-2;5;2), B(1;3;4), C(-1;5;6), D(4;-3;5).

38. A(1;-5;6), B(2;-1;3), C(2;-5;1), D(5;0;-1).

39. A(0;-1;2), B(1;4;5), C(3;-1;0), D(3;-1;1).

40. A(1;4;0), B(-1;3;2), C(2;-1;0), D(0;-1;3).

41-50. Привести к простейшему виду данные уравнения и установить: 1) в пунктах а); б); в) какую линию на плоскости они определяют; 2) в пунктах в); г) - какую поверхность. Каждый случай проиллюстрировать схематичным рисунком.

41. а) $2x - y - 6 = 0$
 б) $4x^2 + 9y^2 - 72 = 0$
 в) $x^2 - 6y = 0$
 г) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 4z = 0$

42. а) $2x + 3y - 12 = 0$
 б) $4x^2 + 4y^2 - 4 = 0$
 в) $x^2 + 6y = 0$
 г) $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4z = 0$

46. а) $x - 6y - 9 = 0$
 б) $x^2 + y^2 + 9y = 0$
 в) $y^2 - 4x = 0$
 г) $x^2 + y^2 + 9z^2 - 36 = 0$

47. а) $5y + x - 10 = 0$
 б) $x^2 + y^2 - 8x = 0$
 в) $y^2 - 8x = 0$
 г) $4x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 16 = 0$

$$43. \begin{aligned} a) & x - 3y + 4 = 0 \\ б) & 2x^2 + 5y^2 - 12 = 0 \\ в) & x^2 + 0,5y = 0 \\ г) & x^2 + y^2 + z^2 - 4y + 6x = 0 \end{aligned}$$

$$44. \begin{aligned} a) & 2x + y = 8 \\ б) & x^2 + y^2 - 6y = 0 \\ в) & y^2 + 4x = 0 \\ г) & x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 16 = 0 \end{aligned}$$

$$45. \begin{aligned} a) & 3x - 5y - 15 = 0 \\ б) & x^2 + y^2 + 4x = 0 \\ в) & y^2 + \frac{1}{2}y = 0 \\ г) & 3x^2 + 9y^2 + 9z^2 - 9 = 0 \end{aligned}$$

$$48. \begin{aligned} a) & 2x - 3y - 10 = 0 \\ б) & 9x^2 - 4y^2 - 36 = 0 \\ в) & x^2 - 4y = 0 \\ г) & x^2 + y^2 + z^2 - 4y = 0 \end{aligned}$$

$$49. \begin{aligned} a) & 5x - y - 10 = 0 \\ б) & 4x^2 - y^2 - 8 = 0 \\ в) & x^2 - \frac{1}{4}y = 0 \\ г) & x^2 + y^2 + z^2 - 6y = 0 \end{aligned}$$

$$50. \begin{aligned} a) & x + 3y + 6 = 0 \\ б) & 4x^2 - 25y^2 - 100 = 0 \\ в) & x^2 - 5y = 0 \\ г) & x^2 + y^2 + z^2 + 4z = 0 \end{aligned}$$

Разделы: «Введение в математический анализ», «Дифференциальное исчисление функций одной переменной».

51-60. Найти пределы (не пользуясь правилом Лопиталя).

$$51. \begin{aligned} a) & \lim_{x \rightarrow -5} \frac{4x^2 + 30x + 50}{x^2 + 15x + 50}; \\ б) & \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x - 8}{\sqrt{x - 2} - \sqrt{6 - x}}; \\ в) & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 + 5x - 3}{5x^2 + 2x + 1}; \\ г) & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \cos 4x}; \end{aligned}$$

$$53. \begin{aligned} a) & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + 5x - 8}{4x^2 + 6x - 10}; \\ б) & \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x - 2} - \sqrt{4 - x}}{2x - 6}; \\ в) & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 5x - 8}{5x^2 + 3x - 5}; \\ г) & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{x^3}; \end{aligned}$$

$$52. \begin{aligned} a) & \lim_{x \rightarrow 3} \frac{10x^2 - 25x - 15}{3x^2 - 4x - 15}; \\ б) & \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x - 1} - \sqrt{7 - x}}{3x - 12}; \\ в) & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^2 - 5x - 3}{3x^2 - 4x - 15}; \\ г) & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2 + x^3}; \end{aligned}$$

$$54. \begin{aligned} a) & \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x^2 - 7x - 2}{x^2 - 0,5x - 3}; \\ б) & \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x - 4}{\sqrt{x + 2} - \sqrt{6 - x}}; \\ в) & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2 - 7x - 2}{2x^2 - x - 6}; \\ г) & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{1 - \cos 2x}; \end{aligned}$$

$$55. \begin{aligned} a) & \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 + 11x + 10}{x^2 + 5x + 1}; \\ б) & \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x - 4}{\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x}}; \\ в) & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x^2 + 20x - 1}{2x^3 + x - 3}; \\ г) & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{6x^2}; \end{aligned}$$

$$56. \begin{aligned} a) & \lim_{x \rightarrow -4} \frac{7x^2 + 26x - 8}{x^2 + 2x - 14}; \\ б) & \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+4} - \sqrt{8-x}}{x-6}; \\ в) & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^2 + 26x - 8}{2x^2 + x - 28}; \\ г) & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos 4x}}{2x^2}; \end{aligned}$$

$$57. \begin{aligned} a) & \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 5x - 3}{x^2 + 10x + 12}; \\ б) & \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1} - \sqrt{9-x}}{x-25}; \\ в) & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2 + 5x - 3}{x^2 + 5x + 6}; \\ г) & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{10x^2}; \end{aligned}$$

$$58. \begin{aligned} a) & \lim_{x \rightarrow 4} \frac{4x^2 - 18x + 8}{3x^2 - 13x + 4}; \\ б) & \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{10-x^2} - 1}{9-3x}; \\ в) & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 - 9x + 4}{9x^2 - 13x}; \\ г) & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x}{1 - \cos x}; \end{aligned}$$

$$59. \begin{aligned} a) & \lim_{x \rightarrow 3} \frac{6x^2 - 30x + 6}{5x^2 - 16x + 3}; \\ б) & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5-x^2} - 2}{3(1-x)}; \\ в) & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 2x - 1}{4x^3 - x + 5}; \\ г) & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x \cdot \operatorname{tg} 2x}; \end{aligned}$$

$$60. \begin{aligned} a) & \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x^2 - 14x + 8}{4x^2 - 14x - 8}; \\ б) & \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x+7} - \sqrt{3-x}}{3x+6}; \\ в) & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - 14x + 8}{3x^2 - 7x - 4}; \\ г) & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^3 x}{x^2}; \end{aligned}$$

61-70. В пунктах 1) - 3) найти производную dy/dx , а в пункте 4) – дифференциал dy .

$$61. 1) y = 5 \sin^6(1+x^2) - \frac{2}{x},$$

$$2) y = \frac{\operatorname{tg} 5x}{\ln x}$$

$$3) y = (x^3 - 3x^2 + 1)^{10},$$

$$4) y = (x^2 + 1) \cdot \arcsin 4x$$

$$62. 1) y = 6 \ln^4(x^2 + 1) + 9x,$$

$$2) y = \frac{e^{6x}}{x^2 - 4x}$$

$$3) y = (\sin x + \operatorname{tg} x)^{16},$$

$$4) y = x^4 \cdot \arccos \sqrt{x}$$

$$63. 1) y = \cos \ln x + \sin^4 x - 2,$$

$$2) y = \frac{e^{8x}}{\sin 6x}$$

$$3) y = \left(2\sqrt[5]{x} - \frac{5}{x} + 4 \right)^{16},$$

$$4) y = x^3 \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{x}$$

$$64. 1) y = \frac{1}{x} + \ln^4 x + 5 \sin 3x,$$

$$3) y = (\cos \sqrt{x} + \sqrt[3]{x})^6,$$

$$65. 1) y = 2 \cos^3 x + \sqrt[4]{x} + 5,$$

$$3) y = \left(20\sqrt[3]{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} + 1 \right)^{19},$$

$$66. 1) y = 5 \arccos 3x - 3^{\lg x},$$

$$3) y = (\operatorname{tg}^2 x + x^3)^{10},$$

$$67. 1) y = \pi + \ln(x + x^3),$$

$$3) y = \left(2\sqrt[3]{x} + \frac{4}{x} - 5 \right)^{19},$$

$$68. 1) y = \frac{2}{x} + \operatorname{arctg}^4 x - 4x,$$

$$3) y = \left(5\sqrt[3]{x} + \frac{2}{x^2} - 4 \right)^{16},$$

$$69. 1) y = 2 \cos^3 x + \ln 3x - 2,$$

$$3) y = \left(x^4 + \frac{2}{x^2} - \sqrt[3]{x} \right)^{12},$$

$$70. 1) y = \ln \cos x + \operatorname{tg}^2 x - 2,$$

$$3) y = \left(x^5 - \frac{3}{x} + 2x \right)^8,$$

$$2) y = \operatorname{tg} 6x \cdot \sqrt{\operatorname{arctg} x}$$

$$4) y = \frac{e^{\sin x}}{\operatorname{ctg} 9x}$$

$$2) y = \sin 8x \cdot \ln(x + x^3)$$

$$4) y = \frac{\arcsin 5x}{e^{3x}}$$

$$2) y = \sqrt[4]{x+2} \cdot \sin 4x$$

$$4) y = \frac{e^{7x+2}}{\ln(x^3 + x)}$$

$$2) y = e^{\sqrt{x}} \cdot \arcsin 3x$$

$$4) y = \frac{\operatorname{arctg} 5x}{\sin(2x+1)}$$

$$2) y = e^{4x-1} \cdot \sqrt{x^2 + 2x + 2}$$

$$4) y = \frac{\arccos(8x-1)}{\sin 6x}$$

$$2) y = \frac{\sin 6x}{\ln(3x+4)}$$

$$4) y = \operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{arctg}^3 x$$

$$2) y = e^{\sin x} \cdot \sqrt{4+x^2}$$

$$4) y = \frac{2x + e^{-x}}{\operatorname{arctg} 4x}$$

71-80. Найти $d^2 y / dx^2$ для функций:

$$1) y = x \sin 6x,$$

$$71. \quad 2) y = x^3 + y^3 - 2 = 0,$$

$$3) \begin{cases} x = 2 \sin 6t \\ y = \cos 6t \end{cases}$$

$$1) y = x^4 \ln x,$$

$$72. \quad 2) x^2 + y^2 - 2 = 0,$$

$$3) \begin{cases} x = 2e^{4t} + 5 \\ y = e^{4t} + 3 \end{cases}$$

$$1) y = e^{3x} + \cos 3x,$$

$$73. \quad 2) x^2 + \sin y = 1,$$

$$3) \begin{cases} x = t^2 + 1 \\ y = \sqrt{t} \end{cases}$$

$$1) y = x^2 + \sin^2 x,$$

$$74. \quad 2) x^3 + \operatorname{tg} y + 1 = 0,$$

$$3) \begin{cases} x = e^{-t} + 1 \\ y = 2e^{3t} \end{cases}$$

$$1) y = \sin 2x + x^2 - 1,$$

$$75. \quad 2) x^3 + \cos y - 2 = 0,$$

$$3) \begin{cases} x = \ln t \\ y = t^2 - t \end{cases}$$

$$1) y = e^{4x} + x^4 - 1,$$

$$76. \quad 2) y^2 + \ln x + y = 0,$$

$$3) \begin{cases} x = 3 \cos 5t - 4 \\ y = \sin 5t + 2 \end{cases}$$

$$1) y = 3 \ln x + x^2 - x,$$

$$77. \quad 2) \ln y + x^2 - 2 = 0,$$

$$3) \begin{cases} x = \cos 2t - 1 \\ y = 4 \sin 2t \end{cases}$$

$$1) y = \sin^2 x + \sqrt{x} - 3,$$

$$78. \quad 2) 2x^4 + y^4 - 1 = 0,$$

$$3) \begin{cases} x = \sin 2t \\ y = \cos^2 t \end{cases}$$

$$1) y = \operatorname{arctg} x - 6x,$$

$$79. \quad 2) x - \sin y + 2 = 0,$$

$$3) \begin{cases} x = t^2 + 2t \\ y = (t+1)^3 \end{cases}$$

$$1) y = \ln(x^2 + 5),$$

$$80. \quad 2) x^2 + \ln y = 2,$$

$$3) \begin{cases} x = \sqrt{t} - 2 \\ y = t^3 + 5 \end{cases}$$

Раздел «Исследование функций с помощью производных» 81-90. а) Данную функцию исследовать методами дифференциального исчисления и построить ее график. Для этого рекомендуется по пункту

- а) 1) определить в каких интервалах функция существует и непрерывна;
- 2) выяснить, не является ли функция четной или нечетной, т.е. не симметричен ли ее график относительно оси координат или начала координат;
- 3) найти точки пересечения графика с осями координат;
- 4) определить вертикальные и наклонные асимптоты;
- 5) найти интервалы возрастания, убывания и экстремумы;
- 6) найти интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба графика функции;

7) построить график функции, используя все полученные данные. При нахождении пределов можно пользоваться правилом Лопиталья.

б) Найти наибольшее M и наименьшее m значения функции $y=f(x)$ на отрезке $[a; b]$.

81a. $y = xe^x$

б. $y = x^3 - 12x + 1, [-4; 3]$

82a. $y = \ln(x^2 + 1)$

б. $f(x) = x - \arctg x, [-1; 1]$

83a. $y = xe^{-x}$

б. $y = x^3 - 3x^2 + 1, [-4; 4]$

84a. $y = \frac{2x}{1+x^2}$

б. $f(x) = x^4 - 2x + 5, [0; 3]$

85a. $y = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$

б. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3, [-2; 0]$

86a. $y = x^{-1}e^x$

б. $f(x) = x - 2\sqrt{x}, [0; 4]$

87a. $y = \frac{2 \ln x}{x}$

б. $f(x) = \frac{4-x^2}{4+x^2}, [-4; 3]$

88a. $y = x^2 + \frac{1}{x}$

б. $f(x) = x^3 - 3x^2, [-4; 3]$

89a. $y = \frac{x^2+1}{x}$

б. $f(x) = 3\sqrt[3]{x^2} - 2x, [0; 8]$

90a. $y = x^2e^{-x}$

б. $f(x) = x^4 + 4x, [-1; 0]$

ЧАСТЬ - 2

1-10. Найти частные производные первого и второго порядка функции $z=f(x,y)$.

1. $z = x^2y^2 + \sin x^2 + \sqrt{y}$

6. $z = \cos(x^2 + y^4)$

2. $z = \ln(x^3 + y^2)$

7. $z = \operatorname{tgy} + x^2 \cdot y^4$

3. $z = x^2 \sin y + \sqrt{x}$

8. $z = e^{x^2+y^3}$

4. $z = \sin x \cdot y^2 + \frac{1}{y}$

9. $z = e^{\sin x} + x^3 \cdot y^3$

5. $z = \ln(\sqrt{x} + y^3)$

10. $z = \sin(x^2 + y^2)$

11-20. Найти полные дифференциалы функции $z = f(x, y)$.

11. $z = e^{x^2-y^3}$

16. $z = e^{x^3/y^2}$

12. $z = \ln(x^2 + y^4)$

17. $z = \sin(x^2 y^3)$

13. $z = \text{Cos}(x^3 + y^3)$

18. $z = \arcsin(xy^2)$

14. $z = \text{arctg}(xy)$

19. $z = x^2 y^3 + xy^2$

15. $z = e^{x^2 y^2}$

20. $z = \frac{1}{x^2 + y^4}$

21-30. Исследовать на экстремум следующие функции двух переменных.

21. $z = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$

22. $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20$

23. $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$

24. $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$

25. $z = xy(1 - x - y)$

26. $z = x^2 + y^2 + xy - 4x - 5y$

27. $z = 3x + 6y - x^2 - xy - y^2$

28. $z = x^2 y(2 - x - y)$

29. $z = 2xy - 3x^2 - 3y^2 + 10$

30. $z = x^3 + y^3 - 3xy$

31-40. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $z=f(x, y)$ в замкнутой области D , заданной системой неравенств. Построить область D .

31. $z = x^2 + 4xy - y^2 - 6x - 2y$, $x \geq 0, y \geq 0$, $x + y \leq 2$
 32. $z = x^2 + 2y^2 + 4xy + 1$, $-1 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 4$
 33. $z = x^2 + y^2 + 4xy - 4$, $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 2$
 34. $z = 2x^3 + 4x^2 \cdot y^2 - 2xy$, $y \geq x^2, y \leq 4$, $x \geq 0$
 35. $z = x^2 + y^3 - 3xy$, $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 4$
 36. $z = x^2 + y^2 - 6x + 4y + 2$, $0 \leq x \leq 4$, $-3 \leq y \leq 2$
 37. $z = x^2 - 2xy + 3$, $0 \leq y \leq 4 - x^2$, $y \leq x + 2$
 38. $z = x^2 + 2xy - y^2 - 2x + 2y + 3$, $x \leq 2, y \geq 0$,
 39. $z = x^2 + xy - 3x - y$, $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 4$
 40. $z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x + 5$, $x \geq 0, y \geq 0$, $x + y \leq 3$

Разделы: «Неопределенный интеграл», «Определенный интеграл».

41-50. Найти данные неопределенные интегралы. В пп. 1 и 2 результаты проверить дифференцированием.

41. 1) $\int (\sqrt[5]{x} + \frac{2}{x} + 3\sqrt{x} - 1) dx$ 2) $\int \frac{\sin 2x dx}{6 + \cos^2 x}$
 3) $\int x \cdot \cos 6x dx$ 4) $\int \frac{(x+3) dx}{(x+1)^2 (x-4)}$
 5) $\int \frac{x+3}{x\sqrt{x+4}} dx$ 6) $\int \frac{1}{1 + \cos^2 x} dx$
 42. 1) $\int \frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)} dx$ 2) $\int \sqrt{2+9x} dx$
 3) $\int \frac{\ln x}{x^3} dx$ 4) $\int \frac{(x-3)}{(x+1)(x^2+4)} dx$
 5) $\int \frac{dx}{\sqrt{x(x+1)}}$ 6) $\int \frac{dx}{1 - \sin x}$
 43. 1) $\int \frac{x^4 dx}{x^2 + 1}$ 2) $\int x^2 \sqrt{x^3 - 4} dx$
 3) $\int 2xe^{-3x} dx$ 4) $\int \frac{(x-2) dx}{x(x+5)(x+1)}$
 5) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 3}}$ 6) $\int \sin^2 x \cdot \cos^3 x dx$

$$44. 1) \int \left(x + \frac{4}{x^2}\right)^2 dx$$

$$3) \int x \cdot 3^x dx$$

$$5) \int \frac{dx}{x + \sqrt{x+2}}$$

$$45. 1) \int (\sqrt[3]{x} + x^2)^2 dx$$

$$3) \int \frac{3 + \sqrt{x}}{x + \sqrt{x}} dx$$

$$5) \int \ln(3x + 5) dx$$

$$46. 1) \int \frac{5 + 4x \cdot \sin^2 x}{\sin^2 x} dx$$

$$3) \int x \cdot \sin 6x dx$$

$$5) \int \frac{x dx}{1 + \sqrt{x+1}}$$

$$47. 1) \int \frac{\cos^2 x - 2 \sin x \cdot \cos^2 x + 4}{\cos^2 x} dx$$

$$3) \int \arcsin 3x dx$$

$$5) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}}$$

$$48. 1) \int (\sqrt[3]{x} + \sqrt{x^3})^2 dx$$

$$3) \int x \cdot 4^x dx$$

$$5) \int \frac{\sqrt{x+2} dx}{1 + \sqrt{x+2}}$$

$$49. 1) \int \frac{(x+2)^2}{x} dx$$

$$3) \int \frac{x}{\sin^2 x} dx$$

$$5) \int \frac{\sqrt{x} dx}{1 + \sqrt[2]{x}}$$

$$2) \int \sqrt{4x+5} dx$$

$$4) \int \frac{(1+x) dx}{(x-4)(x^2+2)}$$

$$6) \int \sin 3x \cdot \cos 5x dx$$

$$2) \int \frac{x^3 dx}{x^4 + 6}$$

$$4) \int \frac{(x-1) dx}{1+x^3}$$

$$6) \int \sin x \cdot \sin 3x dx$$

$$2) \int \frac{x dx}{\sqrt{x^2+3}}$$

$$4) \int \frac{(x+1) dx}{x^3-1}$$

$$6) \int \cos 2x \cdot \cos 3x dx$$

$$2) \int \frac{6e^{2x}}{e^{2x}+4} dx$$

$$4) \int \frac{(2x+3) dx}{x(x+2)(x-3)}$$

$$6) \int \cos^3 x dx$$

$$2) \int \frac{(x-2) dx}{x^2-4x+5}$$

$$4) \int \frac{(x-4) dx}{x(x^2+1)}$$

$$6) \int \sin^3 x dx$$

$$2) \int \frac{\cos x dx}{4 + \sin x}$$

$$4) \int \sin^4 x dx$$

$$6) \int \frac{x dx}{(x-1)^2(x+3)}$$

$$50. 1) \int \left(\frac{2}{x} + x^2 \right)^2 dx$$

$$3) \int \arctg x dx$$

$$5) \int \frac{\sqrt{x} dx}{1 + \sqrt{x}}$$

$$2) \int (2x + 5)^{16} dx$$

$$4) \int \frac{(x-3)}{x(x^2+1)} dx$$

$$6) \int \operatorname{tg}^3 x dx$$

51-60. Вычислить определенные интегралы.

$$51. 1) \int_0^8 \sqrt{x+1} dx$$

$$2) \int_1^9 \frac{dx}{x + \sqrt{x}}$$

$$3) \int_0^1 x e^{-x} dx$$

$$52. 1) \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$$

$$2) \int_0^3 \frac{x dx}{\sqrt{x+1}}$$

$$3) \int_0^{\pi/2} x \sin 2x dx$$

$$53. 1) \int_0^3 \sqrt{x+5} dx$$

$$2) \int_4^9 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}$$

$$3) \int_1^e x e^{2x} dx$$

$$54. 1) \int_0^1 \frac{dx}{(1+2x)^2}$$

$$2) \int_2^7 \frac{dx}{x\sqrt{x+2}}$$

$$3) \int_0^{\pi/2} x \cos x dx$$

$$55. 1) \int_1^4 \frac{y-4}{\sqrt{y}} dy$$

$$2) \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \sin x}$$

$$3) \int_0^{0.5} \arcsin x dx$$

$$56. 1) \int_1^4 \frac{x dx}{1+x^2}$$

$$2) \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{1 + \cos^2 x}$$

$$3) \int_0^1 \arctg x dx$$

$$57. 1) \int_1^2 \sqrt{3x-2} dx$$

$$2) \int_4^9 \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{x}-1}$$

$$3) \int_1^e \ln x dx$$

$$58. 1) \int_1^2 \frac{dx}{(1+2x)^2}$$

$$2) \int_0^4 \frac{\sqrt{x} dx}{1+x}$$

$$3) \int_0^e x e^{2x} dx$$

$$59. 1) \int_3^6 \sqrt{x-2} dx$$

$$2) \int_1^3 \frac{\sqrt{x-1}}{1+\sqrt{x-1}} dx$$

$$3) \int_0^1 x e^{-x} dx$$

$$60. 1) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{8x+1}}$$

$$2) \int_1^8 \frac{\sqrt[3]{x} dx}{1+\sqrt[3]{x}}$$

$$3) \int_0^1 x \cdot 2^x dx$$

61-70. Построить фигуру, ограниченную заданными линиями и вычислить ее площадь.

61. $y = x^2,$	$y = 2 - x$
62. $y = 2x - x^2,$	$y = 0$
63. $y = 2x,$	$y^2 = 4x$
64. $y = 3,$	$y = 4x, y = \frac{1}{x}$
65. $y = 0,$	$y = 2 - x^2$
66. $y = x^3,$	$y = 4x$
67. $y = 0,$	$y = x^2 + 4x$
68. $y = 0,$	$y = x^2 - 3x$
69. $y = x,$	$y = \frac{1}{x}, x = 4$
70. $y = e^{-x},$	$y = e^x, x = 1$

71-80. Найти длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases}$ при изменении t от t_1 до t_2 .

71. $x = 2\sin t,$ $y = 2\cos t,$ $t_1 = 0,$ $t_2 = \pi/2$

72. $x = t,$ $y = \frac{2}{3}\sqrt{t^3},$ $t_1 = 0,$ $t_2 = 3$

73. $x = 2t,$ $y = \frac{4}{3}\sqrt{t^3},$ $t_1 = -1,$ $t_2 = 0$

74. $x = 3\sin t,$ $y = 3\cos t,$ $t_1 = \pi/2,$ $t_2 = 3\pi/2$

75. $x = t,$ $y = \sqrt{t^3},$ $t_1 = -4/9,$ $t_2 = 0$

76. $x = \frac{t}{2} - 1,$ $y = \frac{1}{3}\sqrt{t^3},$ $t_1 = 0,$ $t_2 = 3$

77. $x = t^2 - 1,$ $y = 2t^2,$ $t_1 = 1,$ $t_2 = 3$

78. $x = 1 - 2\sin t,$ $x = 1 + 2\cos t,$ $t_1 = 0,$ $t_2 = \pi$

79. $x = 2 + \cos t,$ $x = 2 - \sin t,$ $t_1 = 1,$ $t_2 = 4$

80. $x = \ln t,$ $x = 2\ln t,$ $t_1 = 1,$ $t_2 = e$

81-90. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость.

$$81. 1) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$$

$$82. 1) \int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx$$

$$83. 1) \int_1^{+\infty} \frac{\arctg x}{1+x^2} dx$$

$$84. 1) \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{1+x^2}$$

$$85. 1) \int_2^{+\infty} \frac{x^2 dx}{1+x^3}$$

$$86. 1) \int_2^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

$$87. 1) \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}$$

$$88. 1) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{4+x^2}$$

$$89. 1) \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$90. 1) \int_e^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^2}$$

$$2) \int_1^2 \frac{dx}{\ln x}$$

$$2) \int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{4-x}}$$

$$2) \int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$$

$$2) \int_0^2 \frac{dx}{(x-2)^2}$$

$$2) \int_0^2 \frac{x dx}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$2) \int_0^{\pi/2} \operatorname{tg} x dx$$

$$2) \int_{-2}^0 \frac{dx}{(x+2)^3}$$

$$2) \int_{-1}^7 \frac{dx}{\sqrt[3]{7-x}}$$

$$2) \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{dx}{1+\cos x}$$

$$2) \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{1-\cos 2x}$$

ЧАСТЬ-3

Раздел: «Дифференциальные уравнения».

1-10. Найти общее решение дифференциальных уравнений. В п.2 выделить частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0)=y_0$.

$$1. 1) (x^2 + y^2) dx - xy dy = 0,$$

$$2) y' \sin x - y \ln y = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e$$

$$2. 1) y \cdot y' = 2y - x,$$

$$2) y' + \frac{xy^2 + x}{y - xy} = 0, \quad y(0) = 1$$

$$3. 1) y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x},$$

$$2) y \cdot y' + \frac{1-2x}{y} = 0, \quad y(1) = 0$$

$$4. 1) xy' \cos \frac{y}{x} = y \cos \frac{y}{x} - x,$$

$$2) y' - \frac{1}{x}(y+1) = 0, \quad y(1) = 2$$

$$5. 1) xy' = y \ln \frac{y}{x} - x,$$

$$2) \sqrt{1-y^2} dx + y\sqrt{1-x^2} dy = 0, \quad y(0) = 0$$

6. 1) $x dy = (y + \sqrt{x^2 + y^2}) dx,$	2) $(1 + y^2) dx = xy dy, \quad y(2) = 1$
7. 1) $xy' = y \left(1 + \ln \frac{y}{x} \right),$	2) $x^2 y' + y = 0, \quad y(1) = e$
8. 1) $2x^2 dy = (x^2 + y^2) dx,$	2) $x\sqrt{1+x^2} + y\sqrt{1+y^2} \cdot y' = 0, \quad y(0) = 0$
9. 1) $y' = 5 + \frac{y}{x},$	2) $y' \operatorname{ctg} x + y - 2 = 0, \quad y(0) = 1$
10. 1) $y' = \frac{x + y}{x - y},$	2) $\sin y \cdot \cos x dy = \cos y \sin x dx, \quad y(0) = \frac{\pi}{4}$

11-20. Найти общее решение дифференциальных уравнений второго порядка.

11. 1) $y'' = 4 + \frac{y'}{x},$	2) $y'' - 6y' + 4y = 0$
12. 1) $y'' + 2y' = 4x^2,$	2) $y'' + 2y' + 10y = 0$
13. 1) $y'' - y' \operatorname{ctg} x = \sin x,$	2) $y'' - 4y' - 5y = 0$
14. 1) $y'' + y' = \cos x,$	2) $y'' + 6y' + 13y = 0$
15. 1) $xy'' - 2y' = 2x^4,$	2) $y'' - 2y' + y = 0$
16. 1) $xy'' - y' - x^2 = 0,$	2) $y'' - 4y' + 3y = 0$
17. 1) $y'' = y' + x^2,$	2) $y'' + 2y' + y = 0$
18. 1) $y'' = \frac{y'}{x} + 2x,$	2) $2y'' + 7y' = 0$
19. 1) $xy'' + y' = 3x^3,$	2) $y'' - 7y' + 3y = 0$
20. 1) $xy'' - y' = x^2 \cos x,$	2) $y'' + 6y' = 0$

21-30. По пункту а) Найти общее решение дифференциального уравнения второго порядка и выделить частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0'$. По пункту б) Решить систему дифференциальных уравнений двумя способами: 1) методом исключения; 2) с помощью характеристического уравнения.

21а. а) $y'' + y' = -\sin 2x, \quad y(\pi) = 0, \quad y'(\pi) = 1$

б)
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 4y. \end{cases}$$

$$22a) y'' - 3y' = xe^{-x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

$$б) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 4y \\ \frac{dy}{dt} = 2x + 3y \end{cases}$$

$$23a) y'' - y' = 2(1 - x^2), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$$

$$б) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x + 4y \\ \frac{dy}{dt} = -2x + 11y \end{cases}$$

$$24a) y'' - 2y' + y = x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2$$

$$б) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 4y \\ \frac{dy}{dt} = x + y \end{cases}$$

$$25a) y'' - 4y' + 3y = xe^{3x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

$$б) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + y \\ \frac{dy}{dt} = x + 3y \end{cases}$$

$$26a) y'' + 2y = x + 2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$$

$$б) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 2y \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 6y \end{cases}$$

$$27a) y'' + 2y' + 2y = \sin x, \quad y(\pi) = 1, \quad y'(\pi) = 1$$

$$б) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -3x - 4y \\ \frac{dy}{dt} = -2x - 5y \end{cases}$$

$$28a. y'' - 3y' + 2y = 2e^{3x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$$

$$б. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y \\ \frac{dy}{dt} = y - x. \end{cases}$$

$$29a. y'' + y = -\sin 3x, \quad y(\pi) = 1, \quad y'(\pi) = 1$$

$$б. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 3y \\ \frac{dy}{dt} = x + 5y \end{cases}$$

$$30a. y'' + 3y' + 2y = 3x + 1 \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

$$б. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 6x + y \\ \frac{dy}{dt} = 5x + 2y. \end{cases}$$

РАЗДЕЛ: «Ряды».

Кратные и криволинейные интегралы.

31-40. Исследовать сходимость числовых рядов. В п.2 исследовать ряд на абсолютную сходимость.

$$31. 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n} \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2 + 6}$$

$$32. 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n-1}{7n+6} \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n \cdot 3^n}$$

$$33. 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{4n-5}$$

$$34. 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{2n^2 + 1} \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{2^n}$$

$$35. 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n!} \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n^2 + 7}$$

$$36. 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{3^n} \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n+6}}$$

$$37. 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 6n} \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+2}{3^n}$$

$$38. 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)4^n}$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{n^3+1}$$

$$39. 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{6^n}$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{3n+5}}$$

$$40. 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n}$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{4+n^2}$$

41-50. а) Найти область сходимости степенного ряда.

$$41. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{\sqrt{n+2}}$$

$$42. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{\sqrt{n}}$$

$$43. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n(n+1)}$$

$$44. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{5^{n-1}}$$

$$45. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{nx^n}{2^n}$$

$$46. \sum_{n=1}^{\infty} 3^n x^n$$

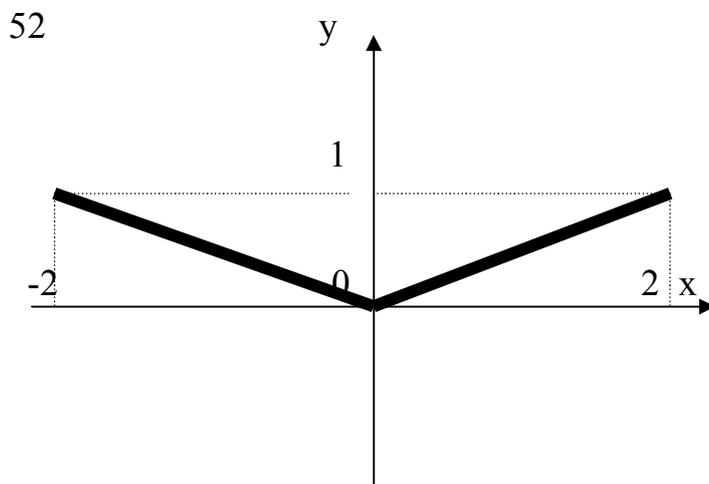
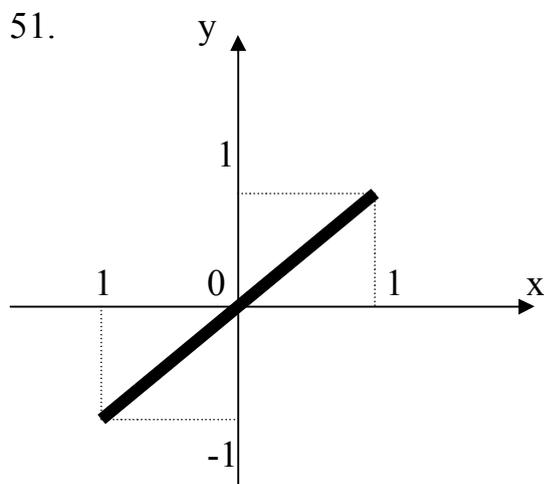
$$47. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n^2}$$

$$48. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2+3}$$

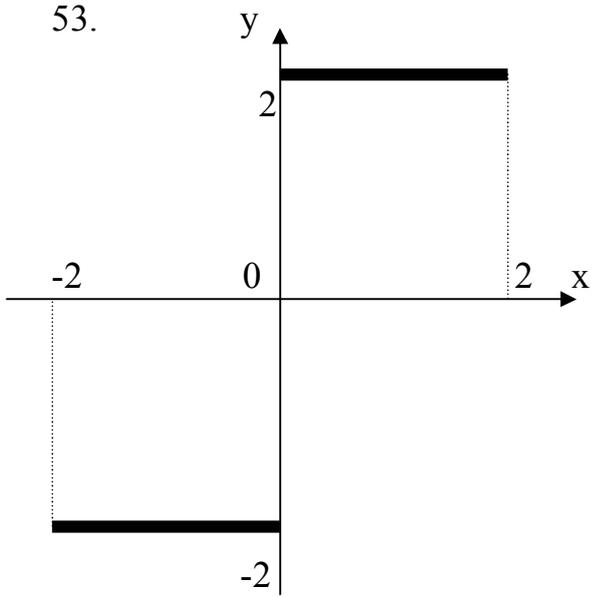
$$49. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n3^n}$$

$$50. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n\sqrt{n}}$$

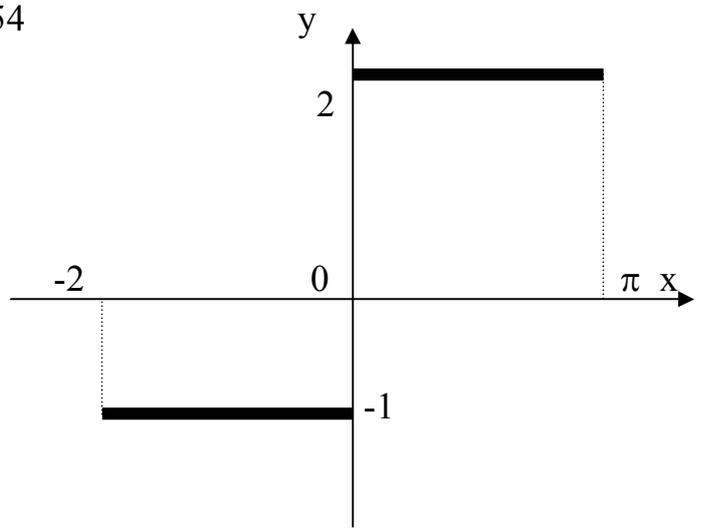
51-60. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$ периода $2L$, заданную графически на интервале- периоде.



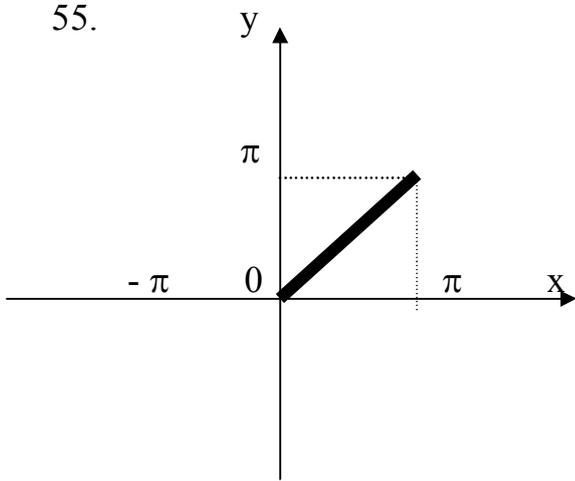
53.



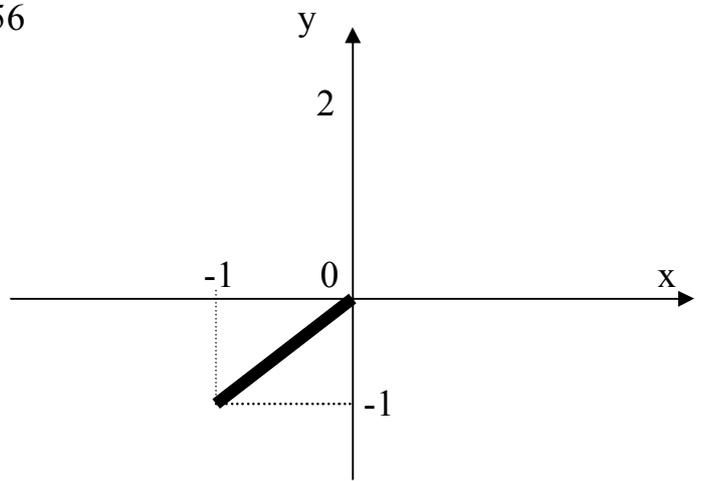
54



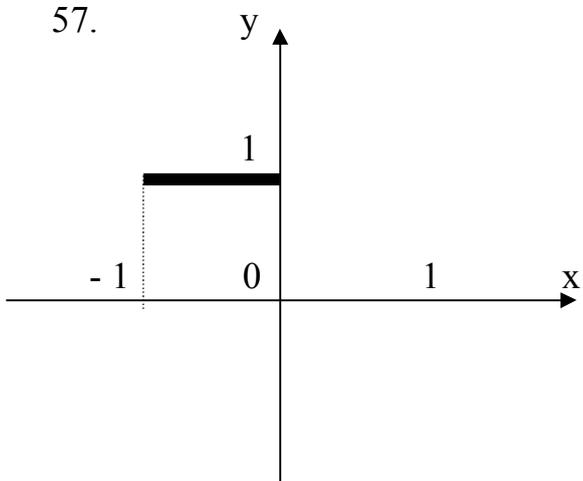
55.



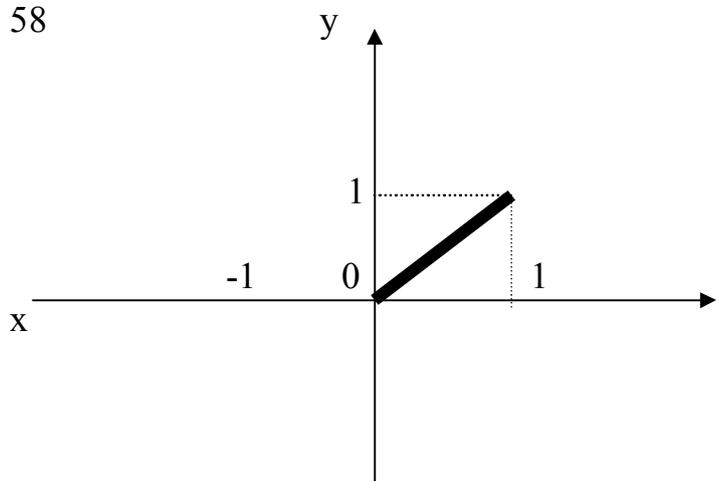
56



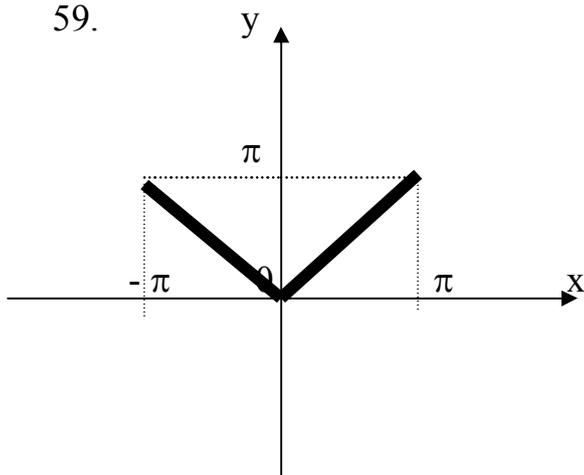
57.



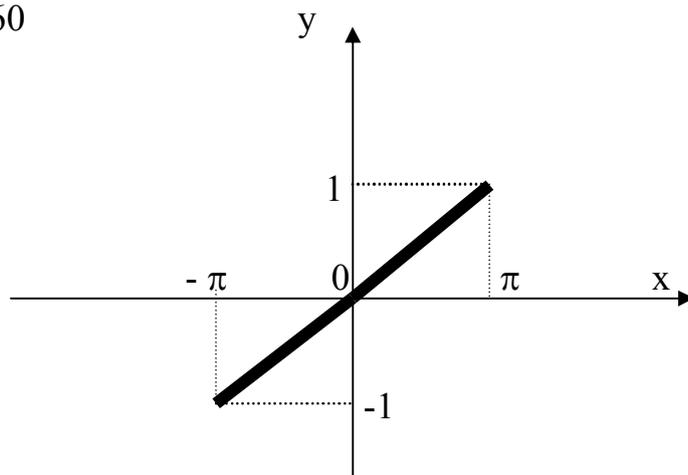
58



59.



60



61-70. Вычислить кратные интегралы.

61.
$$\int_1^2 dx \int_0^2 dy \int_0^{y^2} (x^2 + y) dz$$

62.
$$\int_0^1 dx \int_1^2 dy \int_0^y (z + x^3) dz$$

63.
$$\int_1^4 dx \int_0^2 dy \int_0^{\sqrt{y}} x^2 z dz$$

64.
$$\int_0^2 dx \int_1^2 dy \int_y^{y^3} xy dz$$

65.
$$\int_0^1 dx \int_2^3 dy \int_0^{y-x} xz dz$$

66.
$$\int_{-x}^1 dx \int_0^2 dy \int_y^2 (x^2 + z) dz$$

67.
$$\int_0^1 dx \int_x^{x^2} dy \int_1^4 (x^2 + y) dz$$

68.
$$\int_2^4 dx \int_0^1 dy \int_{x-1}^{\sqrt{x}} y^2 dz$$

69.
$$\int_0^1 dx \int_0^x dy \int_1^4 (y - z^2) dz$$

70.
$$\int_2^5 dx \int_{x^2-1}^{2x} y dy \int_1^5 z dz$$

71-80. Найти объем тела, ограниченного заданными поверхностями. Данное тело и область интегрирования изобразить на чертеже.

71. $x^2 + y^2 = 9, \quad z = 0, \quad z = 1 + x^2 + y^2$

72. $z = 0, \quad z = 9 - x^2 - y^2$

73. $z = x^2 + y^2, \quad z = 4$

74. $z = 5, \quad z = 1 + x^2 + y^2$

75. $z = 0, \quad z = x^2 + y^2 - 4$

76. $x^2 + y^2 = 1, \quad z = 0, \quad x + z = 4$

$$77. x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad x + y = 2, \quad x + y + z = 5$$

$$78. y = x^2, \quad z = 0, \quad z = 2, \quad y = 2$$

$$79. z = 4, \quad z = x^2 + y^2$$

$$80. x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad 3x - y + 3z = 0$$

81-90. В задачах даны криволинейный интеграл $\int P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ и три точки $O(0;0)$, $A(3;0)$, $B(3;9)$. Вычислить интеграл от точки O до точки B по трем различным путям: 1) по ломанной OAB ; 2) по прямой OB ; 3) по дуге OB параболы $y = x^2$. Полученные результаты сравнить и объяснить их совпадение.

$$81. \int_0^B (x - y)dx - (x - 4y)dy$$

$$82. \int_0^B (3 + xy)dx + \left(\frac{x^2}{3} - y\right)dy$$

$$83. \int_0^B (x^3 - 4y)dx - (6x - 5)dy$$

$$84. \int_0^B (3x - 4y)dx - (2x - 3y)dy$$

$$85. \int_0^B (3 + xy^2)dx + (x^2y - 6y^2)dy$$

$$86. \int_0^B (2x - 3y)dx - (4x + y)dy$$

$$87. \int_0^B (1 + 6xy)dx + (x^2 - 3y)dy$$

$$88. \int_0^B (6x^2 - y)dx - (x + 4y)dy$$

$$89. \int_0^B (5x - 9y)dx - (2x - 3y)dy$$

$$90. \int_0^B (9x^2 - y)dx + (1 - x)dy$$

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА КУРСА «ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА»

I. Линейная алгебра и аналитическая геометрия

1. Линейная алгебра

1. Матрицы и действия над ними.
2. Определители 2-го и 3-го порядка. Понятие определителя N -го порядка. Свойства определителей.
3. Ранг матрицы. Обратная матрица.
4. Системы алгебраических уравнений: основные понятия, условия совместности системы уравнения (теорема Кронекера-Капелли), точные методы решения (Крамера, матричный, Гаусса).

2. Векторная алгебра

1. Прямоугольные и полярные координаты на плоскости. Прямоугольные, цилиндрические и сферические координаты в пространстве. Преобразования. Координат (параллельный перенос и поворот осей).
2. Понятие и виды векторов (коллинеарные, равные, компланарные и т.д.). Линейные операции над векторами их свойства.
3. Базис. Координаты вектора. Разложение вектора по базисным векторам. Выражение операций над векторами и их приложений в координатной форме. Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов, их свойства и приложения; условия коллинеарности и ортогональности 2-х векторов, площадь параллелограмма, объем параллелепипеда.

3. Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве

1. Уравнение линии на плоскости. Параметрические уравнения линий. Различные виды уравнений прямой на плоскости. Некоторые задачи на прямую: определение угла между прямыми, условия параллельности и перпендикулярности, расстояние от точки до прямой.
2. Кривые второго порядка: окружность, эллипс, гипербола, парабола. Полярные и параметрические уравнения кривых 2-го порядка.
3. Уравнение поверхности. Примеры поверхностей и их уравнения. Различные виды уравнений плоскости. Взаимное расположение 2-х плоскостей.
4. Уравнение линий в пространстве. Прямая линия: виды уравнений, взаимное расположение прямых, прямой и плоскости.
5. Цилиндрические и конические поверхности.
6. Поверхности 2-го порядка: эллипсоид, гиперболоиды, параболоиды и т.д.

II. Математический анализ

4. Введение в математический анализ

1. Множества вещественных чисел. Числовые последовательности. Предел последовательности.
2. Функция. Способы задания (для аналитического способа рассмотреть случаи явного, неявного и параметрического задания). Основные элементарные функции и их графики. Сложная функция.
3. Предел функции в точке и бесконечности. Односторонние пределы. Свойства пределов. Признаки существования пределов. Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Связь между ними. Сравнение бесконечно малых функций. Замечательные пределы. Число e . Натуральные логарифмы.
4. Непрерывность функции в точке и на интервале. Разрывы функции и их классификация. Свойства непрерывных функций. Непрерывность элементарных функций. Свойства функций, непрерывных на отрезке: ограниченность, существование наименьшего и наибольшего значений, существование промежуточных значений.

5. Дифференциальное исчисление функции одной переменной

1. Производная функции, ее геометрический и механический смысл. Таблица производных основных элементарных функций. Непрерывность и дифференцируемость.
2. Правила дифференцирования суммы, произведения, отношения функций. Дифференцирование сложной, неявной и параметрически заданной функцией.
3. Дифференциал, его связь с производной, геометрический смысл и применения.
4. Производные и дифференциалы высших порядков.
5. Теоремы Ролля, Лагранжа, Коши и их применение.
6. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа; ее приложения. Представление функций: e^x , $\cos x$, $\sin x$, $\ln x$, $(1+x)^h$ по формуле Тейлора.

6. Исследование функций с помощью производных

1. Условия возрастания и убывания функций. Экстремумы функций. Необходимое условие экстремума. Достаточное условие существования экстремума. Отыскивание наибольшего и наименьшего значений непрерывной на отрезке функции.
2. Исследование функций на экстремум с помощью производных высших порядков. Исследование функций на выпуклость и вогнутость. Точки перегиба. Асимптоты кривых. Общая схема построения графиков функций.

7. Функции нескольких переменных

1. Функции нескольких переменных. Область определения. Предел функции. Непрерывность.
2. Частные производные. Полный дифференциал и его связь с частными производными. Инвариантность формы полного дифференциала. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Геометрический смысл полного дифференциала.
3. Частные производные и полные дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора. Частные производные неявной функции.
4. Экстремум функции нескольких переменных. Необходимое условие экстремума, достаточные условия.
5. Условный экстремум.

8. Неопределенный интеграл

1. Первообразная. Неопределенный интеграл, его свойства. Таблица основных формул интегрирования. Непосредственное интегрирование. Интегрирование по частям и подстановкой.
2. Интегрирование рациональных функций путем разложения на простейшие дроби. Интегрирование выражений, содержащих тригонометрические функции. Интегрирование некоторых иррациональных выражений. Использование таблиц интегралов.

9. Определенный интеграл

1. Задачи, приводящие к понятию определенных интегралов. Определенный интеграл как предел интегральных сумм. Основные свойства определенного интеграла.
2. Производная интеграла по верхнему пределу. Формула Ньютона-Лейбница.
3. Вычисление определенного интеграла: интегрирование по частям и подстановкой.
4. Приложение интегралов к вычислению площадей плоских фигур, длин дуг кривых, объемов тел и площадей поверхности вращения. Физические приложения определенного интеграла.
5. Несобственные интегралы с бесконечными пределами. Несобственные интегралы от ограниченных функций, основные свойства. Абсолютная и условная сходимости. Признак сходимости.

10. Обыкновенные дифференциальные уравнения

1. Физические задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям. Дифференциальные уравнения первого и второго порядков. Понятие общего и частного решения. Задача Коши. Теорема существования и единственность решения задачи Коши. Понятие об особых решениях дифференциальных уравнений. Основные классы уравнений, интегрируемых в квадратурах.
2. Дифференциальные уравнения высших порядков. Задача Коши. Понятие о краевых задачах для дифференциальных уравнений. Уравнения, допускающие понижение порядка.
3. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Уравнения с правой частью специального вида.
4. Метод вариация произвольных постоянных и подбора.
5. Задача Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений. Теорема существования и единственности решения задачи Коши. Метод исключения. Векторно-матричная запись нормальной системы. Структура общего решения.
6. Нормальные системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Решение в случае простых корней характеристического уравнения.

11. Числовые ряды

1. Числовые ряды. Сходимость и сумма ряда. Необходимое условие сходимости. Действия с рядами.
2. Ряды с положительными членами. Достаточные признаки сходимости.
3. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимости. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница.

12. Функциональные ряды

1. Область сходимости. Понятие равномерной сходимости. Признак Вейерштрасса. Свойства равномерно сходящихся рядов.

2. Степенные ряды. Теорема Абеля. Радиус сходимости. Свойства степенных рядов.
3. Разложение функций в степенные ряды. Ряд Тейлора и Маклорена. Применение степенных рядов к приближенным вычислениям.

13. Ряды Фурье

1. Тригонометрическая система функций. Ряд Фурье. Разложение функции в ряд Фурье. Формулировка условий разложимости в случае равномерной сходимости.
2. Ряд Фурье для четных и нечетных функций.

14. Кратные и криволинейные интегралы

1. Задачи, приводящие к понятию кратного интеграла. Двойные и тройные интегралы, их основные свойства. Представление об интегралах любой кратности.
2. Вычисление двойных и тройных интегралов в декартовых координатах.
3. Замена переменных в кратных интегралах. Переход от декартовых координат к полярным, цилиндрическим и сферическим координатам.
4. Применение кратных интегралов для вычисления объемов, площадей, для решения задач физики и техники.
5. Задачи, приводящие к криволинейным интегралам. Определения криволинейных интегралов первого и второго рода, их основные свойства и вычисление. Геометрические и механические приложения. Связь между криволинейными интегралами первого и второго рода.

Библиографический список

Учебники

1. Шнейдер В.Б., Слуцкий А.И., Шумов А.С. Краткий курс высшей математики. М.: Высшая школа, 1978, ч. I, II.
2. Игнатьева А.Е., Краснощекова Т.И., Смирнов В.Ф. Курс высшей математики. М.: Высшая школа, 1972, ч. I, II
3. Карасев А.И., Аксютин З.М., Савельев Т.Н. Курс высшей математики для экономических вузов. М.: Наука, 1982, ч. I, II.
4. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. М.: Наука, 1975.
5. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. М.: Наука, 1970-1987, т. 1, 2.

6. Бугров Я.С., Никольский С.М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. М.: Наука, 1980, 1984 и т.д.
7. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М.: Наука, 1980, 1984 и т.д.
8. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальное и интегральное исчисление. М.: Наука, 1980.

Задачники и руководства

9. Данко П.Б., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. М.: Высшая школа, 1986, ч. I, II.
10. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике. М.: Наука, 1987.
11. Кручкович Г. И. и др. Сборник задач по курсу высшей математики/ Под ред. Кручкович Г. И. М.: Высшая школа, 1970.
12. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу. Для вузов. М.: Высшая школа, 1966.
13. Каплан И. А. Практические занятия по высшей математике, ч. I, II. Харьков: ХГУ, 1971
14. Лихолетов И.И., Мацкевич И.П. Руководство к решению задач по высшей математике, теории вероятностей и математической статистике. Минск: Высшая школа, 1976.
15. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям: Учебное пособие для вузов. М.: Высшая школа, 1978.

Справочники

16. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов. М.: Высшая школа, 1978.
17. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. М.: Наука, 1977 и т.д.

ВНИМАНИЕ! Студенту нет необходимости приобретать все учебники и задачники из приведенных в списке. Достаточно одного-двух сходных по названию. Во всех случаях необходимую помощь может оказать справочная литература.

По всем разделам курса высшей математики на кафедре имеется методические разработки для студентов.