**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ**

**КЫРГЫЗСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ им. И. Раззакова**

Кафедра Прикладная математика

ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Методическое руководство для самостоятельной работы студентов второго курса по дисциплине «**Прикладная математика**».

Бишкек 2011

Рассмотрены	Утверждены
на заседании кафедры	на заседании методической комиссии
Прикладной математики	факультета информационных технологий
Прот. № 9 от 26.05.2011	Прот. № 8 от 10.05..2011г.

УДК 517.5

Составители: ДЖАНАЛИЕВ Н.Р., АБДЫЛДАЕВА А.Р.

Функции комплексного переменного. Методическое руководство для организации самостоятельной работы студентов всех специальностей / КГТУ им. И.Раззакова; Сост.: Джаналиев Н.Р., Абдылдаева А.Р. Бишкек, 2011. – С. 40

Цель данной работы - оказание помощи студентам в освоении курса теории функций комплексного переменного. В методическом руководстве даются основные теоретические сведения об элементах теории функций комплексного переменного, приводятся образцы решения задач. Предназначено для самостоятельной работы студентов.

Рецензент к.т.н., проф. Иманалиев З.К.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящем методическом руководстве излагаются основные понятия теории функции комплексной переменной. Понятие комплексного числа возникло в первую очередь в результате потребностей автоматизации вычислений. Даже простейшие алгебраические операции над действительными числами выводят за пределы области действительных чисел. Как известно, не всякое алгебраическое уравнение может быть разрешено в действительных числах. Тем самым надо или отказаться от автоматического применения установленных методов решения и каждый раз проводить подробное исследование возможности их применения, или расширить область действительных чисел с тем, чтобы основные алгебраические операции всегда были выполнимы. Таким расширением области действительных чисел являются комплексные числа. Обстоятельный анализ свойств функций немыслим без выхода в комплексную область.

Например, функция $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ бесконечно дифференцируема во всех точках числовой оси, а ее ряд Тейлора $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-\ldots$ перестает сходиться при $|x|\geq 1$. Причину этого нельзя понять, оставаясь в действительной области. Но выход в комплексную область сразу разъясняет явление: на окружности $|x|=1$ лежат точки $x=\pm\sqrt{-1}$, в которых функция обращается в бесконечность, из-за них ряд перестает сходиться.

Алгебраически замкнутое поле комплексных чисел является единственно возможным расширением поля действительных чисел с сохранением алгебраических свойств. Переход к рассмотрению функций комплексного переменного необходим и естественен, здесь удается построить анализ, столь же полный и стройный, как анализ функций действительного переменного.

Переход к комплексному анализу дает возможность глубже изучить элементарные функции и установить интересные связи между ними.

Начальные идеи комплексного анализа возникли во второй половине XVIII века, и связаны они прежде всего с именем Леонарда Эйлера. Основной массив теории был создан в XIX веке, главным образом трудами О.Коши, Б.Римана, К.Вейерштрасса. В настоящее время, классическая часть комплексного анализа – теория функций одного комплексного переменного – приобрела уже вполне совершенный вид.

1. Комплексные числа

Рассмотрим квадратное уравнение $x^2 - 4x + 8 = 0$. Очевидно, используя формулу алгебры, его решением будут числа $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2}$, то есть $x_{1,2} = 2 \pm 2 \cdot \sqrt{-1}$, которые не могут быть представлены никаким действительным числом. Чтобы сделать квадратное уравнение разрешимым при всяких значениях коэффициентов, необходимо расширить понятие о числе, введя вместе с действительными числами более обширный класс чисел комплексных.

Введем символ $i = \sqrt{-1}$, определяемый тем условием, что его квадрат $i^2 = -1$. Этот символ будем называть **мнимой единицей**. Используя обозначение мнимой единицы, решение рассмотренного выше уравнения запишется в виде: $x_{1,2} = 2 \pm 2i$. Таким образом, на множестве комплексных чисел любое квадратное уравнение будет иметь решение.

Мнимое число вводится условно и с ним производят такие же действия, как и с действительными. Введение мнимых чисел позволяет обобщить многие математические выводы.

Множеством комплексных чисел будем называть множество ***С***, состоящее из всех чисел вида $a + в \cdot i$, где a и $в$ – действительные числа.

Комплексной переменной называют выражение вида $z = x + iy$, где x и y – вещественные переменные, которые называются соответственно действительной и мнимой частью комплексного числа z. Они символически обозначаются

$$x = Re\, z; \qquad y = Jm\, z.$$

Числа $z = iy$, в которых вещественная часть равна нулю, называются *мнимыми числами*.

Комплексное число $z = x + iy$ можно записать в виде упорядоченной пары $(x;\ y)$. Так, между множеством комплексных чисел z и множеством точек на плоскости с координатами $(x;\ y)$ существует взаимно однозначное соответствие.

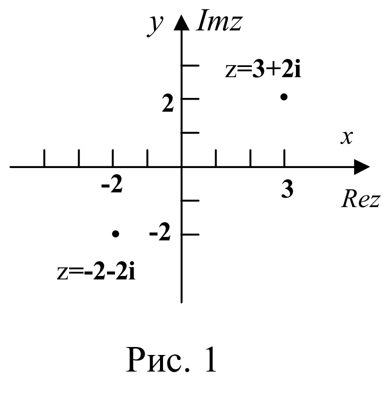


Рис. 1

Комплексные числа $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$, отличающиеся только знаками мнимых частей, называются *комплексно сопряжёнными*.

Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называются равными $z_1 = z_2$, если равны их действительные и мнимые части, то есть $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$.

Введем основные алгебраические операции на множестве комплексных чисел:

✓ _Сложение._ При сложении комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ складываются отдельно действительные и мнимые части комплексных чисел $z = z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$.

Аналогично вводится _разность_: $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$.

✓ _Произведением_ комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называется комплексное число, полученное, как при обыкновенном раскрытии скобок при умножении многочленов (с учетом равенства $i^2 = -1$)

$$z = z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) + i(x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1).$$

Очевидно, произведение комплексно сопряженных чисел не содержит мнимой единицы и является вещественным числом: $z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$. Используя это, введем операцию деления:

✓ _Деление._ При делении комплексного числа $z_1 = x_1 + iy_1$ на $z_2 = x_2 + iy_2$, уничтожают мнимость знаменателя, это достигается умножением числителя и знаменателя на комплексно сопряженное знаменателя. При этом получается комплексное число $z = x + iy$, для которого $z_2 \cdot z = z_1$. При $z_2 \neq 0$ частное z всегда существует:

$$z = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x^2{}_2 + y^2{}_2} + i\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x^2{}_2 + y^2{}_2}.$$

Пример. $z = \frac{1}{i} = \frac{1}{i} \cdot \frac{-i}{-i} = \frac{-i}{-i^2} = -i$.

Для последних операций удобнее тригонометрическая форма комплексного числа, которая получается переходом к полярным координатам. Известно, что связ декартовых и полярных координат определяется системой:

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos\varphi \\ y = r \cdot \sin\varphi \end{cases}.$$

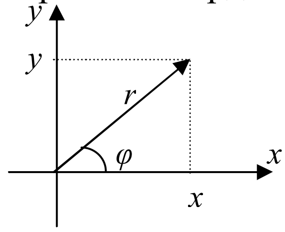


Рис. 2

Тогда $z = x + iy = r \cdot \cos\varphi + r \cdot \sin\varphi$,

то есть $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Это выражение называется тригонометрической формой комплексного числа, а выражение $z = x + iy$ – алгебраической формой комплексного числа. Величины r и φ называются, соответственно, модулем и аргументом комплексного числа, их обозначают $r = |z|; \quad \varphi = Argz.$

Очевидно (из рис. 2), модуль и аргумент связаны выражениями:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad \varphi = arctg\,\frac{y}{x}.$$

Модуль комплексного числа определяется однозначно, а аргумент комплексного числа имеет бесконечное количество значений, отличающиеся друг от друга на слагаемое, кратное 2π. При $z = 0$ значение $Argz$ не определено. Из множества значений $Argz$ $(z \neq 0)$ выделяют одно значение, заключенное в интервале $]-\pi, \pi[$, которое называют главным значением аргумента и обозначают $\arg z$. То есть $Argz = \arg z + 2\pi k, \quad k = 0; \quad \pm 1; \quad \pm 2;....$ Причём:

$$\arg z = \begin{cases} arctg\,\frac{y}{x}, & если \quad x > 0, \\ \pi + arctg\,\frac{y}{x}, & если \quad x < 0, y \geq 0 \\ -\pi + arctg\,\frac{y}{x}, & если \quad x < 0, y < 0 \\ \frac{\pi}{2}, & если \quad x = 0, \quad y > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & если \quad x = 0, \quad y < 0 \end{cases}$$

В тригонометрическом виде, если обозначить $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, то, используя формулы тригонометрии, легко можно получить выражения

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2\left[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right],$$

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right].$$

Комплексно сопряженные числа имеют один и тот же модуль, а значения их аргументов различаются знаком.

Используя известную формулу **Эйлера**

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi,$$

получим так называемую показательную форму комплексного числа:

$$z = re^{i\varphi}$$

Из этих формул определим следующие действия над числами:

✓ <u>*Натуральная степень*</u> n комплексного числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ есть комплексное число, вычисляемое по следующей формуле:

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

То есть, чтобы возвести комплексное число в целую положительную степень *n*, достаточно возвести в эту степень модуль, а аргумент умножить на показатель степени.

Если в этой формуле положить r=1, то получим формулу **Муавра**:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$$

✓ Число ω называется *корнем натуральной степени* *n* из числа *z*, если

$$\omega^n = z$$

Определим выражение для вычисления корней.

Пусть $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $\omega = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$, тогда $\rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Отсюда получим равенство модуля и аргумента:

$$\rho^n = r; \quad n\theta = \varphi + 2\pi\kappa, \text{ при различных } \quad k = 0; \ \pm 1; \ \pm 2;....$$

Тогда $\rho = \sqrt[n]{r}$; $\theta = \dfrac{\varphi + 2\pi\kappa}{n}$ и, следовательно:

$$\omega = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi\kappa}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi\kappa}{n}\right).$$

Точки на комплексной плоскости, соответствующие значениям $\sqrt[n]{z}$, при различных *k*, расположены в вершинах правильного *n*-угольника, вписанного в окружность радиуса $R = \sqrt[n]{|z|} = \sqrt[n]{r}$, с центром в начале координат. Соответствующие значения корней получатся, если принимать значения $k = 0, \ 1, \ 2,....,n-1$.

Пример 1. Найти $z_1 = (\sqrt{3} - i)^3$.

<u>Решение</u>: Модуль данного числа $r = \sqrt{3+1} = 2$; $x > 0, \quad y < 0$ поэтому

$$\varphi = arctg(-\frac{1}{\sqrt{3}}) = -\frac{\pi}{6}.$$

Комплексное число $z = \sqrt{3} - i$ в тригонометрической форме запишется в виде $z = 2[\cos(-\dfrac{\pi}{6}) + i\sin(-\dfrac{\pi}{6})$. Возведём данное число в третью степень.

$$z_1 = z^3 = 2^3[(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}]^3 = 8(\cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2}) = -8i.$$

Пример 2. Найти все значение корня $\sqrt[4]{-1 - i\sqrt{3}}$ и построить их на комплексной плоскости.

<u>Решение</u>: Найдём модуль и аргумент комплексного числа: $r = |z| = \sqrt{1+3} = 2$, так как x<0, y<0, то

$$\varphi = arctg\ \left(\frac{-\sqrt{3}}{-1}\right) + (-\pi) = arctg\ \sqrt{3} - \pi = \frac{\pi}{3} - \pi = -\frac{2\pi}{3}.$$

Тогда $$\sqrt[4]{-1-i\sqrt{3}} = \sqrt[4]{2}\left(cos\frac{-\frac{2\pi}{3}+2\pi\kappa}{4} + i\sin\frac{-\frac{2\pi}{3}+2\pi\kappa}{4} \right).$$

Полагая к= 0, 1, 2, 3, найдём все корни:

При к=0:

$$z_0 = \sqrt[4]{2}\left(cos\frac{-\frac{2\pi}{3}}{4} + i\sin\frac{-\frac{2\pi}{3}}{4} \right) = \sqrt[3]{2}\left[cos(-\frac{\pi}{6}) + i\sin(-\frac{\pi}{6}) \right] = \sqrt[4]{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2} \right),$$

При к=1:

$$z_1 = \sqrt[4]{2}\left(cos\frac{-\frac{2\pi}{3}+2\pi}{4} + i\sin\frac{-\frac{2\pi}{3}+2\pi}{4} \right) = \sqrt[4]{2}\left[cos(\frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{3}) \right] = \sqrt[4]{2}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right),$$

При к=2:

$$z_2 = \sqrt[4]{2}\left(cos\frac{-\frac{2\pi}{3}+4\pi}{4} + i\sin\frac{-\frac{2\pi}{3}+4\pi}{4} \right) = \sqrt[4]{2}\left[cos(\frac{5\pi}{6}) + i\sin(\frac{5\pi}{6}) \right] = \sqrt[4]{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \right),$$

При к=3:

$$z_3 = \sqrt[4]{2}\left(cos\frac{-\frac{2\pi}{3}+6\pi}{4} + i\sin\frac{-\frac{2\pi}{3}+6\pi}{4} \right) = \sqrt[4]{2}\left[cos(\frac{4\pi}{3}) + i\sin(\frac{4\pi}{3}) \right] = \sqrt[3]{2}\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right),$$

При умножении двух комплексных чисел их ***модули перемножаются*** (растяжение или сжатие), а ***аргументы складываются*** (поворот на плоскости). Пусть $z_1=a_1+ib_1=r_1e^{i\alpha}$; $z_2=a_2+ib_2=r_2e^{i\beta}$; $z_1 \cdot z_2=r_1r_2e^{i(\alpha+\beta)}$ => $|z_1z_2|=|z_1||z_2|$; $\arg(z_1\ z_2)=\arg z_1+ \arg z_2$.

При делении двух комплексных чисел их ***модули делятся*** (модуль знаменателя $\neq 0$), а ***аргументы вычитаются***: $z_1/z_2=(r_1/r_2)e^{i(\alpha-\beta)}$ => $z_1/z_2|=|z_1|/|z_2|$; $\arg(z_1/z_2)=\arg z_1- \arg z_2$.

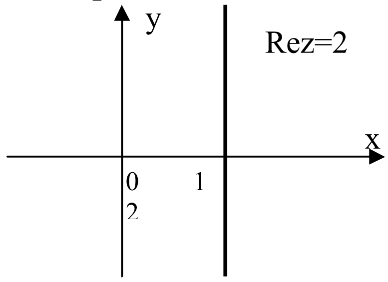
Алгебраической формой записи комплексных чисел удобно пользоваться при операциях сложения и вычитания, а показательной- при умножении, делении, возведении в целую степень, извлечении целого корня (возведение в рациональную степень).

2. Линии и области на комплексной плоскости

Так как комплексным числам можно поставить в соответствие точки на комплексной плоскости, то рассмотрим, какое же множество точек на плоскости z задают некоторые основные уравнения и неравенства.

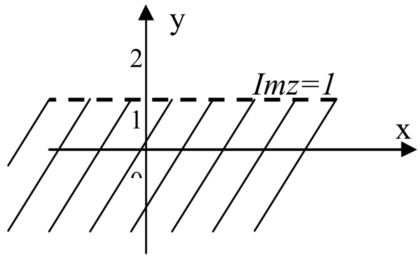
1). *Re z=2.*

По определению *Re z=x,* то есть вещественная часть *x=2*. Это все числа вида *z=2+iy*. Значит множество точек прямой, параллельной оси *OУ*.



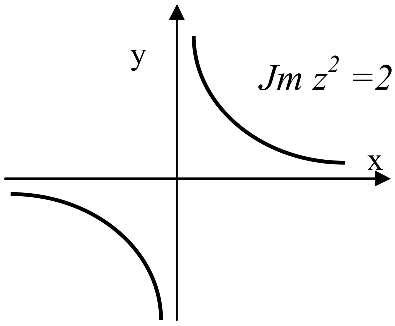
2). *Jm z* <1.

Строим границу области, определяемую равенством *Jm z* =1. Ту часть полуплоскости, где мнимая часть y<1 штрихуем. Так как неравенство строгое, границу не учитываем (рисуем пунктиром).



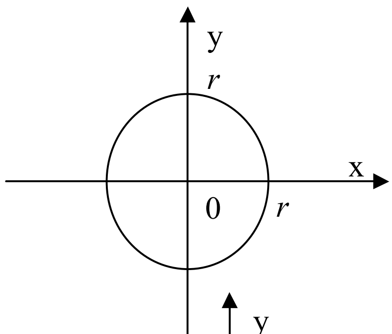
3). $Jm\ z^2 = 2$.

Так как $z = x + iy$, то имеем $z^2=(x+iy)^2=x^2-y^2+2xyi$, то есть $Jm\ z^2=2xy$. Поэтому $2xy=2$, и, следовательно, $y=1/x$ – уравнение гиперболы.



4). $|z| = r$.

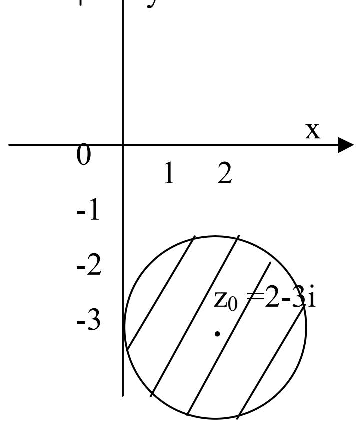
Так как по определению модуля комплексного числа $|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$, то $x^2 + y^2 = r^2$ - уравнение окружности с центром в начале координат и радиусом r.



В частности, уравнение $|z - z_0| = r$ определяет окружность с центром в точке z_0.

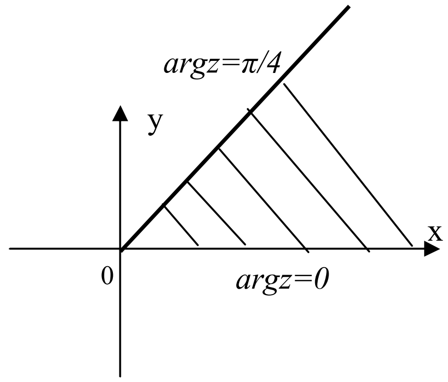
5). $|z - 2 + 3i| \le 2$.

Строим границу области, определяемую равенством $|z - 2 + 3i| = 2$. Распишем равенство: $|z - 2 + 3i| = |z - (2 - 3i)| = 2$. Очевидно, это окружность с центром в точке $z_0 = 2 - 3i$ и



радиусом r=2. Неравенство определяет область внутри окружности.

6). $0 \le \arg z \le \dfrac{\pi}{4}$.



По определению аргумента, это угол между осью ОХ и радиус-вектором комплексного числа. Значит, это двойное неравенство дает все углы от 0 до $\dfrac{\pi}{4}$, которые определяют бесконечную, заштрихованную на рисунке, область.

3. Последовательности комплексных чисел

Определение *Последовательностью комплексных чисел* называют перенумерованное бесконечное множество комплексных чисел.

Обозначают последовательность символом: $\{z_n\}$.

Определение. Комплексное число z называется *пределом последовательности* $\{z_n\}$, если для любого положительного $\varepsilon > 0$ можно указать такой номер $N(\varepsilon)$, начиная с которого все элементы z_n этой последовательности удовлетворяют неравенству

$$|z - z_n| < \varepsilon \qquad \text{для всех} \quad n \ge N(\varepsilon).$$

Последовательность $\{z_n\}$, имеющая предел z называется сходящейся к числу z и записывается в виде $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$. Обозначения: $\{z_n\} \to z$;

Поскольку каждое комплексное число $z_n=a_n+ib_n$ характеризуется парой действительных чисел a_n и b_n, то последовательности комплексных чисел $\{z_n\}$ соответствует одновременное задание двух действительных последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$, составленные из действительных и мнимых частей элементов z_n.

Теорема 1. Необходимым и достаточным условием сходимости последовательности $\{z_n\}$ является требование сходимости последовательностей действительных чисел $\{a_n\} \to a$; и $\{b_n\} \to b$. Тогда $\{z_n\} \to z = a+ib$.

Определение. Последовательность $\{z_n\}$ называется ***ограниченной***, если существует такое $A>0$, что для всех элементов z_n этой последовательности имеет место неравенство: $|z_n|<A$.
Любая сходящаяся последовательность ограничена. $\{z_n\}=\{a_n\}+i\{b_n\}$.

Теорема 2. Из всякой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Критерий Коши. Необходимым и достаточным условием сходимости $\{z_n\} \to z$ является требование, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ можно было указать такое $N(\varepsilon)$, что $|z_{n+m}-z_n| < \varepsilon$ для любого $n \geq N(\varepsilon)$ и любого номера $m>0$.

Неограниченно возрастающие последовательности .Если для любого числа $M>0$ существует номер $N(M)$, такой, что $|z_n| > M$ для всех номеров $n>N(M)$, то последовательность $\{z_n\}$ называется ***неограниченно возрастающей***.

Пример. $z_n=z^n$ при $|z|>1$.

В обычном смысле такие последовательности не сходятся, но оказывается удобным считать, что существует точка $z^{\infty}=\infty$, такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$. Это единственная **бесконечно удаленная точка** комплексной плоскости. Все неограниченно возрастающие последовательности сходятся к этой единственной точке.

Если $\{z_n\}$ неограниченно возрастающая, то $\{\lambda_n=1/z_n\} \to 0$. Отсюда легко получить правила арифметических действий с бесконечно удаленной точкой: $1/\infty = 0$; $1/0=\infty$; $z\cdot\infty = \infty$, при $z\neq 0$; $z+\infty = \infty$, $z/\infty = 0$, при $z\neq\infty$. Операции $0/0$ и ∞/∞ являются неопределенными.

4. Понятие функции комплексной переменной

Пусть на комплексной плоскости задано множество E и закон, ставящий в соответствие каждому числу z из E определенное комплексное число w: $z \to w$, тогда говорят, что на E задана ***функция комплексной переменной*** $f(z)=w$. Здесь E **-** *множество задания* f(z);

Множество M - значений соответствующих w **-** *множество значений* f(z). Задание f(z) есть задание соответствия (отображения) $E \to M$.

Примеры. а) $w=az+b$ (поворот, растяжение и параллельный перенос), б)$w=z^n$, в) $w=1/z$ (симметричное отражение относительно вещественной оси, инверсия).

Понятие области комплексной плоскости - это то же самое, что и понятие области на плоскости (x,y).

Определение. ***Областью*** G комплексной плоскости Z называется множество точек этой плоскости, удовлетворяющее условиям:

1) Все $z \in G$ являются внутренними точками g.

2) Любые точки $z_1, z_2 \in G$ можно соединить ломаной с конечным числом звеньев, состоящих только из точек $z \in G$.

Примеры. а) $|z|<1$ - область; б) $|z|\leq 1$ - не область.

Определение. Точка z_0 называется ***внутренней точкой*** множества G, если существует ε -окрестность точки z_0: $|z-z_0|<\varepsilon$, все точки которой принадлежат G.

Примеры. а) $z=0$ - внутренняя точка множества $|z|<1$; б) $z=i$ - не является внутренней точкой множества $|z|\leq 1$.

Таким образом, в определении области условие

1) означает, что G- *открытое* множество.

2) означает, что G- *связное* множество.

Итак, **область**- это открытое связное множество.

Определение. Точка z_0 называется *граничной точкой* множества G, если в каждой ее ε - окрестности имеются точки как $z \in G$, так и $z \notin G$.

Примеры. а) $z=0$ - граничная точка множества $|z|>0$; б) $z=i$ - граничная точка множества $|z|\leq 1$.

Совокупность граничных точек области G называется *границей* области G. (обозначения: ∂G, dG , S и т.д.).

Граница множества может состоять из конечного числа точек, и даже из одной точки (как, например, у множества $|z|>0$).

Определение. Замыкание области G, состоящее в присоединении к G ее границы ∂G называется *замкнутой областью* $\overline{G} = G + \partial G$.

Множество $|z|\leq 1$ - замкнутое.

На *расширенной комплексной плоскости* $\overline{C}$ (т.е. комплексной плоскости с бесконечно удаленной точкой) замкнутое множество называется *компактным.*

Функция $f(z)$ называется взаимно однозначной или однолистной, если она преобразует различные точки в различные, другими словами из равенства $f(z_1) = f(z_2)$ следует равенство $z_1 = z_2$ (для $z_1, z_2 \in M$).

Примеры. а) w=const, w=az+b -однозначные и однолистные; б) $w=z^n$, $w=e^z$- однозначные, но не однолистные; в) w=*Ln z*$f|z|$+i Arg(z), $w=\sqrt{z}$ - не однозначные функции.

Если $z=x+iy$, а $w = U + iV$, то задание функции $w = f(z)$ равносильно заданию двух вещественных функций *U(x,y)* и *V(x,y)* вещественных переменных, то есть $w = f(z) = U(x, y) + iV(x, y)$, где *U(x,y)* и *V(x,y)* – действительная и мнимая части функции $f(z)$.

Поэтому свойства функций комплексной переменной во многом определяются свойствами функции двух действительных переменных.

5. Непрерывность функции комплексной переменной

1. *Понятие предела функции* комплексной переменной в точке $z_0 \in G$.

Для определения предела функции, примем в точности то же определение, что и в вещественном анализе, так что все действия над комплексными функциями проводятся по тем же законам, как и над вещественными. В комплексный анализ автоматически переносятся элементарные теоремы о пределах функции в точке.

Определение 1. (по Гейне) Комплексное число w_0 называется *пределом* функции $f(z)$, $z \in G$, в точке $z_0 \in G$, если для любой последовательности $\{z_n\} \to z_0$, соответствующая последовательность сходится $\{f(z_n)\} \to w_0$.

Определение 2. (по Коши) Комплексное число w_0 называется *пределом* функции $f(z)$, $z \in G$, в точке $z_0 \in G$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует окрестность $\Delta(\varepsilon, z_0) > 0$: $|f(z) - w_0| < \varepsilon$, если выполнено $0 < |z - z_0| < \Delta$.

Обозначается предел $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w_0$.

Замечание. Это определение имеет смысл лишь при конечных значениях z_0 и w_0 в отличие от определения предела по Гейне.

2. *Непрерывность функции*

Определение. Функция комплексной переменной $f(z)$, $z \in G$, называется *непрерывной в точке* $z_0 \in G$, если существует ограниченный предел: $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w_0$ и $w_0 = f(z_0)$, т.е. $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$.

Очевидно, при этом достаточно малая Δ - окрестность точки z_0 отображается $f(z)$ на достаточно малую ε - окрестность точки $w_0 = f(z_0)$.

Определение непрерывности функции в точке в терминах $\varepsilon - \Delta$. Функция комплексной переменной $f(z)$, $z \in G$, называется *непрерывной в точке* $z_0 \in G$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\Delta(\varepsilon, z_0) > 0$, такая, что для любого z: $|z - z_0| < \Delta$ выполняется $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$.

Замечание 1. Это определение распространяется как на внутренние, так и на граничные точки множества.

Определение. Точка z_0 называется ***изолированной точкой*** множества G, если существует такая ее ε -окрестность, в которой нет других точек множества G.

Замечание 2. По определению функция считается непрерывной в изолированной точке $z_0 \in G$.

Замечание 3. Понятие непрерывности функции f(z), $z \in G$, в точке $z_0 \in G$ справедливо и в случае бесконечно удаленной точки $z_0=\infty$. При этом под пределом функции f(z) при $z \to \infty$ по Гейне надо понимать предел последовательности $\{f(z_n)\}$, где $\{z_n\}$- любая неограниченно возрастающая последовательность.

Примеры:

а) функции w=az+b, w=const, w=Re z, $w=z^n$, w=|z| - являются непрерывными на всей комплексной плоскости.

б) функция w=arg(z) является непрерывной на всей комплексной плоскости, за исключением точек z=0, $z=\infty$, и точек, лежащих на положительной части действительной полуоси.

Определение. Функция комплексной переменной f(z), $z \in G$, называется *непрерывной в области* G**,** если она непрерывна для любого $z \in G$.

Функцию комплексной переменной f(z) можно представить в виде f(z)=u(x,y)+iv(x,y), где u(x,y) и v(x,y) - действительные функции действительных переменных. Тогда справедлива

Теорема. Необходимым и достаточным условием непрерывности f(z) в G является требование, чтобы u(x,y) и v(x,y) были непрерывны в области G плоскости (x,y) по совокупности переменных. Данное утверждение является следствием того, что необходимым и достаточным условием сходимости последовательности комплексных чисел является сходимость последовательностей их действительных и мнимых частей.

Основные элементарные функции

В комплексном анализе основные элементарные функции имеют те же названия и обозначения, что и в вещественном анализе, определим их для комплексного переменного.

- Дробно рациональная функция, или рациональная дробь

$$w = \frac{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n}{в_0 z^m + в_1 z^{m-1} + \ldots + в_m}.$$

Эта функция, как частное двух многочленов, есть функция однозначная и непрерывная на всей открытой плоскости *z*, за исключением тех точек, в которых знаменатель обращается в нуль. Степенная функция $\omega = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$ является частным ее случаем.

➢ Показательная функция $w = e^z$ определяется как сумма абсолютно сходящегося степенного ряда с помощью равенства $e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + ... + \frac{z^n}{n!} + ...$

или как предел $e^z = \lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$

Показательная функция обладает следующими свойствами:

а) $e^{z_1 + z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$; б) $e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$

в) $e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z(\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = e^z$,

то есть функция e^z – периодическая функция с периодом $2\pi i$.

➢ Функции *sin z* и *cos z* определяются с помощью абсолютно сходящихся при любом значении z рядов.

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + ... + (-1)^{n-1} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} + ...,$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + ... + (-1)^{n-1} \frac{z^{2n-2}}{(2n-2)!} + ...$$

Тригонометрические функции, с учетом формул Эйлера, определяют также

$$w = \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}; \qquad w = \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{i};$$

$$w = tgz = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})}; \qquad w = ctgz = \frac{\cos z}{\sin z} = i\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}};$$

Для тригонометрических функций справедливы все формулы тригонометрии функций вещественного аргумента.

Замечание. Синус и косинус комплексного аргумента могут принимать значения по модулю больше единицы. Например:

$$cos 10i = \frac{e^{i \cdot 10i} + e^{-i \cdot 10i}}{2} = 2^{-1}(e^{-10} + e^{10}) > 1.$$

➢ Гиперболические функции

$$w = sh\, z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}; \qquad w = ch\, z = \frac{e^z + e^{-z}}{2};$$

$$w = th\, z = \frac{sh\, z}{ch\, z} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}; \qquad w = cth\, z = \frac{ch\, z}{sh\, z} = \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}}$$

Все гиперболические функции однозначно определены на всей плоскости комплексной переменной, за исключением точек $z = 2^{-1}(2k-1)\pi i$ для *th z* и $z = k\pi i$ для *cth z*. Гиперболические функции связаны с тригонометрическими функциями простыми зависимостями, а именно:

$sin\ iz = (2i)^{-1}(e^{izi} - e^{-izi}) = (2i)^{-1}(e^{-z} - e^{z}) = i(2i)^{-1}(e^{z} - e^{-z}) = ish\ z;$

$cos\ iz = (2)^{-1}(e^{izi} + e^{-izi}) = (2)^{-1}(e^{-z} + e^{z}) = ch\ z;\ sh\ iz = isin\ z;\ ch\ iz = cos\ z;$

$tg\ iz = ith\ z;\ ctg\ iz = -icth\ z.$

Эти соотношения позволяют получать из формул для тригонометрических функций формулы для гиперболических функций, такие, как например:

$$sh(z_1 \pm z_2) = shz_1chz_2 \pm shz_2chz_1;$$

$$ch(z_1 \pm z_2) = chz_1chz_2 \pm shz_2shz_1;$$

$$ch^2z - sh^2z = 1; \qquad th\ 2z = \frac{2thz}{1+th^2z}.$$

- Логарифмическая функция $\omega = Ln\ z$ определяется как функция, обратная к показательной $z = e^{\omega}$:

$$w = Lnz = \ln r + i(\varphi + 2\pi\kappa), \qquad k = 0, \pm1, \pm2, ...$$

Как видно из полученной формулы, *Ln z* – многозначная функция. При $\kappa=0$ получим главное значение логарифма, оно обозначается через *ln z,* т.е. $ln\ z = ln\ r + i\varphi$, где $-\pi < \varphi \le \pi$.

Главное значение логарифма $ln\ z = ln\ r + i\varphi$ для положительных чисел, у которых $\varphi=0$ даёт обычный логарифм. Ряд свойств логарифмов, известных из алгебры, верны и для *ln z.*

Например, если аргумент чисел z_1, z_2 и их суммы лежат в интервале $(-\pi,\pi)$, то справедлива формула $ln\ (z_1 \cdot z_2) = ln\ z_1 + ln\ z_2$.

Из определения следует формула $e^{Lnz} = z$.

Также справедлива формула $\ln e^z = z + 2k\pi i$.

Перепишем формулы определения логарифма с использованием понятий модуля и аргумента.

$$Ln\ z = \ln|z| + i(\arg z + 2\kappa\pi), \qquad \ln z = \ln|z| + i\arg z.$$

- Общая степенная функция $\omega = z^a$, где a - любое комплексное число. Данная функция определяется равенством $\omega = z^a = e^{aLnz}$. Пусть $z = re^{i\varphi}, -\pi < \varphi \le \pi$. Тогда $w = e^{a(\ln r + i(\varphi + 2k\pi)} = e^{a(\ln r + i\varphi)} \cdot e^{2ka\pi i}$. Отсюда вытекают следующие случаи:

1. a – целое число. Тогда функция z^a - однозначная, т.к. в этом случае $e^{2k\alpha\pi i} = 1.$

2. $a=m/n$. Тогда для всякого $z=0$ функция z^a будет иметь n и только n различных значений. Модули всех их равны $a^{\frac{m}{n}\ln r}$, а аргументы:

$a\varphi, a\varphi + \frac{2m\pi}{n}; a\varphi + \frac{4m\pi}{n}; ...; a\varphi + \frac{2(n-1)m\pi}{n}$. т.е. ситуация будет такая же, как для функции $\sqrt[n]{z^m}$, что естественно, ибо $z^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{z^m}$.

3. a - иррациональное. Тогда функция $W = z^a$ будет бесконечнозначной.

4. $a = \alpha + \beta i,$ где $\beta \neq 0$. В этом случае имеем $W = e^{aLnz} = e^{(\alpha+\beta i)[\ln r + i(\varphi+2\pi\kappa)]} = e^{\alpha \ln r - \beta\varphi} \cdot e^{-2\pi\kappa\beta} \cdot e^{i(\alpha\varphi + \beta \ln r)} \cdot e^{2\kappa\alpha\pi i}$. Функция бесконечнозначная.

5. Общая показательная функция определяется аналогично: $W = a^z = e^{zLna}$, где a, в общем, комплексное число.

Функции, обратные к тригонометрическим и гиперболическим, определяется при помощи формул:

$$Arc\sin z = iLn(iz + \sqrt{1-z^2});$$
$$Arc\cos z = -iLn(z + \sqrt{z^2 - 1});$$
$$Arctgz = \frac{1}{2i} Ln \frac{1+iz}{1-iz};$$
$$Arcctgz = -\frac{1}{2i} Ln \frac{iz+1}{iz-1};$$
$$Arshz = Ln(z + \sqrt{z^2+1});$$
$$Archz = Ln(z + \sqrt{z^2-1});$$
$$Arthz = \frac{1}{2} Ln \frac{1+z}{1-z};$$
$$Arcthz = \frac{1}{2} Ln \frac{z+1}{z-1};$$

Отметим особо, что при операциях с функциями комплексного переменного надо очень внимательно относится к правилам, так как вследствие неоднозначности можно получить неправильные ответы.

6. Дифференцирование функции комплексного переменного

Пусть однозначная функция *w=f(z)* определена в некоторой окрестности конечной точки *z=x+iy*. Выберем в этой окрестности точку *z+Δz=x+Δx+i(y+Δy)*. Пусть $\Delta w = f(z + \Delta z) - f(z)$ есть приращение функции *f(z)* при переходе от точки *z* к точке *z+Δz*.

Если существует конечный предел отношения $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ при $\Delta z \to 0$, то функция *f(z)* называется *дифференцируемой в точке z*. Этот предел называется *производной* функции *f(z)* в данной точке *z* и обозначается символом

$$w' = f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}.$$

На первый взгляд эта производная определяется совершено аналогично производной функции действительной переменной, как предел отношения

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}.$$

Однако, приращение комплексного аргумента Δz характеризуется не только величиной $|\Delta z|$, но и направлением arg (Δz), а производная по определению от этого направления не зависит. Поэтому дифференцируемость функции комплексного переменного - значительно более редкое явление, чем дифференцируемость функции вещественного переменного.

Отношение $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ при $\Delta z \to 0$ может стремиться к конечному пределу только при условии, что $\Delta w \to 0$; но это есть условие непрерывности функции *f(z)* в точке *z*. Итак, из дифференцируемости функции в некоторой точке вытекает и непрерывность функции в этой точке. Обратное утверждение, как и в действительном анализе не имеет места. Выясним теперь, при каких условиях функция будет дифференцируемой в данной точке.

Теорема. Для того чтобы функция $f(z)=U(x,y)+iV(x,y)$ была дифференцируема в точке $z=x+iy$, необходимо и достаточно, чтобы

1) действительные функции $U(x,y)$ и $V(x,y)$ были дифференцируемы в точке *z*;
2) в этой точке выполнялисьс равенства

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y}, \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x},$$

называемые **условиями Коши-Римана**.

Так как определение производной формулируется так же, как для функций действительной переменной, то все известные из действительного анализа правила дифференцирования сохраняются.

Функция *f(z)* называется *аналитической в* данной *точке* z_0, если она дифференцируема как в самой точке, так и в некоторой ее окрестности.

Функция *f(z)* однозначная и дифференцируемая в каждой точке области М называется *аналитической (регулярной)* в этой области.

Точки плоскости *z,* в которых однозначная функция *f(z)* аналитична, называются правильными точками *f(z).* Точки, в которых функция *f(z)* не является аналитической, называются *особыми* точками этой функции.

Для любой аналитической функции *w=f(z)* имеем

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Если функции $f_1(z), f_2(z),..., f_n(z)$ аналитичны в области М, то алгебраическая сумма этих функций и их произведение также аналитичны в области М.

Если $f_1(z)$ и $f_2(z)$ аналитичны в области *M*, то отношение $f_1(z)\ /\ f_2(z)$ также аналитично в области *M*, за исключением точек, в которых $f_2(z)=0.$

Все основные функции являются аналитическими функциями, но каждая в своей области. Так, многочлен, функции e^z, *sinz, cosz,* z^n, *shz, chz* имеют областью аналитичности всю открытую плоскость.

Дробно-рациональная функция аналитична всюду, за исключением точек, в которых знаменатель обращается в нуль. Области регулярности *tg z* и *ctg z* получаются из открытой комплексной плоскости, если исключить из неё для *tg z* точки $z_k=2^{-1}(2k+1)\pi$, а для *ctg z* точки $z_k=k\pi$, $k=0,\pm1,\pm2,...$

Из равенства $f'(z)=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}$ следует, что при $\Delta z\to 0$ разность $\frac{\Delta w}{\Delta z}-f'(z)\to 0,$ т.е. $\frac{\Delta w}{\Delta z}-f'(z)$ является бесконечно малой величиной. Обозначив $\alpha=\frac{\Delta w}{\Delta z}-f'(z)$, получим $\Delta w=f'(z)\Delta z+\alpha\cdot\Delta z.$

Линейная, относительно Δz, часть приращения функции *f(z)* называется дифференциалом функции *f(z)* и обозначается через *dw* или *df,* т.е. по определению $dw=f'(z)\ \Delta z$. Применив это правило к функции $w=f(z)=z,$ найдём, что $dw=dz=z'\cdot\Delta z=\Delta z$. Откуда получим $dw=f'(z)\ dz$ и $f'(z)=dw/dz.$

Геометрический смысл модуля и аргумента производной

Пусть функция *f(z)* – аналитическая в точке z_0 и $f'(z_0)\neq 0$. Тогда $|f'(z_0)|$ равен коэффициенту растяжения в точке z_0 при отображении $w=f(z)$ плоскости z на плоскость w; точнее: при $|f'(z_0)|>1$ имеет место растяжение, а при $|f'(z_0)|<1$ - сжатие.

Аргумент производной $f'(z_0)$ геометрически равен углу, на который нужно повернуть касательную в точке z_0 к любой гладкой кривой на плоскости z, проходящей через точку z_0, чтобы получить направление касательной в точке $w_0 = f(z_0)$ к образу этой кривой на плоскости w при отображении $w = f(z)$. Если $\varphi = \arg f'(z) > 0$, то поворот происходит против часовой стрелки, а при $\varphi < 0$ - по часовой.

Пример. Проверить аналитичность функции $w = \frac{1}{z}$.

Решение. Выделим вещественную и мнимую части:

$$w = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}.$$

Значит

$$U(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}; \qquad V(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}.$$

Проверим условия Коши-Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x^2+y^2-x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}; \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{x^2+y^2-y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{0-2xy}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}; \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{0-y\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

Таким образом

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}; \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

Условия Коши-Римана выполняются, значит функция аналитична во всей плоскости за исключением точки $z=0$.

7. Интегрирование функций комплексного переменного

Кусочно-гладкая кривая – это множество точек z=z(t)=x(t)+iy(t), где t ∈ [a,b] действительный параметр. Функции x(t), y(t) - непрерывно дифференцируемы на отрезке [a,b]; x'(t), y'(t) - кусочно- непрерывные на [a,b]; $x'^2(t)+y'^2(t) \neq 0$ – то есть нет точек возврата, нет точек самопересечения. Если кривая замкнута, то x(a)=x(b), y(a)=y(b).

Пусть в области M плоскости $z=x+iy$ задана непрерывная функция $w=f(z)=U(x,y)+iV(x,y)$ и пусть L - кусочно-гладкая линия с началом в точке z_0 и с концом в точке Z, лежащая в области M. Линия L может быть как незамкнутой, так и замкнутой (в последнем случае $Z=z_0$). Произвольным образом разобьём линию L на n дуг в направлении от z_0 к Z точками $z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$ $(z_k=x_k+iy_k)$, причем $Z=z_n$.

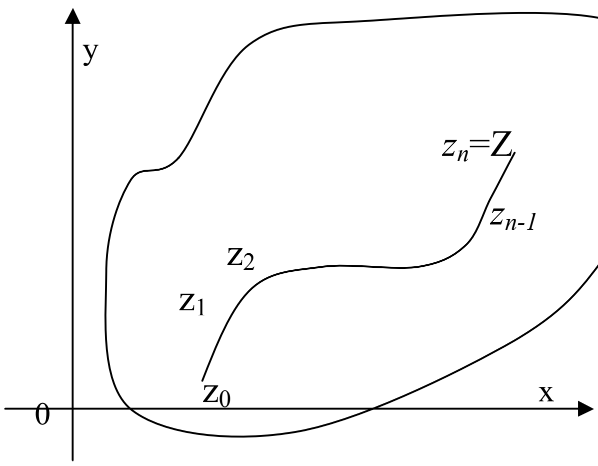
Обозначим $z_k - z_{k-1} = \Delta z_k = \Delta x_k + i\Delta y_k (k=1,2,\dots,n)$, где $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$; $\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$; Δz_k - вектор, идущий из точки z_{k-1} в точку z_k, а $|\Delta z_k|$- длина этого вектора, т.е. длина хорды, стягивающей *к*-ую элементарную дугу. В произвольном месте каждой дуги (z_{k-1},z_k) возьмем соответственно по точке $\xi_к$ и составим сумму

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k, \quad (\Delta z_k = z_k - z_{k-1}) .$$

Интегралом от функции *w=f(z)* комплексного переменного *z* по кривой *L* называется предел интегральной суммы

$$\lim_{|\Delta z|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k, \quad |\Delta z| = \max_k |\Delta z_k|$$

если он существует, не зависит от способа разбиения линии *L*, от выбора точек $\xi_к$ и обозначается символом $\int\limits_L f(z)dz$.



Если функция *f(z)* непрерывна на кусочно-гладкой линии *L,* то интеграл $\int\limits_L f(z)dz$ существует и обладает всеми свойствами криволинейного интеграла.

Если *f(z)=U(x,y)+iV(x,y),* то имеем

$$\int\limits_L f(z)dz = \int\limits_L [U(x,y) + iV(x,y)](dx + idy) =$$

$$= \int\limits_L [U(x,y)dx - V(x,y)dy + i\int\limits_L V(x,y)dx + U(x,y)dy$$

В частности, когда $f(z) \equiv 1$, интегральная сумма равна

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta z_k = \Delta z_1 + \Delta z_2 + ... + \Delta z_n = (z_1 - z_0) + (z_2 - z_1) + ... + (Z - z_{n-1}) = Z - z_0,$$

следовательно, $\int\limits_L dz = Z - z_0$.

Интеграл от функции комплексного переменного в общем случае зависит от пути интегрирования. Если же *f(z)* аналитическая функция в односвязной области *M*, то интеграл не зависит от пути интегрирования и имеет место формула Ньютона-Лейбница

$$\int\limits_{z_0}^{Z} f(z)dz = \Phi(z)\Big|_{z_0}^{Z} = \Phi(Z) - \Phi(z_0)$$

Интегрирование по частям и замена переменных в интегралах от функции комплексного переменного производится так же, как и в функциях действительного переменного.

Область *M* называется односвязной, если любую замкнутую кривую, лежащую в этой области, можно стянуть в точку, не выходя за пределы этой области.

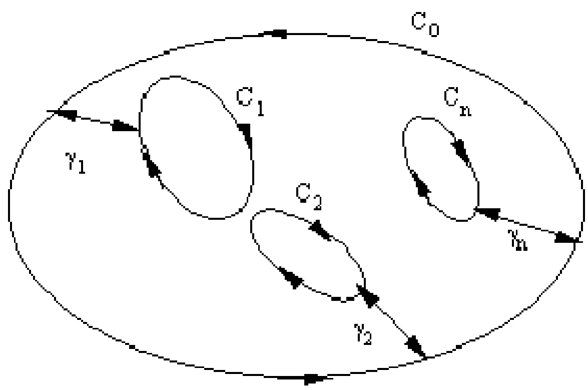
Теорема Коши. Если функция *f(z)* аналитическая в замкнутой односвязной области *M*, то интеграл от этой функции по замкнутому контуру *L,* ограничивающему область *M*, равен нулю.

$$\oint\limits_L f(z)dz = 0.$$

Теорема переносится и на случай многосвязной области.

Теорема. Пусть f(z) аналитична в многосвязной области M, ограниченной извне контуром C_0, а изнутри - контурами C_1, C_2,...,C_n и пусть f(z) непрерывна в замкнутой области ∂M. Тогда

$$\oint\limits_C f(z)dz = 0,$$



где $C=C_0 \cup C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_n$ - полная граница области M, причем обход границы происходит в *положительном* направлении (область все время остается слева).

Теорема. Если функция *f(z)* является аналитической в области *M*, ограниченной кусочно-гладким замкнутым контуром *L,* и на самом контуре, то справедлива интегральная формула Коши

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(z)dz}{z-z_0},$$

причем точка z_0 лежит в области M. Контур L обходится в положительном направлении, то есть область M все время остается слева.

Теорема. Пусть функция $f(z)$ аналитична в области M и непрерывна в замкнутой области $\overline{M}$. Тогда в каждой внутренней точке области M существует производная любого порядка функции $f(z)$, причем для нее справедлива формула

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\int_L \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}.$$

Последняя формула также носит название формулы Коши.

Итак, если функция $f(z)$ аналитична в области M, то в этой области функция $f(z)$ *обладает* непрерывными производными всех порядков. Это свойство аналитических функций существенно отличает ее от функции действительной переменной.

8. Ряды

Числовые ряды

Ряд из последовательности комплексных чисел $z_1, z_2, ..., z_n, ...$ называется числовым рядом

$$z_1+z_2+...+z_n+...=\sum_{n=1}^{\infty} z_n,$$

где $z_n=x_n+iy_n$. Число $S_n=z_1+z_2+...+z_n$ называется n-ой частичной суммой ряда.

Определение. Числовой ряд называется *сходящимся*, если сходится последовательность его частичных сумм $\{S_n\}\to S$. Предел последовательности частичных сумм называется *суммой ряда* $\sum_{k=1}^{\infty} z_n = S$. Если же последовательность $\{S_n\}$ не сходится, то ряд называется расходящимся.

Необходимым условием сходимости числового ряда является требование $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$

Числовой ряд сходится тогда и только тогда, когда сходятся оба ряда

$$x_1+x_2+...+x_n+...=\sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} y_n \ ,$$

составленных из действительных и мнимых частей членов ряда.

Числовой ряд называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд

$$|z_1| + |z_2| + \ldots + |z_n| + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} |z_n| \ ,$$

составленный из модулей членов ряда.

Итак, вопрос о сходимости рядов с комплексными членами сводится к изучению сходимости рядов с действительными членами, которые решаются с помощью известных признаков сходимости Даламбера, Коши и др..

Степенные ряды.

Степенным рядом называется функциональный ряд вида

$$c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \ldots + c_n(z-a)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n ,$$

где z - комплексное переменное, a, c_0, c_1, c_2,. . . ,c_n – комплексные числа.
При $a=0$ степенной ряд имеет вид $c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n + \ldots$

Для каждого степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ существует круг, в котором ряд сходится, с центром в точке a. Этот круг называется кругом сходимости, его радиус R - радиусом сходимости степенного ряда. Если $R = \infty$, то степенной ряд сходится во всей комплексной плоскости, если $R=0$, то ряд сходится лишь в точке a, в центре круга. Для определения радиуса сходимости можно использовать формулы:

$$R = \lim_{n \to \infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|} \quad \text{или} \quad R = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}} ,$$

если указанные пределы существуют.

Степенной ряд абсолютно сходится внутри круга сходимости, вне круга сходимости ряд расходится. На границе круга сходимости степенной ряд может как сходится, так и расходится; причем, если степенной ряд абсолютно сходится в какой-нибудь точке границы, то он абсолютно сходится во всех точках границы.

Теорема Абеля. Если степенной ряд сходится при некотором значении $z=z_0$, то он сходится и при том абсолютно при всех значениях z, для которых $|z-a| < |z_0 - a|$. Если ряд расходится при $z=z_1$, то он расходится при любом значении z, для которых $|z-a| > |z_1 - a|$.

Пример. Найти круг сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{n!}$.

Решение. Находим радиус сходимости, учитывая, что $c_n=\frac{1}{n!}$; $c_{n+1}=\frac{1}{(n+1)!}$;

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}=\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty .$$

Следовательно, кругом сходимости данного ряда будет круг радиуса $R=\infty$ с центром в точке *z=1*, т.е. вся плоскость *z*.

Ряды Тейлора и Лорана

Всякая функция *f(z),* аналитическая в круге $|z-a|<R,\quad 0\le R\le\infty$ может быть в этом круге единственным образом разложена в степенной ряд по степеням *(z-a),* который называется рядом Тейлора:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-a)^n,$$

коэффициенты которого вычисляются по формулам:

$$C_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_L\frac{f(z)dz}{(z-a)^{n+1}}=\frac{f^{(n)}(a)}{n!};\quad (n=0,1,2,...).$$

Здесь L - окружность с центром в точке *z=a*, целиком лежащая в окрестности точки *a*, в которой функция *f(z)* аналитична. C_n – называются коэффициентами ряда.

Центр окружности круга сходимости находится в точке *a*; эта окружность проходит через особую точку функции *f(z),* ближайшую к точке *a*. То есть наибольший радиус *R* круга с центром в точке *z=a*, в котором функция разлагается в ряд Тейлора, равен расстоянию от точки *z=a* до ближайшей к ней особой точки функции *f(z).*

Рассмотрим разложение в ряд Тейлора некоторых элементарных функций:

f(z)=ln z по степеням *z-1.*

Для функции *f(z)=ln z,* имеем $f^{(n)}(z)=(-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{z^n}$ и получаем следующий ряд Тейлора

$$\ln z=(z-1)-\frac{(z-1)^2}{2}+\frac{(z-1)^3}{3}-...$$

Точка *z=0* - есть ближайшая к точке *a=1* особая точка функции *ln z,* расстояние от точки *a=1* до точки *z=0* равно 1. Следовательно, полученное разложение справедливо в круге $|z-1|<1$.

Разложение функций e^z, $\sin z$, $\cos z$ в степенные ряды Тейлора по степеням z имеют вид:

$$e^z = 1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\ldots$$

$$\sin z = z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\frac{z^7}{7!}+\ldots$$

$$\cos z = 1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}\ldots$$

Так как все три рассмотренные функции аналитичны во всей плоскости *z*, то полученные разложения справедливы во всей этой плоскости.

Всякая функция *f(z),* аналитическая в круговом кольце $r<|z-a|<R$, может быть в этом кольце единственным образом разложена в ряд по степеням $z-a,$ называемым рядом Лорана, то есть

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n (z-a)^n = \sum_{n=-\infty}^{-1} C_n (z-a)^n + \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-a)^n$$

где

$$C_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f(z)dz}{(z-a)^{n+1}}; \qquad (n=0,\pm1,\pm2,\ldots)$$

– коэффициенты ряда Лорана.

Ряд $\sum_{n=-\infty}^{-1} C_n (z-a)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{-n}}{(z-a)^n}$ называется главной частью ряда Лорана, а ряд $\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-a)^n$ – правильной частью ряда Лорана.

При отыскании коэффициентов C_n стараются избегать применения указанных формул, и если возможно, то используют готовые разложения элементарных функций в ряд Тейлора, которые имеются в справочниках.

$$shz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad (0\le|z|<\infty)$$

$$chz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \qquad (0\le|z|<\infty)$$

$$(1+z)^m = \sum_{n=0}^{\infty} C_m^{\ n} z^n, \qquad (0\le|z|<1)$$

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty} z^n, \qquad (0\le |z|<1)$$

$$\frac{1}{1+z}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n, \qquad (0\le |z|<1)$$

$$\ln(1+z)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n!}, \qquad (0\le |z|<1)$$

Можно также применять элементарные преобразования к заданным функциям, чтобы использовать вышеприведенные разложения.

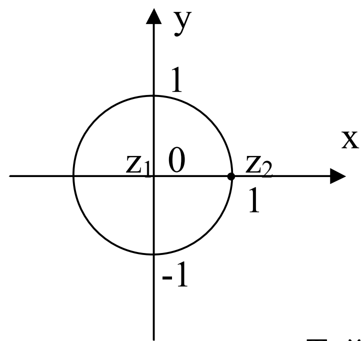
Пусть задана аналитическая функция *f(z),* чтобы найти всё её разложения по степеням *(z-a)* необходимо:

1. определить все особые точки данной функции, то есть те точки, в которых функция терпит разрыв или перестает быть аналитической;
2. на чертеже отметить все особые точки и точку *z=a;*
3. построить ряд концентрических окружностей с центром в точке *z=a,* на которых лежат особые точки функции. Эти окружности разобьют всю плоскость на ряд областей; первая область – круг, окружность которого проходит через ближайшую особую точку функции *f(z),* последняя – внешняя область, которой будет вся часть плоскости, лежащая вне окружности, проходящей через наиболее удаленную от точки *z=a* особую точку функции *f(z).* В каждой из этих областей аналитическая функция *f(z)* имеет свое разложение по степеням *(z-a).* В круге она разлагается в ряд Тейлора, в кольцах – в ряд Лорана.

Пример 1. Найти все разложения функции $f(z)=\dfrac{1}{z(1-z)}$ по степеням *z.*

Решение. Особые точки функции $z_1=0$, $z_2=1$. Строим концентрические окружности с центром в точке *z=0,* проходящей через точку *z=1*.

В результате получится две области:



1. круг $|z|<1$;
2. внешняя область $|z|>1$.

Преобразуем функцию $\dfrac{1}{z(1-z)}=\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{1-z}$.

1. Разложим данную функцию в ряд по степеням *z* в круге $|z|<1$. Используя формулу разложения в ряд Тейлора, получим

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty} z^n=1+z+z^2+z^3+\dots$$

Тогда разложение функции в круге $|z| < 1$ имеет вид:

$$\frac{1}{z(1-z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{z} + 1 + z + z^2 + z^3 + \ldots + z^n + \ldots$$

Это и есть ряд Лорана внутри круга $|z| < 1$.

2. Теперь разложим данную функцию в ряд по степеням z в области $|z| > 1$. Используем разбиение на простые дроби

$$\frac{1}{z(1-z)} = \frac{1}{z} + \frac{1}{1-z}.$$

Преобразуем выражение $\dfrac{1}{1-z} = \dfrac{1}{z} \cdot \dfrac{1}{\frac{1}{z} - 1} = -\dfrac{1}{z} \cdot \dfrac{1}{1 - \frac{1}{z}}$.

Отсюда, используя формулу разложения в ряд Тейлора

$$\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} - \ldots - \frac{1}{z^{n+1}} - \ldots = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n}$$

Получим $\dfrac{1}{1-z} = -\dfrac{1}{z}\left(-\dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{z^2} - \dfrac{1}{z^3} - \ldots - \dfrac{1}{z^{n+1}} - \ldots\right)$.

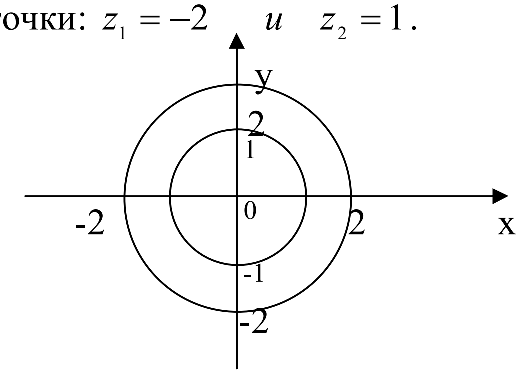
Окончательно, разложение функции в области $|z| > 1$ имеет вид

$$\frac{1}{z(1-z)} = \frac{1}{z} + \left(-\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} - \ldots - \frac{1}{z^{n+1}} - \ldots\right) = -\frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} - \ldots - \frac{1}{z^{n+1}} - \ldots = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}}.$$

Итак, получена главная часть ряда Лорана, которая сходится вне круга $|z| = 1$.

Пример 2. Найти все разложения функции $f(z) = \dfrac{2z+1}{z^2 + z - 2}$ по степеням z.

Решение. Функция *f(z)* имеет две особые точки: $z_1 = -2$ *и* $z_2 = 1$.



Следовательно, получатся три области:

1. круг $|z| < 1$;
2. кольцо $1 < |z| < 2$;
3. внешность круга $|z| \le 2$ *т.е.* $2 < |z| < +\infty$.

Найдем ряд Лорана для функций $f(z)$ в каждом из этих областей. Для этого представим $f(z)$ в виде суммы элементарных дробей:

$$f(z)=\frac{2z+1}{z^2+z-2}=\frac{2z+1}{(z-2)(z-1)}=\frac{1}{z+2}+\frac{1}{z-1}.$$

1. Разложение в круге $|z|<1$: Имеем $f(z)=\dfrac{1}{z-1}+\dfrac{1}{z+2}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{1+\dfrac{z}{2}}-\dfrac{1}{1-z}$.

Используя формулы разложения в ряд Тейлора, получим

$$\frac{1}{z-1}=1+z+z^2+z^3+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}z^n \qquad \frac{1}{1+\dfrac{z}{2}}=1-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{4}-\frac{z^3}{8}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{2^n}.$$

Тогда окончательно разложение функции $f(z)$ в ряд в области $|z|<1$ имеет вид:

$$f(z)=\frac{2z+1}{z^2+z-2}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{2^n}-\sum_{n=0}^{\infty}z^n=\frac{1}{2}-\frac{z}{4}+\frac{z^2}{8}-\frac{z^3}{16}+\ldots-(1+z+z^2+z^3+\ldots)=$$

$$=-\frac{1}{2}-\frac{3}{4}z+\frac{7}{8}z^2-\frac{15}{16}z^3+\ldots$$

это разложения является рядом Тейлора функции $f(z)$.

2. Разложим функции $f(z)$ в ряд в кольце $1<|z|<2$. Преобразуем функции

$$f(z)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{z}{2}}+\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{1}{z}}.$$

Применяя формулы разложения в ряд Тейлора, получим

$$f(z)=\frac{2z+1}{z^2+z-2}=\frac{1}{2}-\frac{z}{4}+\frac{z^2}{8}-\frac{z^3}{16}+\ldots+(\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\ldots)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n}.$$

3. Разложение в области $|z|>2$. Функцию $f(z)$ представим в следующем виде:

$$f(z)=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{2}{z}}+\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{1}{z}}=\frac{1}{z}\left(\frac{1}{1+\dfrac{2}{z}}+\frac{1}{1-\dfrac{1}{z}}\right)$$

Используя формулы разложения в ряд Тейлора, получим

$$f(z)=\frac{1}{z}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{z^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n}\right)=\frac{1}{z}\left(1-\frac{2}{z}+\frac{4}{z^2}-\frac{8}{z^3}+\ldots+1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\ldots\right)=$$

$$=\frac{1}{z}\left(2-\frac{1}{z}+\frac{5}{z^2}-\frac{7}{z^3}+...\right) \qquad \text{или} \qquad f(z)=\frac{2z+1}{z^2+z-2}=\frac{2}{z}-\frac{1}{z^2}+\frac{5}{z^3}-\frac{7}{z^4}+....$$

Из рассмотренных примеров видно, что для одной и той же функции *f(z)* ряд Лорана, вообще говоря, имеет разный вид для разных областей.

9. Особые точки

Нули функции

Нулем функции *f(z)* называют любую точку *a*, в которой *f(z)* обращается в нуль, то есть *f(a)=0*.

Если аналитическая функция *f(z)* не равна тождественно нулю в окрестности своего нуля *a*, то разложение этой функции в ряд Тейлора в окрестности *a* имеет вид

$$f(z)=C_m(z-a)^m+C_{m+1}(z-a)^{m+1}+...$$

где $C_m \neq 0$ $(m \geq 1)$. Номер *m* младшего, отличного от нуля коэффициента этого разложения называется порядком нуля *a*.

Если $m=1$, то нуль называется простым.

Из формулы $C_к=\dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}(k=1,2,3,...)$ - следует, что, если *a* является нулем порядка *m* функции *f(z)*, то $f(a)=f'(a)=f''(a)=\ldots=f^{(m-1)}(a)=0$, но $f^{(m)}(a)\neq 0$, то есть порядок нуля *a* есть порядок младшей, отличной от нуля производной $f^{(m)}(a)$.

Для того, чтобы точка $z=a$ была нулем *m*-го порядка аналитической функции *f(z)*, необходимо и достаточно, чтобы эта функция имела вид

$$f(z)=(z-a)^m\varphi(z),$$

где $\varphi(z)$ аналитична в точке $z=a$ и $\varphi(a)\neq 0$.

Пример 1. Найти нули функции $f(z)=z^4+16z^2$ и определить их порядок.

$$f(z)=z^4+16z^2=z^2(z^2+16), \quad \varphi(z)=z^2+16$$

$z^2(z^2+16)=0, \quad z^2=0, \quad z_1=0$ - нуль второго порядка

$\varphi(0)\neq 0, \quad z^2+16=0, \quad z_{2,3}=\pm 4i$ - нули первого порядка

Пример 2. Найти нули функции $f(z)=\dfrac{z^4}{1-\cos z}$ и определить их порядок.

Нулем $f(z)$ будет $z=0$. Определим порядок этого нуля.

$$\frac{z^4}{1-\cos z}=\frac{z^4}{1-\left(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+...\right)}=\frac{z^4}{\frac{z^2}{2!}-\frac{z^4}{4!}+\frac{z^6}{6!}-...}=$$

$$=\frac{z^2}{\frac{1}{2!}-\frac{z^2}{4!}+\frac{z^4}{6!}-...}=z^2\left[\frac{1}{\frac{1}{2!}-\frac{z^2}{4!}+\frac{z^4}{6!}-...}\right]=z^2\varphi(z)$$

Если $z=0$, то $\varphi(0)\neq 0$, т.е. $z=0$ - нуль второго порядка.

Пример 3. Найти нули функции $f(z)=1+chz$ и определить их порядок.

По определению гиперболического косинуса $ch\,z=\frac{e^z+e^{-z}}{2}$ имеем

$$\frac{e^z+e^{-z}}{2}=-1,\quad e^z+\frac{1}{e^z}=-2,\quad \frac{e^{2z}+2e^z+1}{e^z}=0,\quad \frac{\left(e^z+1\right)^2}{e^z}=0,$$

$$e^z=-1,\quad z=Ln(-1)=\ln\left|-1\right|+iArg(-1),$$

$$z=\ln 1+i(\pi+2\pi k)=i\pi(1+2k),\ (k=0,\pm 1,\pm 2,...)$$

Изолированные особые точки

В особых точках функции *f(z)* нарушается её аналитичность.

Определение. Точку *z=a* будем называть *изолированной особой точкой* функции *f(z),* если существует такая окрестность точки *z=a,* в которой она является единственной особой точкой *f(z).*

Если *z=a* изолированная особая точка функции *f(z)*, то существует такая достаточно малая окрестность $r<\left|z-a\right|<R$, в которой *f(z)* аналитична, и, следовательно, *f(z)* разлагается в ряд Лорана:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-a)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_n}{(z-a)^n}$$

При этом могут представиться три случая:

1. Разложение в ряд Лорана не содержит главной части и, следовательно, имеет вид

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-a)^n=C_0+C_1(z-a)+C_2(z-a)^2+...$$

Этот ряд является степенным рядом, и его сумма есть аналитическая функция в круге $\left|z-a\right|<R$ (включая и его центр *z=a*). Во всех точках этого круга, кроме точки *z=a,* ряд Лорана сходится к функции *f(z)* , а в точке *z=a*

(где *f(z)* не является аналитической) – к числу C_0. Особая точка $z=a$ называется в этом случае *устранимой особой точкой* функции *f(z).*

Для того, чтобы точка *a* была устранимой особой точкой функции *f(z)*, необходимо и достаточно, чтобы разложение *f(z)* в ряд Лорана не содержало главной части, например $f(z)=\frac{\sin z}{z}$.

2. Разложение в ряд Лорана содержит в своей главной части лишь конечное число членов и, следовательно, имеет вид

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-a)^n+\frac{C_{-1}}{(z-a)}+\frac{C_{-2}}{(z-a)^2}+\ldots+\frac{C_{-m}}{(z-a)^m}$$

где $C_{-m}\neq 0$. В этом случае точка $z=a$ называется *полюсом m-го порядка* функции *f(z).* Если $m=1$, то полюс называется простым.

Особая точка a является *полюсом* функции *f(z),* если $\lim\limits_{z\to\alpha}f(z)=\infty$.

Теорема. Для того чтобы, чтобы точка *a* была полюсом m-го порядка функции *f(z)* необходимо и достаточно, чтобы она была нулем порядка m для функции $\varphi(z)=\frac{1}{f(z)}$.

Теорема. Для того, чтобы точка *a* была полюсом функции *f(z)* необходимо и достаточно, чтобы главная часть разложения функции *f(z)* в ряд Лорана содержала конечное число членов.

3. Разложение в ряд Лорана содержит в своей главной части бесконечное множество членов. Точка $z=a$ называется в этом случае *существенно особой точкой* функции *f(z).*

Точка *a* является *существенно особой точкой* функции *f(z),* если в точке *a* функция *f(z)* не имеет предела ни конечного, ни бесконечного.

Пример 1. Определить характер особой точки функции $f(z)=\frac{\sin z}{z}$.

$z=0$ - изолированная особая точка. По определению $\lim\limits_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}=1$, значит $z=0$ - устранимая особая точка.

Пример 2. Определить характер особой точки функции $f(z)=\frac{ch\,z-1}{z^2}$.

$z=0$ - изолированная особая точка.

$$\lim_{z\to 0}\frac{ch\,z-1}{z^2}=\lim_{z\to 0}\frac{\frac{e^z+e^{-z}}{2}-1}{z^2}=\lim_{z\to 0}\frac{e^z-e^{-z}}{4z}=\lim_{z\to 0}\frac{e^z+e^{-z}}{4}=\frac{1}{2}.$$

$z=0$ - устранимая особая точка.

Разложим *f(z)* в ряд

$$\frac{ch\,z-1}{z^2}=\frac{1}{z^2}\left[1+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+...+\frac{z^{2n}}{(2n)!}+...-1\right]=\frac{1}{2!}+\frac{z^2}{4!}+\frac{z^4}{6!}+...$$

Полученный ряд Лорана не содержит главной части, это подтверждает характер точки $z=0$.

Пример 3. Определить характер особой точки *z=0* функции $f(z)=\dfrac{1}{2+z^2-2chz}$.

<u>Решение.</u> Точка *z=0* есть полюс функции *f(z),* так как она является нулем знаменателя. Рассмотрим функцию $\varphi(z)=\dfrac{1}{f(z)}=2+z^2-2chz.$

Для неё $\varphi(0)=0$. Найдем порядок нуля *z=0* этой функции. Имеем

$\varphi'(z)=2z-2shz, \quad \varphi'(0)=0;$

$\varphi''(z)=2-2chz, \quad \varphi''(0)=0;$

$\varphi'''(z)=-2shz, \quad \varphi'''(0)=0;$

$\varphi'^{V}(z)=-2chz, \quad \varphi'^{V}(0)=-2\neq 0;$

Таким образом, *z=0* есть нуль четвертого порядка для функции *φ(z),* а значит, для данной функции *f(z)* точка *z=0* есть полюс четвертого порядка.

Пример 4. Найти полюсы и определить их порядок для функции $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^3}$.

$z=0$ - изолированная особая точка.

Для отыскания полюса и определения его порядка разложим $f(z)$ в ряд Лорана по степеням z.

$$f(z)=\frac{\sin z}{z^3}=\frac{1}{z^3}\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-...\right)=\frac{1}{z^2}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{z^{2n}}{(2n+3)!}$$

Наибольший отрицательный показатель $k=-2$, следовательно, $z=0$ - полюс второго порядка.

Пример 5. Определить характер особой точки функции $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$.

$z=0$ является существенно особой точкой для $f(z)$, так как

$\lim\limits_{z\to 0-0} e^{\frac{1}{z}}=0, \quad \lim\limits_{z\to 0+0} e^{\frac{1}{z}}=\infty$, т.е. $f(z)$ не имеет предела в точке $z=0$.

Если же эту функцию разложить в ряд Лорана по степеням z, то получим $e^{\frac{1}{z}}=1+\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{2!z^2}+\dfrac{1}{3!z^3}+...$

Главная часть ряда Лорана содержит бесконечное число членов, следовательно, $z=0$ существенно особая точка.

Пример 6. Определить характер особой точки функции $f(z) = z \cdot \sin\frac{1}{z}$.

Разложим функцию $f(z)$ в ряд Лорана

$$z \cdot \sin\frac{1}{z} = z \cdot \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} - \ldots\right) = 1 - \frac{1}{3!z^2} + \frac{1}{5!z^4} - \frac{1}{7!z^6} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!z^{2n}} + \ldots$$

Следовательно, $z = 0$ существенно особая точка.

10. Вычеты функции

Вычетом функции *f(z)* в конечной изолированной особой точке *z=a* называется число, обозначаемое символом *res f(a)* и определяемое условием

$$res\ f(a) = \frac{1}{2\pi i}\oint_c f(z)dz$$

Вычет функции *f(z)* в особой точке *z=a* равен коэффициенту C_{-1} при члене $\frac{1}{z-a}$ в разложении функции в ряд Лорана в окрестности точки *z=a,* т.е. $resf(a) = C_{-1}$.

Указанной формулой вычисления вычетов пользуются, как правило, для определения вычета в существенно особой точке. Вычет в устранимой особой точке равен нулю, так как в этих случаях в разложении отсутствует главная часть, т.е. все $C_{-n}=0$, и в частности $C_{-1}=0$.

Вычет в точке *z=a* случае, если *a* есть полюс *n* –порядка определяется по формуле:

$$\underset{z=a}{resf}\ (z) = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\{f(z)(z-a)^n\}$$

при *n*=1, т.е. для простого полюса, имеем

$$\underset{z=a}{resf}\ (z) = \lim_{z\to a} f(z)(z-a).$$

Если *f(z)* в окрестности точки *a* может быть представлена как частное двух регулярных функций $f(z)=\varphi(z)/\psi(z)$, причем $\varphi(a)\neq 0$, $\psi(a)=0$, а $\psi'(a)\neq 0$ и точка *a* есть простой полюс, то

$$\underset{z=a}{resf}\ (z) = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}$$

Пример. Найти вычеты функции $f(z) = z^3 \sin\frac{1}{z^2}$ в её особой точке.

Решение. Особая точка функции *f(z)* есть точка *z=0*. Она является существенно особой точкой функции *f(z)*. В самом деле, лорановское разложение функции в окрестности точки *z=0* имеет вид $f(z)=z^3\left(\frac{1}{z^2}-\frac{1}{3!z^6}+\frac{1}{5!z^{10}}-...\right)=z-\frac{1}{3!z^3}+\frac{1}{5!z^7}-...$ т.е. содержит бесконечное число членов в главной части. Вычет функции в точке *z=0* равен нулю, так как коэффициент C_{-1} в лорановском разложении равен нулю.

Вычеты применяются для вычисления контурных интегралов от функции *f(z)*.

Теорема Коши о вычетах. Если функция *f(z)* аналитична всюду в области *M,* за исключением конечного числа особых точек $a_1, a_2, ...a_n$ (лежащих внутри *M*), и замкнутый контур *L,* ограничивает её, то интеграл от *f(z)* вдоль *L* в положительном направлении равен произведению $2\pi i$ на сумму вычетов *f(z)* во всех точках $a_к$, то есть

$$\oint_{\ell} f(z)dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n} resf(a_k)$$

Пример 1. Вычислить $\int_{\ell}\frac{dz}{z^3+1}$, где *е* – окружность $|z-1-i|=1$.

<u>Решение.</u> Решив уравнение $z^3+1=0$, находим простые нули знаменателя: $z_1=-1,\quad z_2=\frac{1-\sqrt{3}i}{2},\quad z_3=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$, которые будут простыми полюсами функции $f(z)=\frac{1}{z^3+1}$. Только третий полюс лежит внутри окружности *е*.

Находим $resf(z_3)=\left.\frac{1}{(z^3+1)'}\right|_{z=z_3}=\left.\frac{1}{3z^2}\right|_{z=z_3}=-\frac{1+\sqrt{3}i}{6}$.

Следовательно,

$$\int_{e}\frac{dz}{z^3+1}=2\pi i\left(-\frac{1+\sqrt{3}i}{6}\right)=\frac{\pi}{3}(\sqrt{3}-i).$$

Пример 2. Вычислить $\int_{e}\frac{z^2}{(z^2+1)(z-2)}dz,$ где *е* – окружность $|z|=3$.

<u>Решение.</u> $f(z)=\frac{z^2}{(z-i)(z+i)(z-2)}$. Полюсы *i, -i, 2* находятся внутри замкнутого контура ℓ.

Отсюда

$$resf(i)=\lim_{z\to i}(z-i)f(z)=\lim_{z\to i}\frac{z^2}{(z+i)(z-2)}=\frac{1}{2i(2-i)};.$$

$$resf(-i)=\lim_{z\to -i}(z+i)f(z)=\lim_{z\to -i}\frac{z^2}{(z-i)(z-2)}=\frac{-1}{2i(2-i)};$$

$$resf(2)=\lim_{z\to 2}(z-2)f(z)=\lim_{z\to 2}\frac{z^2}{(z^2+1}=\frac{4}{5}.$$

Тогда
$$\int_\ell \frac{z^2}{(z^2+1)(z-2)}dz=2\pi i\left[\frac{1}{2i(2-i)}-\frac{1}{2i(2+i)}+\frac{4}{5}\right]=\pi\left(\frac{1}{2-i}-\frac{1}{2+i}+\frac{8}{5}i\right)=$$
$$=\pi\left(\frac{2}{5}i+\frac{8}{5}i\right)=2\pi i.$$

Пример 3. Вычислить интеграл $\int_\ell \frac{1}{z-1}\sin\frac{1}{z}dz,$ где ℓ – окружность $|z|=2$.

<u>Решение</u>. В круге $|z|\le 2$ подынтегральная функция имеет две особые точки $z=1$ и $z=0$. Точка $z=1$ есть простой полюс, поэтому

$$\operatorname*{res}_{z=1} f(z)=\operatorname*{res}_{z=1}\left(\frac{1}{z-1}\sin\frac{1}{z}\right)=\left.\frac{\sin\frac{1}{z}}{(z-1)'}\right|_{z=1}=\sin 1.$$

Для установления характера особой точки $z=0$ напишем ряд Лорана для функции $\frac{1}{z-1}\sin\frac{1}{z}$ в окрестности этой точки. Имеем

$$\frac{1}{z-1}\sin\frac{1}{z}=-\frac{1}{1-z}\sin\frac{1}{z}=-(1+z+z^2+\ldots)\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{3!z^3}+\frac{1}{5!z^5}-\ldots\right)=$$
$$=-\left(1-\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}-\ldots\right)\frac{1}{z}+\frac{C_{-2}}{z^2}+\frac{C_{-3}}{z^3}+\ldots+$$

правильная часть, $C_{-к}\neq 0,\ к=2,\ 3,\ \ldots$

Так как ряд Лорана содержит бесконечное множество членов с отрицательными степенями z, то точка $z=0$ является существенно особой точкой. Вычет подынтегральной функции в этой точке равен

$$\operatorname*{res}_{z=0} f(z)=\operatorname*{res}_{z=0}\frac{\sin\frac{1}{z}}{z-1}=C_{-1}=-\left(1-\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}-\ldots\right)=-\sin 1.$$

Следовательно, $\int_\ell \frac{1}{z-1}\sin\frac{1}{z}dz=2\pi i(\sin 1-\sin 1)=0.$

Пример 4. Вычислить вычет функции $f(z) = z \cdot e^{\frac{1}{z-1}}$.

Решение. Разложим замкнутую функцию в ряд Лорана в окрестности $z = 1$:

$$z \cdot e^{\frac{1}{z-1}} = z + 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{(z-1)^n}, \quad |z-1| > 0.$$

Из этого разложения следует, что $z = 1$ является существенной особой точкой и $C_{-1} = 3/2$, т.е.

$$\underset{z=1}{res}\, z \cdot e^{\frac{1}{z-1}} = 3/2.$$

Пример 5. Вычислить вычет функции

$$f(z) = \frac{\ln(1+z)}{z^3}.$$

Решение. Так как

$$\frac{1}{f(z)} = z^2 \cdot \frac{z}{\ln(1+z)} = z^2 \cdot \varphi(z), \quad \lim_{z \to 0} \varphi(z) = 1,$$

то $z = 0$ для $f(z)$ - полюс второго порядка. Следовательно,

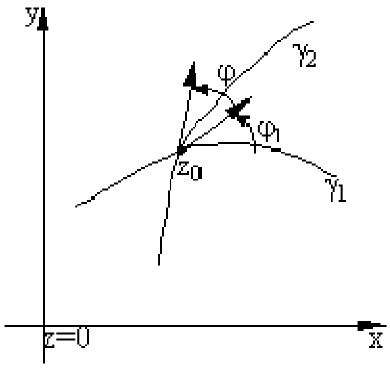
$$\underset{0}{res} \frac{\ln(1+z)}{z^3} = \lim_{z \to 0} \frac{d}{dz}\left(z^2 \frac{\ln(1+z)}{z^3} \right) = \lim_{z \to 0} \left(\frac{\ln(1+z)}{z} \right)' = \lim_{z \to 0} \frac{\frac{z}{1+z} - \ln(1+z)}{z^2} =$$

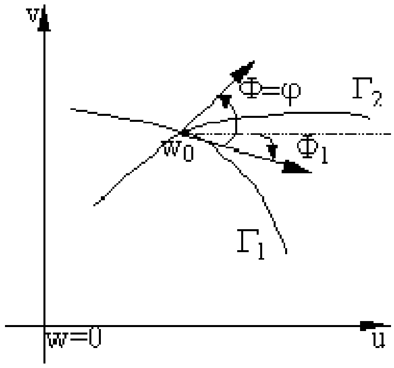
$$= \lim_{z \to 0} \frac{z - (1+z)\ln(1+z)}{(1+z)z^2} = \lim_{z \to 0} \frac{z - (1+z)(z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \ldots)}{(1+z)z^2} = \lim_{z \to 0} \frac{-\frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \ldots}{(1+z)z^2} = \frac{1}{2}.$$

Конформные отображения

Геометрический смысл $f(z_0) \neq 0$.

Пусть w=f(z) аналитична в области M и $f(z_0) \neq 0$, для $z_0 \in M$. Тогда существует $f(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = ke^{i\alpha}$, k>0, α - определенное действительное число. Выберем такой способ стремления $\Delta z \to 0$, при котором точки $z = z_0 + \Delta z \in L_1 \subset M$, $z_0 \in L_1$- некоторой гладкой кривой. Соответствующие им точки $w = w_0 + \Delta w \in G_1 \subset G$, $w_0 \in G_1$- гладкой кривой. Комплексные числа Δz и Δw - ***вектора секущих к кривым*** L_1 и G_1. arg Δz и arg Δw - имеют геометрический смысл ***углов*** соответствующих векторов с положительными направлениями осей абсцисс на комплексных плоскостях z и w соответственно, а |Δz| и |Δw|- ***длины*** этих векторов. При $\Delta z \to 0$ вектора секущих переходят в вектора касательных к соответствующим кривым.





$|\Delta w|=k|\Delta z|+o(|\Delta z|^2)$, $k=|f(z_0)|$ не зависит от выбора L_1.

<u>Геометрический смысл</u> $|f(z_0)|$: При аналитическом отображении $w= f(z)$ и условии $f(z_0)\neq 0$, $z_0 \in L$ ***бесконечно малые линейные элементы преобразуются подобным образом*, причем $|f(z_0)|$- *коэффициент преобразования подобия*** - это свойство носит название

a) ***Свойство постоянства растяжения.***

$\alpha =\arg f'(z_0)= \lim\limits_{\Delta z\to 0} \arg(\Delta w) - \lim\limits_{\Delta z\to 0} \arg(\Delta z) = \Phi_1 - \varphi_1$.

<u>Геометрический смысл</u> $\arg f(z_0)$: Разность угла Φ_1 (угол между касательной к кривой G_1 и положительным направлением оси u на плоскости w) и угла φ_1 (угол между касательной к кривой L_1 и положительным направлением оси x на плоскости z)

Тогда $\Phi_1 = \varphi_1+\alpha$. Другими словами, ***аргумент производной*** $\arg f'(z_0)$ в точке z_0 ***определяет величину угла*, на который нужно повернуть касательную к** любой гладкой кривой L , проходящей через точку z_0, чтобы получить касательную к образу этой кривой в точке $w_0=f(z_0)$.

Т.к. $\alpha =\arg f'(z_0)$ не зависит от выбора L_1, то для любого $L_2 : z_0 \in L_2 : \Phi_2 = \varphi_2+\alpha$. Следовательно $\Phi = \Phi_2 - \Phi_1 = \varphi_2 - \varphi_1=\varphi$ (сохраняется величина и направление углов).

b) ***Свойство сохранения углов.***

<u>Определение</u> Отображение окрестности точки z_0 на окрестность точки w_0, обладающее свойствами сохранения углов и постоянства растяжений называется ***конформным отображением*** в точке z_0.

Тогда бесконечно малая окружность переходит в бесконечно малую окружность; бесконечно малый треугольник переходит в бесконечно малый треугольник.

<u>Основное определение.</u> Непрерывное взаимно однозначное отображение области L комплексной плоскости z на область D комплексной плоскости w, при котором в любой точке z выполняются свойства сохранения углов и постоянства растяжений, называется ***конформным отображением*** L на D.

Теорема Если f(z) аналитичная однозначная и однолистная, и $f(z)\neq 0$, в любой точке $z\in L$, то f(z) осуществляет конформное отображение $L \xleftrightarrow{K} D$.
Теорема. Необходимым и достаточным условием конформности отображения является аналитичность, однозначность и однолистность функции f(z) в L.
Теорема Римана. Основной закон конформных отображений.
Заданы область L комплексной плоскости z и область D комплексной плоскости w. Требуется найти f(z)=w конформно отображающую L на D.
Основные элементарные функции, используемые при конформных отображениях.
a) Степенная $w=f(z)=z^n$, область однолистности $0<\arg z<2\pi/n$.
b) $w=f(z)=1/z$ область однолистности- вся комплексная плоскость. $z \xleftrightarrow{K} w$
c) $w=f(z)=e^z$ область однолистности $-\pi <\mathrm{Im}\, z<\pi$.
d) Дробно-линейная функция.
$w=f(z)=(az+b)/(cz+d)=\lambda (z+\alpha)/(z+\beta)$ (3 параметра, α,λ,β).
$z=\lambda'(w+\alpha')/(w+\beta')$; $z \xleftrightarrow{K} w$, $f'(z)\neq 0$ для любого z.
1. Геометрический смысл: $f(z)=\lambda [1+(\alpha -\beta)/(z+\beta)]$ - повороты и растяжения, отражение от действительной оси, инверсия.
2. Заданием соответствия 3-м точкам $z_1\leftrightarrow w_1$, $z_2\leftrightarrow w_2$, $z_3\leftrightarrow w_3$, плоскости z трех точек плоскости w, дробно-линейная функция определена однозначно, т.е. коэффициенты λ, α, β однозначно выражаются через 6 заданных комплексных чисел.
3. Свойства дробно-линейной функции.
a) Круговое: $A(x^2+y^2)+Bx+Cy+D=0$; $z=x+iy=1/$□
Окружность на плоскости однозначно определяется заданием 3-х точек. Следовательно, задав $z_i\leftrightarrow w_i$, i=1,2,3 с сохранением направления обхода однозначно определим дробно-линейную функцию, конформно отображающую $g \xleftrightarrow{K} D$.
Функция Жуковского.
$w=f(z)=(1/2)(z+1/z)$-однозначная аналитическая функция в кольце $0<|z|<\infty$;
Два полюса 1-го порядка: z=0 и $z=\infty$.
Области однолистности: $z_1\neq z_2$ и $z_1+1/z_1= z_2+1/z_2 \Rightarrow (z_1-z_2)=(z_1-z_2)/z_1z_2 \Rightarrow z_1z_2=1$.
Области однолистности $|z|<1$ и $|z|>1$.
$f'(z)=(1/2)(1-1/z^2)$; $f'(z_{1,2})=0 \Rightarrow z_{1,2}=\pm 1$.

<u>Образцы заданий к модульной контрольной работе</u>

1. Представить в тригонометрической форме комплексное число $z = -2 + 2\sqrt{3}i$ и найти z^3.
2. Определить область на комплексной плоскости, описываемую системой неравенств: $\begin{cases} 2 \le |z - 1 + 3i| \le 3 \\ \operatorname{Re} z > 1 \end{cases}$.
3. Выделить вещественную и мнимую части, и проверить будет ли аналитична функция $w = e^{2z+\bar{z}}$
4. С помощью интегральной формулы Коши вычислить интеграл
$$\int_L \frac{e^z}{z^2 + 2z} dz, \qquad L: |z| = 1;$$
5. Определить круг сходимости для ряда и исследовать его сходимость в заданных точках.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} z^n \ ; \quad z=1; \quad z=3i; \quad z=-2i;$$
6. Разложить в ряд Лорана функцию $f(z) = z^2 \cos\frac{1}{z}$ в окрестности точки *z=0.*
7. Найти особые точки и определить характер у функции
$$f(z) = e^{\frac{1}{z+2}}$$
8. Вычислить интеграл, используя теорему Коши о вычетах:
$$\int_{|z|=2} \frac{e^z dz}{z^3 (z+1)}$$

Литература

1. Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной. М.: Наука, 1967.
2. Бугров М.С., Никольский С.М. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. М.: Наука, 1985.
3. Привалов И.И. Введение в теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1977.
4. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. М.: Наука, 1981.
5. Араманович И.Г., Лунц Г.Л., Эльгольц А.Э. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. М.: Наука, 1968.
6. Бицадзе А.В. Основы теории аналитических функций комплексного переменного. М.: Наука, 1972.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОЧЕЙ ПРОГРАММЫ