МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ

КЫРГЫЗСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ им. И.РАЗЗАКОВА

Кафедра «Высшая математика»

ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

Предназначены для студентов 1-курса ЭФ и ИУиБ

БИШКЕК – 2011

«Рассмотрено»
на заседании кафедры
«Высшая математика»
им. Р. Усубакунова
Протокол № 10 от 24.05.2011 г.

«Одобрено»
Методическим советом
Энергетического факультета

Протокол № 10 от 1.06.2011 г.

УДК: 514.122.(076)

Составители: САБИРОВ Я.А., ТОКТОГУЛОВА А.Ш.

Элементы линейной алгебры. Предназначены для студентов 1-курса ЭФ и ИУиБ / КГТУ им. И.раззакова; сост.: Я.А.Сабиров, А.Ш.Токтогулова. – Б.: ИЦ «Текник», 2011. – 23 с.

В методических указаниях приведен краткий теоретический материал по «Элементы линейной алгебры». Изложения теоретического материала сопровождается разбором задач. По каждой теме приводится задания для самостоятельной работы.

Предназначены для студентов 1-курса ЭФ и ИУиБ.

Илл.: 2 . Библиогр.: наименов.

Рецензент доц. Сулайманов Б.Э.

Тех. редактор ***Субанбердиева Н.Е.***

Подписано к печати 14.06.2011 г. Формат бумаги 60x84 $^{1}/_{16}$.
Бумага офс. Печать офс. Объем 1,75 п.л. Тираж 100 экз. Заказ 244. Цена 24,6 с.

Бишкек, ул. Сухомлинова, 20. ИЦ "Текник" КГТУ им. И.Раззакова, т.: 54-29-43
e-mail: beknur@mail.ru

Введение

Элементы линейной алгебры - один из разделов математики. Он имеет важнейшее значение для инженеров, так как значительная часть математических моделей экономических объектов и процессов записываются в виде систем линейных алгебраических уравнений с несколькими неизвестными, которые исследуются методами линейной алгебры.
В этой главе исследуются системы линейных уравнений, вводятся основные понятия, связанные с определителями и матрицами.

§1. Матрицы. Основные определения

Понятие матрица впервые появилось в середине XIX века в работах английских математиков У. Гамильтона (1805-1865г.г.) и А.Кэли (1821-1895 г.г.). Это понятие в настоящее время широко используется в экономике. Матрицы значительно упрощают решение сложных систем уравнений.

Начнем с формальных определений, целесообразность которых постепенно станет ясной.

Определение. **Матрицей** размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица чисел, содержащая m строк и n столбцов. Числа, составляющие матрицу, называются **элементами** матрицы.

Матрицы обозначаются прописными (заглавными) буквами латинского алфавита, например, $A, B, C, \ldots$. Элементы матрицы обозначаются строчными буквами с двойной индексацией: a_{ij}, где i – номер строки, j – номер столбца. Например, матрица

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mj} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

или, в сокращенной записи, $A = (a_{ij}); i = 1,2,\ldots,m; j = 1,2,\ldots,n.$

Например, $A_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix}$.

Определение. Две матрицы A и B одного размера называются **равными**, если они совпадают поэлементно, т.е. $a_{ij} = b_{ij}$ для любых $i = 1,2,\ldots,m; j = 1,2,\ldots,n.$

С помощью матриц удобно записывать некоторые экономические зависимости. Например, таблица 1 распределения ресурсов по отдельным отраслям экономики (усл.ед.)

Таблица 1

Ресурсы	Отрасли экономики	
	промышленность	сельское хозяйство
Электроэнергия	5	4
Трудовые ресурсы	2,8	2,1
Водные ресурсы	4,5	5,3

Может быть записана в виде матрицы распределения ресурсов по отраслям

$$A_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2,8 & 2,1 \\ 4,5 & 5,3 \end{pmatrix}$$

В этой записи, например, элемент $a_{11} = 5$ показывает, сколько электроэнергии потребляет промышленность, а элемент $a_{22} = 2{,}1$ - сколько трудовых ресурсов потребляет сельское хозяйство.

Виды матриц. Определение. Матрица называется **квадратной n – го порядка,** если число ее строк равно числу столбцов и равно n**.**

Например,

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ - квадратная матрица третьего порядка.

Определение. Элементы квадратной матрицы a_{ij}, у которых номер столбца равен номеру строки $(i = j)$, образуют **главную** диагональ матрицы. Для квадратной матрицы третьего порядка главную диагональ образуют элементы a_{11}, a_{22}, a_{33}. Элементы a_{13}, a_{22}, a_{31} образуют **второстепенную (побочную)** диагональ квадратной матрицы третьего порядка.

Определение. Квадратная матрица, у которой отличны от нуля только элементы, стоящие на главной диагонали, называется **диагональной.** Например,

$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ - диагональная матрица третьего порядка.

Определение. Диагональная матрица, у которой все элементы главной диагонали- единицы, называется **единичной.** Она обозначается буквой E. Например,

$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ - единичная матрица третьего порядка.

Определение. Матрица, состоящая из одной строки, называется **матрицей (вектором)-строкой,** а из одного столбца – **матрицей (вектором)- столбцом.** Так, $A = (a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n})$ - матрица-строка.

$B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \cdots \\ b_{m1} \end{pmatrix}$ - матрица-столбец.

Определение. Матрица любого размера называется **нулевой** или **нуль - матрицей,** если все ее элементы равны нулю.

$$O_{m\times n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots} \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}.$$

§2. Действия над матрицами

1. Сложение матриц. Суммой двух матриц A и B одинакового размера $m \times n$ называется матрица $C = A + B$, элементы которой $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, для $i = 1,2,...,m; j = 1,2,...,n.$ (т.е. матрицы складываются поэлементно).

Например, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, $C = A + B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 3 & 8 & 5 \end{pmatrix}$.

В частном случае, $A + O = A$.

2. Вычитание матриц. Разностью двух матриц A и B одинакового размера называется матрица $C = A - B$, элементы которой $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$, для $i = 1,2,...,m;\ j = 1,2,...,n.$

3. Умножение матрицы на число. Произведением матрицы A на число λ называется матрица $B = \lambda A$, элементы которой $b_{ij} = \lambda a_{ij}$ для $i = 1,2,...,m;\ j = 1,2,...,n.$

Например, если $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, то $5 \cdot A = \begin{pmatrix} 15 & 20 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}$.

Следствие. Общий множитель всех элементов матрицы можно выносить за знак матрицы.

Например, $\begin{pmatrix} 8 & 10 & 12 \\ 6 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Умножение матриц. Умножение матрицы A **на матрицу** B определено, если число столбцов первой матрицы A равно числу строк второй матрицы B. Матрица- произведение имеет столько строк, сколько их у матрицы A и столько столбцов, сколько их у матрицы B.

Определение. Произведением матриц $A_{m\times k} \cdot B_{k\times n}$ называется матрица $C_{m\times n}$, каждый элемент которой c_{ij} равен сумме произведений $i-$той строки матрицы A на соответствующие элементы j-того столбца матрицы B:

$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + ... + a_{ik} \cdot b_{kj}$.

Пример 1. Вычислить произведение матриц $A \cdot B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Замечаем, что умножение возможно, так как число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B. Матрица-произведение $C = A \cdot B$ будет иметь 2 строки и 3 столбца, т.е. $A_{2\times 3} \cdot B_{3\times 3} = C_{2\times 3}$. Имеем

$$C = \begin{pmatrix} 1\cdot(-1) + 0\cdot 5 + 2\cdot(-2) & 1\cdot 0 + 0\cdot 1 + 2\cdot 0 & 1\cdot 1 + 0\cdot 4 + 2\cdot 1 \\ 3\cdot(-1) + 1\cdot 5 + 0(-2) & 3\cdot 0 + 1\cdot 1 + 0\cdot 0 & 3\cdot 1 + 1\cdot 4 + 0\cdot 1 \end{pmatrix}.$$

Итак, $C = A \cdot B = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$.

Многие свойства операций над числами справедливы и для операций над матрицами (что следует из определения этих операций):

1) $A + B = B + A$.
2) $(A + B) + C = A + (B + C)$.
3) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$.
4) $A(B + C) = AB + AC$.
5) $(A + B)\cdot C = AC + BC$.
6) $\lambda(AB) = (\lambda A)\cdot B = A\cdot(\lambda B)$.
7) $A\cdot(BC) = (AB)\cdot C$.

Однако имеются и специфические свойства матриц. Так, операция умножения матриц имеет некоторые отличия от умножения чисел:

1)Если произведение матриц $A \cdot B$ существует, то после перестановки сомножителей местами произведение матриц $B \cdot A$ может и не существовать.

2) Если даже произведения $A \cdot B$ и $B \cdot A$ существуют, то они могут быть матрицами разных размеров.

3) Если произведения $A \cdot B$ и $B \cdot A$ существуют и оба-матрицы одинакового размера (это возможно только при умножении квадратных матриц одного порядка),то переместительный закон умножения, вообще говоря, не выполняется, т.е. $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Определение. Если $A \cdot B = B \cdot A$, то матрицы называются перестановочными.

В частности, переместительным законом обладает произведение любой квадратной матрицы A n-го порядка на единичную матрицу E того же порядка, причем это произведение равно A: $AE = EA = A$.

Таким образом, единичная матрица играет при умножении ту же роль, что и число 1 при умножении чисел.

4) Произведение двух ненулевых матриц может равняться нулевой матрице, т.е. из того, что $A \cdot B = 0$, не следует, что $A = 0$, или $B = 0$. Например,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq 0; B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \neq 0, \text{ но } A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

5. Возведение в степень.

Определение. Целой положительной степенью $A^m (m > 1)$ квадратной матрицы A называется произведение m матриц, равных A **,**т.е. $A^m = \underbrace{A \cdot A \cdot ... \cdot A}_{m\ раз}$.

Заметим, что операция возведения в степень определяется только для квадратных матриц.

По определению полагают $A^0 = E, A^1 = A$. Можно показать, что $A^m \cdot A^k = A^{m+k}, (A^m)^k = A^{mk}$. Отметим, что из равенства $A^m = 0$, еще не следует, что $A = 0$.

6. Транспонирование матриц – это переход от матрицы A к матрице A^T, в которой строки и столбцы поменялись местами. Матрица A^T называется транспонированной.

Например, $A_{2\times3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $A^T_{3\times2} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

Свойства операции транспонирования:

1) $(A^T)^T = A$;

2) $(\lambda A)^T = \lambda A^T$;

3) $(A + B)^T = A^T + B^T$;

4) $(AB)^T = B^T A^T$.

Пример 2. Предприятие выпускает продукцию трех видов P_1, P_2, P_3 и использует сырье двух типов S_1 и S_2. Нормы расхода сырья характеризуются матрицей $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, где каждый элемент $a_{ij} (i = 1,2,3; j = 1,2)$ показывает, сколько единиц сырья j – го типа расходуется на производство единицы продукции i – го вида. План выпуска продукции задан матрицей-строкой $C = (100,80,130)$ стоимость единицы каждого типа сырья (ден.ед.)- матрицей-столбцом $B = \begin{pmatrix} 30 \\ 50 \end{pmatrix}$.

Определить затраты сырья, необходимые для планового выпуска продукции, и общую стоимость сырья.

Решение. Затраты 1-го сырья составляют: $S_1 = 2 \cdot 100 + 3 \cdot 80 + 1 \cdot 130 = 730$ ед. и 2-го - $S_2 = 3 \cdot 100 + 2 \cdot 80 + 4 \cdot 130 = 980$ ед., поэтому матрица-строка затрат сырья S может быть записана как произведение $S = C \cdot A = \begin{pmatrix} 100 & 80 & 130 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 730 & 980 \end{pmatrix}$. Тогда общая стоимость сырья $Q = 730 \cdot 30 + 980 \cdot 50 = 70900$ ден.ед. может быть записана в матричном виде $Q = S \cdot B = (C \cdot A) \cdot B = (70900)$. Общую стоимость сырья можно вычислить и в другом порядке: в начале вычислим матрицу стоимостей затрат сырья на единицу продукции, т.е. матрицу

$R = A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 210 \\ 250 \\ 230 \end{pmatrix}$, а затем общую стоимость сырья

$$Q = C \cdot R = C \cdot (AB) = \begin{pmatrix} 100 & 80 & 130 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 210 \\ 250 \\ 230 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 70900 \end{pmatrix}.$$

На этом примере мы убедились в выполнении ассоциативного закона произведения матриц: $(CA) \cdot B = C \cdot (AB)$.

§3. Определители, их свойства

Основы теории определителей заложены в 1750 г. швейцарским математиком Г.К. Крамером (1704-1752).

Каждой квадратной матрице ставится в соответствие число, которое называется **определителем** или **детерминантом** этой матрицы. Определитель матрицы A обозначается Δ, или $\det A$, или $|A|$.

Определение. Определителем матрицы первого порядка $A = (a_{11})$**, или определителем первого порядка**, называется элемент a_{11}: $\Delta = \det A = a_{11}$. Например, пусть $A = (4)$, тогда $\Delta = 4$.

Определение. Определителем матрицы второго порядка $A = (a_{ij})_{2 \times 2}$**, или определителем второго порядка**, называется число, которое вычисляется по формуле:

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

Например, $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$, тогда $\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 2 \cdot 7 - 3 \cdot 3 = 5$.

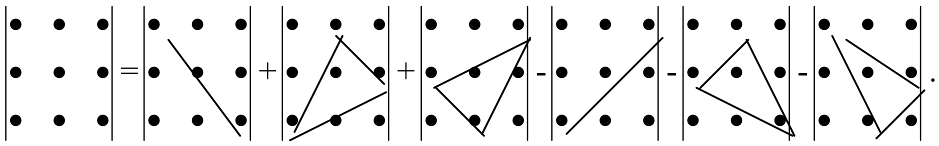
Пусть дана квадратная матрица третьего порядка:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Определение. Определителем матрицы третьего порядка, или **определителем третьего порядка**, называется число, которое вычисляется по формуле:

$$\Delta = \det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33} - a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11}.$$

Это число представляет алгебраическую сумму, состоящую из 6 слагаемых. Чтобы лучше запомнить эту формулу, воспользуемся схемой:



Эта схема носит название: **правило треугольника**

Пример 1. Вычислить определитель матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение. $\Delta = 1 \cdot 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 1 = 5$.

Отметим, что определитель единичной матрицы равен единице: $|E| = 1$.

При вычислении определителей используют их свойства. Мы будем излагать свойства определителей на примере определителей третьего порядка, хотя все эти свойства справедливы для определителей любого порядка.

1. При транспонировании матрицы ее определитель не изменяется: $\det A^T = \det A$. Доказывается свойство непосредственной проверкой.

2. При перестановке двух параллельных рядов определителя (строк или столбцов) определитель изменит знак на противоположный. Например, $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$. Переставили первый и третий столбцы.

3. Определитель с двумя одинаковыми параллельными рядами равен нулю. Например, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0$ (первая и вторая строки одинаковы).

4. Общий множитель всех элементов одного ряда можно выносить за знак определителя. Например, $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$. Из первой строки вынесли за знак определителя общий множитель 3.

5. Определитель, имеющий нулевой ряд, равен нулю.

6. Если соответствующие элементы двух параллельных рядов пропорциональны, то определитель равен нулю.

Действительно, пусть для определенности пропорциональны первая и вторая строки. Тогда, вынося коэффициент пропорциональности λ, получаем λ, умноженный на определитель, имеющий две одинаковые строки (первую и вторую). По свойству 3 этот определитель равен нулю.

7. Определитель не изменится, если к элементам какого-либо ряда прибавить соответствующие элементы параллельного ряда, умноженные на какое-то число.

Это свойство позволяет некоторые элементы определителя превращать в нули. Например, вычислить

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 3 \\ 2 & 7 & 4 \end{vmatrix}.$$

Этот определитель не содержит нулей. Их легко получить на основании свойства 7. Умножим первую строку на два и сложим со второй строкой. Затем умножим первую строку на (-2) и сложим с третьей строкой. Получим

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 3 \\ 2 & 7 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -6 - 27 = -33.$$

Чем больше нулей содержит определитель, тем легче его вычислять.

Введем новые понятия. Пусть дана квадратная матрица A n-го порядка.

Определение. Минором M_{ij} элемента a_{ij} матрицы n-го порядка называется определитель матрицы $(n-1)$-го порядка, полученный из матрицы A вычеркиванием $i-$й строки и $j-$го столбца.

Например, минором элемента a_{12} матрицы A третьего порядка будет:

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}.$$

Определение. Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} матрицы n-го порядка называется его минор, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$,т.е.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij},$$

т.е. алгебраическое дополнение совпадает с минором, когда сумма индексов строки и столбца $(i+j)$-четное число, и отличается от минора знаком, когда $(i+j)$-нечетное число.

Например, $A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot M_{23} = -M_{23}$, $A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot M_{31} = M_{31}$.

Продолжим рассмотрение свойств определителей.

8. Определитель квадратной матрицы равен сумме произведений элементов какого-нибудь ряда на соответствующие их алгебраические дополнения: $\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}$ - это разложение определителя по элементам $i-$той строки, $i = 1,2,\ldots,n$; $\Delta = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}$ - это разложение определителя по элементам $j-$го столбца.

Пример 2. Вычислить $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 3 \\ 2 & 7 & 4 \end{vmatrix}$ путем разложения его по элементам, например, 3-го столбца.

Решение.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 3 \\ 2 & 7 & 4 \end{vmatrix} = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33} = a_{13}M_{13} - a_{23}M_{23} + a_{33}M_{33} = 3 \cdot \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} -$$

$$-\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-14+2) - 3 \cdot (7-4) + 4 \cdot (-1+4) = -33.$$

Используя свойство 7, затем 8, можно привести определитель 3-го порядка к одному определителю 2-го порядка.

Пример 3. Вычислить

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

Решение. Используем свойство 7. К элементам 2-й строки прибавим соответствующие элементы 1-й строки, умноженные на (-1). Затем к элементам 3-й строки прибавим элементы 1-й строки, умноженные на (-2). Получим

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Теперь к элементам 3-ей строки прибавим элементы 2-й строки, умноженные на (-1), получим

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$. Разложим по элементам 1-го столбца, получим

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} = a_{11}M_{11} - a_{21}M_{21} + a_{31}M_{31} = 1 \cdot M_{11} + 0 \cdot M_{21} + 0 \cdot M_{31} =$$

$= M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$

При вычислении определителя, используя его свойства, целесообразно преобразовать его таким образом, чтобы он имел элементы какого-либо ряда, равными нулю, кроме одного. Затем разложить его по элементам этого ряда. Таким образом, можно понизить порядок определителя.

9. Сумма произведений элементов какого-либо ряда определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов параллельного ряда равна нулю.

Например, сумма произведений элементов первой строки на алгебраические дополнения соответствующих элементов второй строки равна нулю: $a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} = 0.$

10. Определитель произведения двух квадратных матриц равен произведению их определителей:
A и B - матрицы $n-$го порядка, то $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$.

11. Сумма произведений произвольных чисел $b_1, b_2, ..., b_n$ на алгебраические дополнения элементов любой строки (столбца) равна определителю матрицы, полученной из данной матрицы заменой элементов этой строки (столбца) на числа $b_1, b_2, ..., b_n$.

§4. Метод приведения определителя к треугольному виду

Определение. Определитель называется определителем треугольного вида, если все его элементы, стоящие по одну сторону главной диагонали (побочной диагонали) равны нулю.

Например,

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Метод приведения определителя к треугольному виду заключается в следующем: используя свойства, определитель преобразуется так, что все элементы по одну сторону главной диагонали стали равны нулю. Тогда значение определителя будет равно произведению элементов главной диагонали.

Пример. Вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{vmatrix}$$

Решение. Элементы третьей строки прибавим к элементам четвертой строки, получим определитель треугольного вида

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-1) \cdot 3 \cdot 1 = -15.$$

Если все элементы определителя, лежащие по одну сторону от второстепенной диагонали, равны нулю, то определитель будет равен произведению элементов второстепенной диагонали, взятому со знаком $(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}$, где $n-$порядок определителя. Например,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ -2 & 1 & 4 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{1}{2}\cdot 4(4-1)} \cdot 5 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 1 = 40.$$

Заметим, что метод приведения определителя к треугольному виду особенно удобен при вычислении определителей более высоких порядков.

§5. Обратная матрица

Для каждого числа $a \neq 0$ существует обратное число a^{-1} такое, что произведение $a \cdot a^{-1} = 1$. Для квадратных матриц вводится аналогичное понятие.

Определение. Матрица A^{-1} называется обратной по отношению к квадратной матрице A, если при умножении этой матрицы на данную как справа, так и слева получается единичная матрица:
$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$.
Из определения следует, что только квадратная матрица имеет обратную; в этом случае и обратная матрица является квадратной того же порядка.

Отметим, что не каждая квадратная матрица имеет обратную. Для существования матрицы A^{-1} является требование $|A| \neq 0$.

Определение. Если $|A| \neq 0$, то квадратная матрица A называется невырожденной, или неособенной, в противном случае (при $|A| = 0$)- вырожденной, или особенной.

Теорема (необходимое и достаточное условие существования обратной матрицы). Обратная матрица A^{-1} существует (и единственна) тогда и только тогда, когда матрица A невырожденная.

Необходимость. Пусть матрица A имеет обратную A^{-1},т.е. $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$. По свойству 10 определителей имеем $|A \cdot A^{-1}| = |A| \cdot |A^{-1}| = E = 1$, т.е. $|A| \neq 0$ и $|A^{-1}| \neq 0$. Доказательство достаточности опускаем. Можно показать, что обратную матрицу A^{-1} для квадратной матрицы A третьего порядка (для простоты) можно найти по формуле:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}, \qquad (5.1)$$

где A_{ij} - алгебраическое дополнение элемента a_{ij} матрицы A.

Пример 1. Найти матрицу, обратную матрице $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение. Так как

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -3 - 2 = -5 \neq 0,$$

то матрица A невырожденная и имеет обратную матрицу A^{-1}. Находим алгебраические дополнения элементов матрицы A.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3; \quad A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1;$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 2\end{vmatrix}=-3;\ A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=1;\quad A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=2;$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix}=2;\ A_{32}=(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=1;\quad A_{33}=(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-3.$$

По формуле (5.1) $$A^{-1}=\frac{1}{-5}\begin{pmatrix}-1 & -3 & 2\\ -3 & 1 & 1\\ -1 & 2 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5}\\ \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5}\\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{3}{5}\end{pmatrix}.$$

§6. Системы линейных уравнений. Метод обратной матрицы и формулы Крамера

Рассмотрим систему n линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1j}x_j+\ldots+a_{1n}x_n=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2j}x_j+\ldots+a_{2n}x_n=b_2,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots+a_{ij}x_j+\ldots+a_{in}x_n=b_i,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nj}x_j+\ldots+a_{nn}x_n=b_n.\end{cases}\tag{6.1}$$

где $a_{ij}, b_i (i, j=1,\ldots,n)$ - произвольные числа, называемые соответственно коэффициентами при неизвестных и свободными членами уравнений. Система называется неоднородной, если хотя бы один из свободных членов не равен нулю. В противном случае система называется однородной.

Решением системы (6.1) называется совокупность чисел $x_j=k_j$, $(j=1,2,\ldots,n)$, при подстановке которых каждое уравнение системы обращается в верное равенство.

Система уравнений называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение, и несовместной, если она не имеет решений.

Совместная система уравнений называется определенной, если она имеет единственное решение, и неопределенной, если решений –бесконечное множество.

Пусть система (6.1) неоднородная. Запишем систему (6.1) в матричной форме. Обозначим

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\ldots a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}\ldots a_{2n}\\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\\ a_{n1} & a_{n2}\ldots a_{nn}\end{pmatrix};X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \ldots\\ x_n\end{pmatrix};B=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ \ldots\\ b_n\end{pmatrix},$$

где A - матрица коэффициентов при неизвестных, или матрица системы; X - матрица-столбец неизвестных; B - матрица-столбец свободных членов.

Имеем

$$AX=\begin{pmatrix}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n\end{pmatrix}$$ - матрица - столбец.

Элементами полученной матрицы являются левые части системы (6.1). На основании определения равенства матриц систему (6.1) можно записать в матричном виде:

$$AX = B \tag{6.2}$$

Предположим, что матрица A невырожденная, т.е. $|A| \neq 0$. В этом случае существует обратная матрица A^{-1}. Умножим слева обе части (6.2) на A^{-1}, получим $A^{-1}(AX) = A^{-1}B$. Так как $A^{-1}(AX) = (A^{-1}A)X = EX = X$, то **решением системы методом обратной матрицы** будет матрица-столбец

$$X = A^{-1} \cdot B \tag{6.3}$$

Теорема Крамера. Пусть Δ - определитель матрицы системы A, а Δ_j - определитель матрицы, получаемый из матрицы A заменой j-го столбца столбцом свободных членов. Тогда, если $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение, определяемое по формулам:

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta},\ (j = 1,2,...,n) \tag{6.4}$$

Формулы (6.4) называются **формулами Крамера.**

Запишем (6.3) в развернутой форме:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \dots A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} \dots A_{n2} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ A_{1n} & A_{2n} \dots A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

После умножения матриц имеем

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} b_1 A_{11} + b_2 A_{21} + \dots + b_n A_{n1} \\ b_1 A_{12} + b_2 A_{22} + \dots + b_n A_{n2} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ b_1 A_{1n} + b_2 A_{2n} + \dots + b_n A_{nn} \end{pmatrix},$$

откуда следует, что для любого $j (j = 1,2,...,n)$

$$x_j = \frac{1}{\Delta}(b_1 A_{1j} + b_2 A_{2j} + \dots + b_n A_{nj}).$$

На основании свойства 11 определителей (см. §3)

$$b_1 A_{1j} + b_2 A_{2j} + \dots + b_n A_{nj} = \Delta_j,$$

где Δ_j - определитель матрицы, полученной из матрицы A заменой j-го столбца $(j = 1,2,...,n)$ столбцом свободных членов. Следовательно, $x_j = \dfrac{\Delta_j}{\Delta}$.

Пример 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 5. \end{cases}$$

а) методом обратной матрицы, б) по формулам Крамера.

Решение. а) Обозначим

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}; \ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \ B = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Тогда в матричной форме данная система будет иметь вид: $AX = B$. Найдем $|A| = -5$ (см. §5, пример 1). Матрицу A^{-1} получим по формуле (5.1) (см. §5, пример 1).

$$A^{-1} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Теперь по формуле (6.7) определим

$$X = A^{-1} \cdot B = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -5 \\ -10 \\ -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

т.е. решение системы $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3.$

б) Так как $|A| = -5 \neq 0,$ то по теореме Крамера система имеет единственное решение.

Вычислим определители матриц $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$, полученных из матрицы A заменой соответственно первого, второго и третьего столбцов столбцом свободных членов:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -5,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -10,\ \Delta_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -15.$$

(рекомендуем вычисления провести самостоятельно).

По формулам Крамера (6.4) определяем

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-5}{-5} = 1;\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-10}{-5} = 2;\ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-15}{-5} = 3.$$

Таким образом, решение системы $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3.$

В конце решения системы рекомендуем сделать проверку, подставив найденные значения в уравнения системы, и убедиться в том, что они обращаются в верные равенства.

Недостатком решения систем n линейных уравнений с n неизвестными по формулам Крамера и методом обратной матрицы является их большая трудоемкость, связанная с вычислением определителей и нахождением обратной матрицы. Поэтому для решения реальных экономических задач, которые сводятся к системам с большим числом уравнений и неизвестных используют другие методы.

§7. Метод Гаусса

Гаусс Фридрих Карл (1777-1855)- немецкий математик. Метод Гаусса- метод последовательных исключений неизвестных. Рассмотрим систему m линейных уравнений с n переменными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n = b_i, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mj}x_j + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{7.1}$$

где $a_{ij}, b_j (i = 1,2,\ldots,m; j = 1,2,\ldots,n)$ - произвольные числа, называемые соответственно коэффициентами при неизвестных и свободными членами уравнений.

Определение. Элементарными преобразованиями системы уравнений (7.1) называются:

1) перестановка местами двух любых уравнений;
2) умножение обеих частей любого из уравнений на произвольное число, отличное от нуля;
3) прибавление к обеим частям одного из уравнений системы соответствующих частей другого уравнения, умноженных на любое действительное число.

Определение. Две совместные системы называются равносильными, или эквивалентными, если каждое решение первой системы является решением второй и, наоборот, каждое решение второй системы является решением первой.

Доказано, что элементарные преобразования системы уравнений переводят данную систему в систему ей эквивалентную.

Суть метода Гаусса состоит в том, что с помощью элементарных преобразований система уравнений приводится к равносильной системе ступенчатого (или треугольного) вида, из которой последовательно, начиная с последних (по номеру) неизвестных, находятся все остальные неизвестные.

Предположим, что в системе (7.1) коэффициент при x_1 в первом уравнении $a_{11} \neq 0$ (если это не так, то перестановкой уравнений местами добьёмся того, чтобы $a_{11} \neq 0$).

Шаг1. Умножая первое уравнение на числа $(-a_{21}/a_{11}, -a_{31}/a_{11}, ..., -a_{m1}/a_{11})$ и прибавляя полученные уравнения соответственно ко второму, третьему,…, m-му уравнению системы (7.1), исключаем неизвестное x_1 из всех последующих уравнений, начиная со второго. В результате получим систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + ... + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad a_{i2}^{(1)}x_2 + ... + a_{in}^{(1)}x_n = b_i^{(1)}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad a_{m2}^{(1)}x_2 + ... + a_{mn}^{(1)}x_n = b_m^{(1)}, \end{cases} \tag{7.2}$$

где буквами с верхним индексом «(1)» обозначены новые коэффициенты, полученные после шага 1.

Шаг 2. Предположим, что $a_{22}^{(1)} \neq 0$ (если это не так, то перестановкой уравнений добиваемся того, чтобы $a_{22}^{(1)} \neq 0$). Умножая второе уравнение системы (7.2) на числа $(-a_{32}^{(1)}/a_{22}^{(1)}, -a_{42}^{(1)}/a_{22}^{(1)}, ..., -a_{n2}^{(1)}/a_{22}^{(1)})$ и прибавляя полученные уравнения соответственно к третьему, четвертому,…, m-му уравнению системы (7.2), исключим неизвестное x_2 из всех последующих уравнений, начиная с третьего.

Продолжая процесс последовательного исключения неизвестных $x_3, x_4, ..., x_{r-1}$, после $(r-1)$-го шага получим систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1r}x_r + a_{1\,r+1}x_{r+1} + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + ... + a_{2r}^{(1)}x_r + a_{1\,r+1}^{(1)}x_{r+1} + ... + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad a_{rr}^{(r-1)}x_r + a_{r\,r+1}^{(r-1)}x_{r+1} + ... + a_{rn}^{(r-1)}x_n = b_r^{(1)}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad\qquad 0 = b_{r+1}^{(r-1)}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad\qquad 0 = b_m^{(r-1)}. \end{cases} \tag{7.3}$$

Число нуль в последних $m-r$ уравнениях означает, что их левые части имеют вид $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + ... + 0 \cdot x_r$. Если хотя бы одно из чисел $b_{r+1}^{(r-1)}, ..., b_m^{(r-1)}$ не равно нулю, то соответствующее равенство противоречиво и система (7.1) несовместна.

Таким образом, для любой совместной системы числа $b_{r+1}^{(r-1)}, ..., b_m^{(r-1)}$ в системе (7.3) **равны нулю.** В этом случае последние $m-r$ уравнений системы (7.3) являются тождествами и их можно не принимать во внимание при решении системы (7.1). Ясно, что после отбрасывания «лишних» уравнений возможны два случая: а) число уравнений системы (7.3) равно числу неизвестных, т.е. $r = n$ (в этом случае система (7.3) имеет треугольный вид); б) $r < n$ (в этом случае система (7.3) имеет ступенчатый вид). Переход системы (7.1) к равносильной системе (7.3) называется **прямым ходом** метода Гаусса, а нахождение неизвестных из системы (7.3)- **обратным ходом.**

На практике преобразования Гаусса удобно проводить, осуществляя их не с самими уравнениями, а со строками матрицы

$$(A/B) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\ldots a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22}\ldots a_{2n} & b_2 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2}\ldots a_{mn} & b_m \end{pmatrix}, \qquad (7.4)$$

которая называется **расширенной матрицей системы (7.1)**, так как в нее кроме матрицы системы A, включен столбец свободных членов B.

Пример 1. Решить систему уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6, \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 18, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4. \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -8. \end{cases}$$

Решение. Расширенная матрица системы имеет вид

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 2 & 4 & -2 & -3 & 18 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 2 & 1 & -8 \end{array}\right)$$

Шаг 1. Так как $a_{11} = 1 \neq 0$, то умножая первую строку матрицы на числа (-2),(-3),(-2) прибавляя полученные строки соответственно ко второй, третьей, четвертой строкам, исключаем неизвестное x_1 из всех строк, начиная со второй.

Заметив, что в новой матрице $a_{22}^{(1)} = 0$, поменяем местами вторую и третью строки:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & 20 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & -20 \end{array}\right)$$

Шаг 2. Так как $a_{22}^{(1)} = -4 \neq 0$, то умножая вторую строку на $(-7/4)$ и прибавляя полученную строку к четвертой, исключаем неизвестное x_2 из всех строк, начиная с третьей:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & \dfrac{27}{2} & -9 & \dfrac{9}{2} \end{array}\right)$$

Шаг 3. Учитывая, что $a_{33}^{(2)} = -8 \neq 0$, умножаем третью строку на $-\dfrac{27}{16}$, и прибавляя полученную строку к четвертой, исключаем из нее неизвестное x_3:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -\dfrac{117}{16} & \dfrac{117}{8} \end{array}\right).$$

Получили систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6, \\ \quad -4x_2 - 10x_3 + 8x_4 = -14, \\ \qquad -8x_3 + x_4 = 6, \\ \qquad\quad -\dfrac{117}{16}x_4 = \dfrac{117}{8}. \end{cases}$$

откуда, используя обратный ход метода Гаусса, найдем из четвертого уравнения $x_4 = -2$, из третьего - $x_3 = \dfrac{6 - x_4}{-8} = \dfrac{6+2}{-8} = -1$; из второго- $x_3 = \dfrac{-14 - 8x_4 + 10x_3}{-4} = \dfrac{-14 - 8(-2) + 10(-1)}{-4} = 2$ и из первого уравнения- $x_1 = 6 + 2x_4 - 3x_3 - 2x_2 = 6 + 2\cdot(-2) - 3\cdot(-1) - 2\cdot 2 = 1$,т.е. решение системы $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = -1, x_4 = -2.$

Замечание. Обратный ход метода Гаусса можно также провести с расширенной матрицей полученной системы. Для этого ее приводят к диагональному виду, что позволяет осуществить полное выделение неизвестных, удобное для их нахождения.

Если на прямом ходе с помощью первой, второй и т.д. строки мы добивались получения нулевых элементов **ниже** главной диагонали, то на обратном ходе с помощью последней, предпоследней и т.д. строки добиваемся получения нулевых элементов **выше** главной диагонали матрицы.

Преобразуем расширенную матрицу системы, полученную в конце прямого хода, в которой последнюю строку умножим на $\dfrac{16}{117}$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right) 1 \;\; 8 \;\; -2 \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & -10 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -8 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right) -\frac{5}{4} \;\; \frac{3}{8} \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & -8 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right) \frac{1}{2} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & -8 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right).$$

На основе последней матрицы составляем систему, равносильную исходной:

$$\begin{cases} x_1 = 1, \\ -4x_2 = -8, \\ -8x_3 = 8, \\ -x_4 = 2. \end{cases}$$

Таким образом, решение системы $x_1 = 1; x_2 = 2;\ x_3 = -1; x_4 = -2.$

Пример 2. Решить систему уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 7, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 3, \\ 4x_1 + \ x_2 - x_3 = 16. \end{cases}$$

Решение. Преобразуем расширенную матрицу системы

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 7 \\ 2 & -3 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -1 & 16 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & -7 & 3 & -11 \\ 0 & -7 & 3 & -12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & -7 & 3 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Замечаем, что уравнение, соответствующее третьей строке последней матрицы, противоречиво, так как в результате преобразований получено неверное равенство: 0=-1, следовательно, данная система несовместна.

Пример 3. Фабрика выпускает три вида обуви: сапоги, кроссовки и ботинки, при этом используется сырьё трех типов S_1, S_2, S_3. Норма расхода каждого из них на одну пару обуви и объем расхода сырья на 1 день указаны в таблице 2.

Таблица 2.

Вид сырья	Нормы расхода сырья на одну пару			Расход сырья на 1 день усл. ед.
	Сапог	Кроссовок	Ботинок	
S_1	5	3	4	2700
S_2	2	1	1	900
S_3	3	2	2	1600

Найти ежедневный объем выпуска каждого вида обуви.

Решение. Пусть ежедневно фабрика выпускает x_1 пар сапог, x_2 пар кроссовок и x_3 пар ботинок. Тогда в соответствии с расходом сырья каждого вида имеем систему:

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 2700, \\ 2x_1 + \ x_2 + \ \ x_3 = 900, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1600. \end{cases}$$

Решим систему, например, методом Гаусса.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 3 & 4 & 2700 \\ 2 & 1 & 1 & 900 \\ 3 & 2 & 2 & 1600 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ -2 \\ \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 900 \\ 2 & 1 & 1 & 900 \\ 3 & 2 & 2 & 1600 \end{array}\right) \begin{matrix} -2 \ \ -3 \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 900 \\ 0 & -1 & -3 & -900 \\ 0 & -1 & -4 & -1100 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 900 \\ 0 & 1 & 3 & 900 \\ 0 & 1 & 4 & 1100 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ -1 \\ \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 900 \\ 0 & 1 & 3 & 900 \\ 0 & 0 & 1 & 200 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ -3 \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 900 \\ 0 & 1 & 0 & 300 \\ 0 & 0 & 1 & 200 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ -1 \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 600 \\ 0 & 1 & 0 & 300 \\ 0 & 0 & 1 & 200 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ -2 \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 200 \\ 0 & 1 & 0 & 300 \\ 0 & 0 & 1 & 200 \end{array}\right).$$

Получили $x_1 = 200, x_2 = 300, x_3 = 200.$ Таким образом, фабрика ежедневно выпускает 200 пар сапог, 300- кроссовок и 200 пар ботинок.

§8. Ранг матрицы

Пусть дана матрица A размерности $m \times n$.

Определение. Минором k-го порядка M_k **(**где $k < m, k < n$) данной матрицы называется определитель квадратной матрицы k-го порядка, полученной из данной вычеркиванием каких-то ее строк и столбцов.

Например. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Имеем $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$, $M_2 = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}$, $M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix}$.

Определение. Рангом матрицы A $r(A)$ называется наивысший из порядков ее миноров, отличных от нуля.

Пример 1. Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ найти $r(A)$**.**

Решение. Имеем

$M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 0$, $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$. Следовательно, $r(A) = 2$.

Определение. Базисным минором матрицы называется отличный от нуля ее минор, порядок которого равен рангу данной матрицы.

Для ненулевой матрицы существует базисный минор, вообще говоря, не единственный. Так для рассмотренной выше матрицы базисными минорами являются, например,

$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$, $M_2 = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -15 \neq 0$, $M_2 = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -10 \neq 0$, $M_2 = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 30 \neq 0$.

Из определения ранга матрицы A следует:

1) для матрицы $A_{m \times n}$ $r(A)$ не превосходит меньшего из ее размеров, т.е. $r(A) \le \min(m, n)$,

2) $r(A) = 0$ только для нулевой матрицы,

4) для квадратной матрицы A порядка n $r(A) = n$ тогда и только тогда, когда матрица A невырожденная.

Пример 2. Вычислить ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Решение. Для матрицы $A_{3\times 4}$ $r(A) \le \min(3;4) = 3$. Проверим, равен ли ранг трем. Для этого вычислим все миноры третьего порядка. Они получаются при вычеркивании одного из столбцов матрицы:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Так как все миноры третьего порядка нулевые, $r(A) \le 2$. Замечаем, что существует ненулевой минор второго порядка, например,

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -7 \ne 0, \text{ то } r(A) = 2.$$

В общем случае определение ранга матрицы перебором всех миноров трудоемко. Для облегчения используют преобразования, которые сохраняют ранг матрицы.

Определение. Элементарными преобразованиями матрицы называются: 1) отбрасывание нулевой строки (столбца); 2) умножение всех элементов строки (столбца) на число, не равное нулю; 3) изменение порядка строк (столбцов); 4) прибавление к каждому элементу одной строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца), умноженных на любое число; 5) транспонирование.

Теорема. Ранг матрицы не изменяется при ее элементарных преобразованиях.

Две матрицы называются **эквивалентными**, если одна получается из другой с помощью конечного числа элементарных преобразований. Из теоремы следует, что эквивалентные матрицы имеют одинаковые ранги.

С помощью элементарных преобразований можно привести матрицу к так называемому ступенчатому (или треугольному) виду, тогда вычисление ее ранга не представляет труда.

Определение. Матрица A называется **ступенчатой**, если она имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1r} & a_{1k} \\ 0 & a_{22} \ldots a_{2r} & a_{2k} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\ 0 & 0 \ldots\ a_{rr} & a_{rk} \end{pmatrix},$$

где $a_{ii} \ne 0; i = 1,2,\ldots,r; r \le k.$

Ранг ступенчатой матрицы равен r, так как имеется минор $r-$го порядка не равный нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1r} \\ 0 & a_{22} \ldots a_{2r} \\ 0 & 0 \ldots\ a_{rr} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \ldots a_{rr} \ne 0.$$

Пример 3. Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение. Применим элементарные преобразования.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} -2 & -3 & -1 \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -5 & 5 & -6 & -3 \\ 0 & -5 & 5 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -5 & 5 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & -1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -5 & 5 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -5 & 5 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Последняя матрица имеет ступенчатый вид и содержит миноры третьего порядка, не равные нулю, например, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -20 \neq 0$, поэтому ранг полученной ступенчатой, а, следовательно, и данной матрицы $r(A) = 3$.

§9. Решение произвольных систем. Теорема Кронекера-Капелли

Рассмотрим неоднородную систему m уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n = b_i, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mj}x_j + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{9.1}$$

На вопрос о разрешимости системы (9.1) дает теорема:

Теорема Кронекера-Капелли. Система линейных уравнений (9.1) совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы этой системы. Причем: 1) если ранг матрицы совместной системы равен числу неизвестных, т.е. $r = n$, то система (9.1) имеет единственное решение; 2) если ранг матрицы совместной системы меньше числа неизвестных, т.е. $r < n$, то система (9.1) неопределенная и имеет бесконечное множество решений.

Кронекер Леопольд (1823-1891)-немецкий математик; Капелли Альфредо (1855-1910)-итальянский математик.

Определение. Если $r < n$, то **базисными неизвестными** совместной системы называются те, коэффициенты при которых образуют базисный минор матрицы системы. Остальные неизвестные называются **свободными**.

На практике в общем случае для решения системы не обязательно вычислять отдельно, а затем сравнивать ранги матрицы системы A и расширенной матрицы (A/B). Достаточно сразу применить метод Гаусса, который позволит однозначно установить совместна система или нет, а в случае совместности найти ее решение (единственное или бесконечное множество).

Пример 1. Методом Гаусса решить систему

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6. \end{cases}$$

Решение. Преобразуем расширенную матрицу системы (для удобства вычислений переставим местами первую и вторую строки, так как коэффициент при x_1 во второй строке равен 1):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Замечаем, что $r(A) = r(A/B) = 3$. Система имеет единственное решение. Продолжим преобразования. Третью строку прибавим ко второй и к первой, получим

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

откуда, $x_1 = 1, x_2 = 3, x_3 = 2$.

Пример 2. Методом Гаусса решить систему

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 5, \\ 7x_1 - 7x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение. Имеем

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & -3 & 5 \\ 7 & -7 & -2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & -15 & 2 \\ 0 & 14 & -30 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & -15 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -11 \end{pmatrix}.$$

Замечаем, что $r(A) = 2, r(A/B) = 3$. Следовательно, система несовместна.

Пример 3. Методом Гаусса решить систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$$

Решение. Преобразуем расширенную матрицу

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Замечаем, что $r(A) = r(A/B) = 2$,

Следовательно, система имеет бесконечное множество решений. В качестве базисного минора возьмем, например, $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$. Тогда неизвестное x_3- свободное неизвестное, его переносим в правые части уравнений. Получаем систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 - x_3, \\ x_1 \qquad = 1. \end{cases}$$

Затем $x_1 = 1$ подставляем в первое уравнение $1 + x_2 = 1 - x_3$, откуда $x_2 = -x_3$.

Положим $x_3 = C, C \in R$, получим. Ответ: $x_1 = 1, x_2 = -C, x_3 = C, C \in R$.

§10. Системы линейных однородных уравнений

Система линейных однородных уравнений имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mj}x_j + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \qquad (10.1)$$

т.е. в ней все свободные члены равны нулю.

Теорема. Однородная система (10.1) всегда совместна: 1) если в системе $m = n$, а ее определитель отличен от нуля, то такая система имеет только нулевое решение (это следует из формул Крамера); 2) система линейных однородных уравнений имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда ранг ее матрицы меньше числа неизвестных, т.е. $r(A) < n$.

Пример. Решить методом Гаусса систему уравнений

$$\begin{cases} x+2y+3z=0, \\ 2x-3y+4z=0, \\ 3x-\ \ y+7z=0. \end{cases}$$

Решение. Преобразуем матрицу системы

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & -1 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -7 & -2 \\ 0 & -7 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

Пусть z -свободное неизвестное, положим $z=t$, где t - произвольное число. Получим систему

$\begin{cases} x+2y+3z=-3t, \\ \quad 7y \qquad =-2t. \end{cases}$, отсюда $y=-\frac{2}{7}t$, положим $t=7c$, где $c\in R$, тогда $y=-2c, z=7c$. Из первого уравнения последней системы $x=-3t-2y=-3\cdot 7c-2\cdot(-2c)=-21c+4c=-17c$. Таким образом, $x=-17c, y=-2c, z=7c$, где $c\in R$. Придавая c произвольные значения, получим бесконечное множество решений данной системы.

Задачи для упражнений
Вычислить определители, пользуясь определением Определителя 3-го порядка (1-6)

1. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix} 1 & 17 & -7 \\ -1 & 13 & 1 \\ 1 & 7 & 1 \end{vmatrix}$ 3. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 16 \\ 0 & -1 & 10 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ 5. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}$ 6. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix}$

Вычислить определители, пользуясь только свойством 9°.(7-12)

7. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & -3 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix}$ 8. $\begin{vmatrix} 1 & b & 1 \\ 0 & b & 0 \\ b & 0 & -b \end{vmatrix}$ 9. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

10. $\begin{vmatrix} -x & 1 & x \\ 0 & -x & -1 \\ x & 1 & -x \end{vmatrix}$ 11. $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 6 \end{vmatrix}$ 12. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 7 & 2 \\ 2 & 3 & -7 \end{vmatrix}$

В задачах (13-24) упростить и вычислить определители

13. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & -3 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix}$ 14. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -4 & 7 \\ -3 & 12 & -15 \end{vmatrix}$ 15. $\begin{vmatrix} 12 & 6 & -4 \\ 6 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix}$

16. $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 6 & -6 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ 17. $\begin{vmatrix} a & -a & a \\ a & a & -a \\ a & -a & -a \end{vmatrix}$ 18. $\begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ y^2 & y & 1 \\ z^2 & z & 1 \end{vmatrix}$

19. $\begin{vmatrix} 1+\cos\alpha & 1+\sin\alpha & 1 \\ 1-\sin\alpha & 1+\cos\alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ 20. $\begin{vmatrix} 2\cos^2\dfrac{\alpha}{2} & \sin\alpha & 1 \\ 2\cos^2\dfrac{\beta}{2} & \sin\beta & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ 21. $\begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & 3 & 5 \end{vmatrix}$

22. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ 23. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}$ 24. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix}$

Решить уравнения и неравенство (25-30)

25. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & x \\ 4 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0$ 26. $\begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ 27. $\begin{vmatrix} x^2 & 3 & 2 \\ x & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$

28. $\begin{vmatrix} 3 & x & -4 \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ 29. $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & x & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} \prec 0$ 30. $\begin{vmatrix} 2 & x+2 & =1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix} \succ 0$

Решить системы уравнений (31-44)

31. $\begin{cases} 3\chi + 4y = -22 \\ 7\chi - 3y = 35 \end{cases}$ 32. $\begin{cases} 4\chi - 3y = -4 \\ 4y - 10\chi = 3 \end{cases}$ 33. $\begin{cases} 3\chi + 2y = 5 \\ \dfrac{5}{3-2\chi} = \dfrac{2{,}5}{1-y} \end{cases}$

34. $\begin{cases} \dfrac{1}{\chi} = \dfrac{3}{11y-27} \\ \dfrac{\chi+3}{5} = \dfrac{y+8}{11} \end{cases}$ 35. $\begin{cases} \chi + y - z = 36 \\ \chi + z - y = 13 \\ y + z - \chi = 7 \end{cases}$ 36. $\begin{cases} \chi + 2y + z = 4 \\ 3\chi - 5y + 3z = 1 \\ 2\chi + 7y - z = 8 \end{cases}$

37. $\begin{cases} 2\chi - y + z = 2 \\ 3\chi + 2y + 2z = -2 \\ \chi - 2y + z = 1 \end{cases}$ 38. $\begin{cases} \chi + 2y + 3z = 5 \\ 2\chi - y - z = 1 \\ \chi + 3y + 4z = 6 \end{cases}$ 39. $\begin{cases} 2\chi - 4y + 9z = 28 \\ 7\chi + 3y - 6z = -1 \\ 7\chi + 9y - 9z = 5 \end{cases}$

40. $\begin{cases} 2\chi + y = 5 \\ \chi + 3z = 16 \\ 5y - z = 10 \end{cases}$ 41. $\begin{cases} \chi + y + z = 1 \\ 2\chi + y + z = 2 \\ 3\chi + 2y + 2z = 3 \end{cases}$ 42. $\begin{cases} \chi + y + z = 1 \\ 2\chi + 2y + 2z = 3 \\ 3\chi + 3y + 3z = 4 \end{cases}$

43. $\begin{cases} y-3z+4t=-5 \\ \chi-2z+3t=-4 \\ 3\chi+2y-5t=12 \\ 4\chi+3y-5z=5 \end{cases}$

44. $\begin{cases} \chi-3y+5z-7t=12 \\ 3\chi-5y+7z-t=0 \\ 5\chi-7y+z-3t=4 \\ 7\chi-y+3z-5t=16 \end{cases}$

Решить матричные уравнения (45-47)

45. $X*\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$

46. $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}*X*\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$

47. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}*X=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}$

Вычислить ранг матрицы (48-52)

48 $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & -4 \\ 4 & -7 & -2 & 1 \\ -3 & 5 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

49 $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$

50 $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 6 \\ 7 & 1 & -3 & 10 \\ 17 & 1 & -7 & 22 \\ 3 & 4 & -2 & 10 \end{pmatrix}$

51 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

52 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Ответы

1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 3. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ 4. $\begin{pmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 3 & 10 & 0 \\ 2 & 9 & -7 \end{pmatrix}$ 5. $\begin{pmatrix} 56 \\ 69 \\ 17 \end{pmatrix}$ 6. (31)

7. $\begin{pmatrix} 12 & 0 & -6 & 9 & 3 \\ 4 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ -4 & 0 & 2 & -3 & -1 \\ 20 & 0 & -10 & 15 & 5 \\ 8 & 0 & -4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ 8. $\begin{pmatrix} 13 & -14 \\ 21 & 22 \end{pmatrix}$ 9. $\begin{pmatrix} 8 & 15 \\ 0 & 23 \end{pmatrix}$ 10. $\begin{pmatrix} 21 & -23 & 15 \\ -13 & 34 & 10 \\ -9 & 22 & 25 \end{pmatrix}$

11. $\begin{pmatrix} 15 & 4 \\ 4 & 43 \end{pmatrix}$

12. $\begin{pmatrix} 5 & -2 & 21 & -1 \\ -2 & 5 & -3 & 7 \\ 21 & -3 & 26 & -2 \\ -1 & 7 & -2 & 10 \end{pmatrix}$

13. -10;

14. 180;
15. 87;
16. -12;
17. 0;
18. -29;
19. 0;
20. $-2b^2$;
21. 29;
22. -2x;
23. 68;
24 0;
25. 0;
26. 144;
27. 72;
28. 10;
29.$-4a^3$;
30. (x-y)(y-z)(x-z);
31.1
32. $\sin(\beta-\alpha)$;
33. 30;
34. 20;
35. 0;
36.48;
37. x=-3;
38. $x_1=2$, $x_2=3$;
39 $x_1=0,x_2=-2$;
40 $x_1=-10,x_2=2$;
41. $x \succ 4$;
42. -6<x<-4;
47 (2;-7);
48.$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}$
49.(1,2:0,7)
50.(2;3)
51. $x=\frac{49}{2}; y=\frac{43}{2}; z=10$
52.x=1;y=1;z=1;
53.x=2;y=-1;z=3;
54. x=1;y=-1;z=2;
55.x=2;y=3;z=4;
56.x=1;y=3;z=5;
57. Система имеет бесконечно много решений.
58.Система не имеет решения.
59.x=1;y=2;z=1;t=-1;
60.x=1;y=1;z=0;t=-2;
61.$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$ 62.$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ 63. $\begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$
64. 2; 65. 3; 66.2; 67.4; 68.2.

Литература

1. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. – М.: Наука, 1985.
2. Шнейдер В.Е., Слуцкий А.И., Шумов А.С. Краткий курс высшей математики. – М.: Высшая школа, 1978, т.1.
3. Бугров Я.С., Никольский С.М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии, 1988.
4. Высшая математика для экономистов. Под ред. Кремера Н.Ш. М., 2001.
5. Бугров Я.С., Никольский С.М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. – М.: Наука, 1980, 1984 и т.д.
6. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: Наука, 1980, 1984 и т.д.