**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ**

**КЫРГЫЗСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ им. И. РАЗЗАКОВА**

Кафедра «Высшая математика» им. Р.Усубакунова

ЭЛЕМЕНТЫ ЧИСЛЕННОГО АНАЛИЗА
ЧАСТЬ I

Методические указания по организации
самостоятельной работы студентов при изучении
курса «Прикладная математика»

БИШКЕК – 2011

«Рассмотрено»
на заседании кафедры
«Высшая математика»
им. Р. Усубакунова
Протокол № 5 от 28.12.2010г.

«Одобрено»
Методическим советом
энергетического факультета

Протокол № 6 от 17.01.2011 г.

Составители: САБИРОВ Я.А., КАДЕНОВА Р.Ж.

Элементы численного анализа. Часть I. Методические указания по организации самостоятельной работы студентов при изучении курса «Прикладная математика» / КГТУ им. И.Раззакова; сост.: Я.А.Сабиров, Р.Ж.Каденова. – Б.: ИЦ «Текник», 2011. – 23 с.

Методические указания написаны с целью оказания практической помощи студентам при работе с приближенными значениями величин – приближенными числами.

Содержит краткие теоретические сведения и подробно решенные типовые примеры. С целью контроля практических навыков студентов даны индивидуальные задания для самостоятельной работы.

Методические указания могут быть использованы как под руководством преподавателя, так и при самостоятельном изучении материала.

Предназначены для студентов первого курса факультета информационных технологий.

Рецензент к.ф.-м.н., доц. Сулайманов Б.Э.

Элементы численного анализа. Часть I
Методические указания по организации самостоятельной работы студентов
при изучении курса «Прикладная математика»

Составители: ***Сабиров Я.А., Каденова Р.Ж.***

Тех. редактор ***Субанбердиева Н.Е.***

Подписано к печати 31.03.2010 г. Формат бумаги $60\text{x}84^{1}/_{16}$.
Бумага офс. Печать офс. Объем 1,5 п.л. Тираж 50 экз. Заказ 126. Цена 26,65 с.

Бишкек, ул. Сухомлинова, 20. ИЦ “Текник” КГТУ им. И.Раззакова, т.: 54-29-43
e-mail: beknur@mail.ru

§1. Приближенные числа, их абсолютные и относительные погрешности

Расчеты, как правило, производятся с приближенными значениями величин – приближенными числами. Уже исходные данные для расчета обычно даются с некоторыми погрешностями; в процессе расчета еще накапливаются погрешности от округления, от применения приближенных формул и т.п. Разумная оценка погрешности при вычислениях позволяет указать оптимальное количество знаков, которые следует сохранять при расчетах, а также в окончательном результате.

Погрешность приближенного числа a, т.е. разность $a-a_0$ между ним и точным значением a_0, обычно неизвестна.

Под ***оценкой погрешности*** приближенного числа a понимают установление неравенства вида

$$|a-a_0| \le \Delta_a. \tag{1.1}$$

Число Δ_a называется *абсолютной погрешностью приближенного числа* a (иногда употребляют термин «предельная абсолютная погрешность»). Это число определяется неоднозначно: его можно увеличить. Обычно стараются указать возможно меньшее число Δ_a, удовлетворяющее неравенству (1.1).

Абсолютные погрешности записывают не более чем с двумя-тремя значащими цифрами (при подсчете числа значащих цифр не учитывают нулей, стоящих слева; например, в числе 0,010030 имеется 5 значащих цифр). В приближенном числе a не следует сохранить те разряды, которые подвергаются округлению в его абсолютной погрешности Δ_a.

Пример 1.1. Длина и ширина комнаты, измеренные с точностью до 1см, равны $a = 5{,}43\ м$ и $b = 3{,}82\ м$. Оценить погрешность в определении площади комнаты $S = ab = 20{,}7426\ м^2$.

Решение. По условию задачи $\Delta_a = 0{,}01\ м$, $\Delta_b = 0{,}01\ м$. Крайние возможные значения площади равны

$$(a+0{,}01)(b+0{,}01) = 20{,}8352\ м^2,$$
$$(a-0{,}01)(b-0{,}01) = 20{,}6502\ м^2;$$

Сравнивая их с подсчитанным выше значением S, получаем оценку

$$|S-S_0| \le 0{,}0926,$$

что дает возможность указать абсолютную погрешность числа S в виде $\Delta_S = 0{,}0926\ м^2$.

Здесь разумно округлить значение $\Delta_S = 0{,}10\ м^2$ (абсолютные погрешности округляют в большую сторону). При этом приближенное значение площади можно записать в виде $S = 20{,}743\ м^2$, или $S = 20{,}74\ м^2$, или даже $S = 20{,}7\ м^2$.

Пример 1.2. В некоторую вычислительную машину мы можем ввести числа только с тремя значащими цифрами. С какой точностью мы можем ввести в нее числа π и 1/3?

Решение. Полагаем $\pi \approx 3{,}14 = a$ вместо $\pi \approx 3{,}141592...$ погрешность числа a можно оценить числом $\Delta_a = 0{,}016\ м$. Полагаем $1/3 \approx 0{,}333 = b$; погрешность числа b можно оценить числом $\Delta_b = 0{,}00034$ или $\Delta_b = 0{,}0004$.

Относительной погрешностью δ_a ***приближенного числа*** a называется отношение его абсолютной погрешности Δ_a к абсолютной величине числа a, т.е.

$$\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a|} \quad (a \neq 0). \tag{1.2}$$

Относительная погрешность обычно выражается в процентах, и её принято записывать не более чем с двумя-тремя значащими цифрами (знаками).

Пример 1.3. Определить относительную погрешность числа S в примере 1.1.

Решение. $S = 20{,}7426\ м^2$, $\Delta_S = 0{,}0926\ м^2$ поэтому

$$\delta_S = \frac{0{,}0926}{20?7426} = \frac{926}{207426} = 0{,}0045 = 0{,}45\ \%.$$

ЗАДАЧИ

1. Округляя следующая числа до трех значащих цифр, определить абсолютную Δ и относительную δ погрешности полученных приближенных чисел.

а) 2,1514 б) 0,1% в) 0,01204 г) 1,225 д) -0,0015281

е) -392,85 ж) 0,1545 з) 0,003922 и) 625,55 к) 94,525

2. Определить абсолютную погрешность следующих приближенных чисел по их относительным погрешностям.

а) $a = 13267, \quad \delta = 0{,}1\%$ б) $a = 2{,}32, \quad \delta = 0{,}7\%$ в) $a = 35{,}72, \quad \delta = 1\%$

г) $a = 0{,}896, \quad \delta = 10\%$ д) $a = 232{,}44, \quad \delta = 1\%$

3. При измерении некоторых углов получили числа $a_1 = 21^0 37' 3''$, $a_2 = 45^0$, $a_3 = 1^0 10''$, $a_4 = 75^0 20' 44''$.

Определить относительные погрешности чисел a_1, a_2, a_3, a_4 полагая абсолютную погрешность измерения равной $1''$.

4. Определить количество верных знаков в числе x, если известна его абсолютная погрешность.

а) $x = 0{,}3941, \quad \Delta_x = 0{,}25 \cdot 10^{-2}$ б) $x = 0{,}1132, \quad \Delta_x = 0{,}1 \cdot 10^{-3}$

в) $x = 38{,}2543, \quad \Delta_x = 0{,}27 \cdot 10^{-2}$ г) $x = 293{,}481, \quad \Delta_x = 0{,}1$

д) $x = 2{,}325, \quad \Delta_x = 0{,}1 \cdot 10^{-1}$ е) $x = 14{,}00231, \quad \Delta_x = 0{,}1 \cdot 10^{-3}$

ж) $x = 0{,}0842, \quad \Delta_x = 0{,}15 \cdot 10^{-2}$ з) $x = 0{,}00381, \quad \Delta_x = 0{,}1 \cdot 10^{-4}$

и) $x = -32{,}285, \quad \Delta_x = 0{,}2 \cdot 10^{-2}$ к) $x = -0{,}2113, \quad \Delta_x = 0{,}5 \cdot 10^{-2}$

5. Определить количество верных знаков в числе a, если известна его относительная погрешность.

а) $a = 1{,}8921$, $\delta_a = 0{,}1 \cdot 10^{-2}$ б) $a = 0{,}2281$, $\delta_a = 0{,}2 \cdot 10^{-1}$ в) $a = 22{,}351$, $\delta_a = 0{,}1$ г) $a = 0{,}02425$, $\delta_a = 0{,}5 \cdot 10^{-2}$ д) $a = 0{,}000135$, $\delta_a = 0{,}15$ е) $a = 9{,}3598$, $\delta_a = 0{,}1\%$ ж) $a = 0{,}11452$, $\delta_a = 10\%$ з) $a = 48361$, $\delta_a = 1\%$ и) $a = 592{,}8$, $\delta_a = 2\%$ к) $a = 14{,}9360$, $\delta_a = 1\%$

§2. Сложение и вычитание приближенных чисел

Абсолютная погрешность алгебраической суммы нескольких приближенных чисел равна сумме абсолютных погрешностей слагаемых: если

$$S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n,$$

то

$$\Delta_S = \Delta_{a_1} + \Delta_{a_2} + \ldots + \Delta_{a_n}. \qquad (2.1)$$

При большом количестве слагаемых оценка абсолютной погрешности суммы по формуле (2.1) оказывается сильно завышенной, так как обычно происходит частичная компенсация погрешностей разных знаков. Если все слагаемые округлены до m-го десятичного разряда, т.е. их погрешности оцениваются величиной $0{,}5 \cdot 10^{-m}$, то статическая оценка абсолютной погрешности суммы дается правилом Чеботарева:

$$\Delta_S = \sqrt{3n} \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-m}. \tag{2.2}$$

где n - число слагаемых; это правило применяют при $n > 10$.

Если среди слагаемых имеется одно число, абсолютная погрешность которого значительно превосходит абсолютные погрешности остальных слагаемых, то абсолютная погрешность суммы считается равной этой наибольшей погрешности. При этом в сумме целесообразно сохранять столько десятичных знаков, сколько их в слагаемом с наибольшей абсолютной погрешностью.

Покажем на примере, как производится сложение приближенных чисел и оценка погрешности.

Пример 2.1. Найти сумму приближенных чисел 0,348; 0,1834; 345,4; 235,2; 11,75; 9,27; 0,0849; 0,0214; 0,000354, считая в них все знаки верными, т.е. считая, что абсолютная погрешность каждого слагаемого не превосходит половины единицы младшего оставленного разряда.

Решение. Наибольшую абсолютную погрешность $\Delta = 0{,}05$ имеют два числа: 345,4 и 235,2. Поэтому можно считать, что абсолютная погрешность суммы составляет $2\Delta = 0{,}10$. Так как количество слагаемых невелико, то в расчетах сохраняем только один запасной знак, т.е. округляем слагаемые до 0,01:

$$\begin{array}{r}
345{,}4 \\
235{,}2 \\
11{,}75 \\
9{,}27 \\
0{,}35 \\
0{,}18 \\
0{,}08 \\
0{,}02 \\
0{,}00 \\
\hline
S = 602{,}25
\end{array}$$

В окончательном результате запасной знак отбрасываем: $S = 602{,}2$. При этом к указанной выше абсолютной погрешности 0,10добавляем погрешность округления 0,05, что дает

$$\Delta_S = 0{,}15 \text{ или } \Delta_S = 0{,}2.$$

Относительная погрешность δ_S ***суммы нескольких чисел*** одного и того же знака заключена между наименьшей и наибольшей из относительных погрешностей слагаемых:

$$\min \delta_{a_k} \le \delta_S \le \max \delta_{a_k} \qquad (a_k > 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n). \qquad (2.3)$$

Пример 2.2. Оценить относительную погрешность суммы чисел в примере 2.1.

Решение. Относительная погрешность суммы S равна

$$\delta_S = \frac{0{,}10}{602{,}25} = 0{,}017\%.$$

Относительная погрешность разности двух положительных чисел больше относительных погрешностей этих чисел, особенно если эти числа близки между собой (т.е. если их разность мала по сравнению с самими этими числами). Это приводит к потере точности при вычитании близких чисел, что следует учитывать при выборе вычислительных схем.

Пример 2.3. Даны числа $a = 1{,}137$ и $b = 1{,}073$ с абсолютными погрешностями $\Delta_a = \Delta_b = 0{,}011$. Оценить погрешность их разности $c = a - b$.

Решение. $c = 0{,}064$, $\Delta_c = \Delta_a + \Delta_b = 0{,}022$, $\delta_S = \frac{22}{64} = 35\%$.

Таким образом, в результате нет ни одного верного знака, хотя сами числа имеют относительные полгрешности

$$\delta_a \approx \delta_b \approx 1\%.$$

З А Д А Ч И

1. Найти суммы приближенных чисел и указать их погрешности.

а) 0,145+321+78,2 (все знаки верные),

б) 0,301+193,1+11,58 (все знаки верные), в) 398,5-72,28+0,34567 (все знаки верные),

г) $x_1 + x_2 - x_3$, где $x_1 = 197{,}6$, $\Delta_{x_1} = 0{,}2$, $x_2 = 23{,}44$, $\Delta_{x_2} = 0{,}22$, $x_3 = 201{,}55$, $\Delta_{x_3} = 0{,}17$

§3. Умножение и деление приближенных чисел

При умножении и делении приближенных чисел складываются их относительные погрешности (а не абсолютные); относительная погрешность выражения

$$r = \frac{a_1 a_2 \ldots a_m}{b_1 b_2 \ldots b_n} \tag{3.1}$$

оценивается величиной

$$\delta_r = \delta_{a_1} + \delta_{a_2} + \ldots + \delta_{a_m} + \delta_{b_1} + \delta_{b_2} + \ldots + \delta_{b_n}. \tag{3.2}$$

При большом числе $m + n$ выгоднее пользоваться статической оценкой, учитывающей частичную компенсацию погрешностей разных знаков: если все числа a_i, b_j $(i = 1,2,\ldots,m;\ \ j = 1,2,\ldots,n)$ имеют примерно одинаковую относительную погрешность δ, то относительная погрешность выражения (3.1) принимается равной

$$\delta_r = \sqrt{3(n+m)}\delta \qquad (n + m > 10). \tag{3.3}$$

Если у одного из чисел a_i, b_j относительная погрешность значительно превышает относительные погрешности остальных чисел, то относительная погрешность выражения (3.1) считаются равной этой наибольшей погрешности. При этом в результате целесообразно сохранять столько знаков (значащих цифр), сколько их в числе с наибольшей относительной погрешностью.

Абсолютная погрешность выражения (3.1) вычисляется по его относительной погрешности:

$$\Delta_r = |r|\delta_r .$$

Покажем на примере, как производится умножение и деление приближенных чисел и оценка погрешности результата.

Пример 3.1. Вычислить выражение

$$r = \frac{3{,}2 \cdot 356{,}7 \cdot 0{,}04811}{7{,}1948 \cdot 34{,}56},$$

считая, что все числа даны с верными знаками, т.е. что их абсолютные погрешности не превосходят половины единицы младшего оставленного разряда.

Решение. Наибольшую относительную погрешность имеет число $a = 3{,}2$, которое содержит всего два верных знаках (против четырех-пяти верных знаков в остальных числах):

$$\delta_a = \frac{0{,}5}{32} = 1{,}6\% .$$

Поэтому можно считать, что относительная погрешность результата составляет $\delta_r = 1{,}6\%$, т.е. что результат содержит не более двух верных знаков. Так как количество данных чисел невелико, то в расчетах сохраняем один запасной знак, округляя все числа до трех знаков:

$$r = \frac{3{,}2 \cdot 357 \cdot 0{,}0481}{7{,}19 \cdot 34{,}6} = 0{,}221$$

(этот результат можно получить на счетной линейке, поскольку большая точность не требуется).

Абсолютную погрешность результата вычисляем по его относительной погрешности и найденному численному значению:

$$\Delta_r = r\delta_r = 0{,}221 \cdot 0{,}016 = 0{,}0036 .$$

Округляя результат до верных знаков, отбрасываем запасной знак и получаем

$$r = 0{,}22$$

с абсолютной погрешностью $\Delta_r < 0{,}005$.

З А Д А Ч И

1. Найти произведения приближенных чисел указать их погрешности (считая в исходных данных все знаки верными).

а) $3{,}49 \cdot 8{,}6$ б) $25{,}1 \cdot 1{,}743$ в) $0{,}02 \cdot 16{,}5$ г) $0{,}253 \cdot 654 \cdot 83{,}6$ д) $1{,}78 \cdot 9{,}1 \cdot 1{,}183$

е) $482{,}56 \cdot 7256 \cdot 0{,}0052$

2. Найти частное приближенных чисел.

а) $5{,}684 : 5{,}032$ б) $0{,}144 : 1{,}2$ в) $216 : 4$ г) $726{,}676 : 829$ д) $754{,}9367 : 36{,}5$

е) $7{,}3 : 4491$

3. Стороны прямоугольника равны $(4{,}02 \pm 0{,}01)\ м$, $(4{,}96 \pm 0{,}01)\ м$. Вычислить площадь прямоугольника.

4. катеты прямоугольного треугольника равны $(12{,}10 \pm 0{,}01)\ см$, $(25{,}21 \pm 0{,}01)\ см$. Вычислить тангенс угла, противолежащего первому катету.

5. при измерении радиуса R круга с точностью до $0{,}5\ см$ получилось число $12\ см$. Найти абсолютную и относительную погрешности при вычислении площади круга.

6. Каждое ребро куба, измеренное с точностью до $0{,}02\ см$ оказалось равным $8\ см$. Найти абсолютную и относительную погрешности при вычислении объема куба.

7. Высота h и радиус R цилиндра измерены с точностью до $0{,}5\%$. Каково предельная относительная погрешность при вычислении объема цилиндра?

§4. Погрешности вычисления значений функции

Функции одной переменной

Абсолютная погрешность дифференцируемой функции $y = f(x)$, называемая достаточно малой погрешностью аргумента Δ_x, оценивается величиной

$$\Delta_y = |f'(x)|\Delta_x \,. \qquad (4.1)$$

Если значения функции $f(x)$ положительны, то для относительной погрешности имеет место оценка

$$\delta_y = \frac{|f'(x)|}{f(x)}\Delta_x = |[\ln f(x)]'|\Delta_x \,. \qquad (4.2)$$

В частности, для основных элементарных функций получаем следующие правила.

Степенная функция $y = x^a$. Абсолютная погрешность степенной функции равна

$$\Delta_y = ax^{a-1}\Delta_x \,. \qquad (4.3)$$

Относительная погрешность степенной функции равна

$$\delta_y = |a|\delta_x. \tag{4.4}$$

Например, относительная погрешность квадрата x^2 вдвое больше относительной погрешности основания x, относительная погрешность квадратного корня вдвое меньше относительной погрешности подкоренного числа x, относительная погрешность обратной величины $\frac{1}{x}$ равна относительной погрешности самого числа x.

Показательная функция $y = a^x$ $(a > 0)$. Абсолютная погрешность показательной функции равна

$$\Delta_y = a^x \ln a \cdot \Delta_x. \tag{4.5}$$

Относительная погрешность показательной функции равна

$$\delta_y = \Delta_x \ln a. \tag{4.6}$$

Заметим, что здесь относительная погрешность функции пропорциональна абсолютной погрешности аргумента.

Для функции $y = e^x$ отсюда получаем

$$\delta_y = \Delta_x. \tag{4.7}$$

Логарифмическая функция $y = \ln x$. Абсолютная погрешность натурального логарифма числа равна относительной погрешности самого числа:

$$\Delta_y = \frac{1}{x}\Delta_x = \delta_x. \tag{4.8}$$

Для десятичного логарифма $y = \lg x$ имеем

$$\Delta_y = 0{,}4343\delta_x. \tag{4.9}$$

откуда следует, что при расчетах с числами, имеющими m верных знаков, надо пользоваться $(m+1)$-значными таблицами логарифмов.

Тригонометрические функции. Абсолютные погрешности синуса и косинуса не превосходят абсолютных погрешностей аргумента:

$$\Delta_{\sin x} = |\cos x|\Delta_x \le \Delta_x, \quad \Delta_{\cos x} = |\sin x|\Delta_x \le \Delta_x. \tag{4.10}$$

Абсолютная погрешность тангенса и котангенса всегда больше абсолютной погрешности аргумента:

$$\Delta_{tgx} = (1 + tg^2 x)\Delta_x \geq \Delta_x, \quad \Delta_{ctgx} = (1 + ctg^2 x)\Delta_x \geq \Delta_x. \qquad (4.11)$$

Пример 4.1. Угол $x = 25^0 20'$ измерен с точностью до $1'$. Определить $\sin x$ и его абсолютную погрешность.

Решение. Вычислим сначала абсолютную погрешность $\sin x$ по формуле (4.10); для этого надо ещё перевести $1'$ в радианы: $1' = 0{,}000291$ - и подсчитать

$$\Delta_{\sin x} = \cos x \cdot \Delta_x = \cos 25^0 20' \cdot 0{,}000291 = 0{,}00026.$$

Поэтому для вычисления $\sin x$ надо взять четырехзначные таблицы тригонометрических функций, что дает

$$\sin x = \sin 25^0 20' = 0{,}4279.$$

Функции нескольких переменных

Абсолютная погрешность дифференцируемой функции $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, вызываемая достаточно малыми погрешностями $\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}, ..., \Delta_{x_n}$ аргументов $x_1, x_2, ..., x_n$, оценивается величиной

$$\Delta_y = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \Delta_{x_i}. \qquad (4.12)$$

Если значения функции положительны, то для относительной погрешности имеет место оценка

$$\delta_y = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{f} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \Delta_{x_i} = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial \ln f}{\partial x_i} \right| \Delta_{x_i}. \qquad (4.13)$$

Пример 4.2. Вычислить значение функции $u = xy^2 z^3$, если причем

$x = 37{,}1$ $\quad y = 9{,}87$ $\quad z = 6{,}052$

$\Delta_x = 0{,}3$ $\quad \Delta_y = 0{,}11$ $\quad \Delta_z = 0{,}016$

Решение. Здесь относительные погрешности аргументов равны

$$\delta_x = \frac{3}{371} = 0{,}81\% \qquad \delta_y = \frac{11}{987} = 1{,}12\% \qquad \delta_z = \frac{16}{6052} = 0{,}26\%$$

Относительная погрешность функции равна

$$\delta_u = \delta_x + 2\delta_y + 3\delta_z = 3{,}8\%$$

поэтому значение функции следует вычислять не более чем с двумя-тремя знаками:

$$u = 801 \cdot 10^3$$

(нельзя написать 801000, это имело бы другой смысл).

Абсолютная погрешность при этом оставляет

$$\Delta_u = u\delta_u = 801 \cdot 10^3 \cdot 0{,}038 = 30 \cdot 10^3$$

Здесь целесообразно округлить результат до двух знаков:

$$u = 8{,}0 \cdot 10^5, \qquad \Delta_u = 0{,}3 \cdot 10^5.$$

З А Д А Ч И

1. Углы x измерены с предельной абсолютной погрешностью Δ_x. Определить абсолютную и относительную погрешности функций $y = \sin x$, $y = \cos x$ и $y = tgx$. Найти по таблицам значения функций, сохранив в результате лишь верные цифры.

а) $x = 11^0 20'$, $\Delta_x = 1'$ б) $x = 48^0 42' 31''$, $\Delta_x = 5''$ в) $x = 45^0$, $\Delta_x = 1'$

г) $x = 50^0 10'$, $\Delta_x = 0{,}05^0$ д) $x = 0{,}45$, $\Delta_x = 0{,}5 \cdot 10^{-2}$ е) $x = 1{,}115$, $\Delta_x = 0{,}1 \cdot 10^{-3}$

2. Для следующих функций вычислить значения при указанных значениях x и указать абсолютную и относительную погрешности результатов.

а) $y = x^3 \sin x$ при $x = \sqrt{2}$, полагая $\sqrt{2} \approx 1{,}414$

б) $y = x \ln x$ при $x = \pi$, полагая $\pi \approx 3{,}142$

в) $y = e^x \cos x$ при $x = \sqrt{3}$, полагая $\sqrt{3} \approx 1{,}732$

3. Для следующих функций вычислить значения при указанных значениях переменных. Указать абсолютную и относительную погрешности результатов, считая все знаки исходных данных верными.

а) $u = (x_1 + x_2^2)$, $x_1 = 0{,}97$, $x_2 = 1{,}132$

б) $u = \dfrac{x_1 + x_2^2}{x_3}$, $x_1 = 3{,}28$, $x_2 = 0{,}932$, $x_3 = 1{,}132$

в) $u = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3$, $x_1 = 2{,}104$, $x_2 = 1{,}935$, $x_3 = 0{,}845$

4. Определить относительную погрешности при вычислении полной поверхности усеченного косинуса, если радиусы его оснований R и r и образующая l, измеренные с точностью до $0{,}01\,см$, равны

$$R = 23{,}64\ см, \qquad r = 17{,}31\ см, \qquad l = 10{,}21\ см$$

§5. Вычисление значений многочлена. Схема Горнера

Пусть дан многочлен n-й степени

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$$

с действительными коэффициентами a_k $(k = 0,1,\ldots,n)$, и пусть требуется найти значение этого многочлена при $x = \xi$

$$P(\xi) = a_0 \xi^n + a_1 \xi^{n-1} + \ldots + a_n. \tag{5.1}$$

Вычисление значения $P(\xi)$ удобнее всего производить следующим образом. Представим выражение (5.1) в виде

$$P(\xi) = (\ldots(((a_0 \xi + a_1)\xi + a_2)\xi + a_3)\xi + \ldots + a_n)$$

Если ввести числа

$$\left.\begin{array}{ll} & b_0 = a_0 \\ c_1 = b_0 \xi, & b_1 = a_1 + c_1 \\ c_2 = b_1 \xi, & b_2 = a_2 + c_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_n = b_{n-1}\xi, & b_n = a_n + c_n \end{array}\right\} \tag{5.2}$$

то $b_n = P(\xi)$.

Таким образом, вычисление значения многочлена $P(x)$ при $x = \xi$ сводится к повторению следующей совокупности элементарных операций:

$$c_k = b_{k-1}\xi, \qquad b_k = a_k + c_k \qquad (k = 1,2,\ldots,n).$$

Нетрудно показать, что числа $b_0 = a_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$ являются коэффициентами многочлена $Q(x)$, полученного в качестве частного при делении данного многочлена $P(x)$ на двучлен $x - \xi$, а $b_n = P(\xi)$ - остаток от деления.

Таким образом, формулы (5.2) позволяют, не производя деления, определять коэффициенты частного $Q(x)$, а также остаток $P(\xi)$. Числа $b_0, b_1, ..., b_n$ обычно находят, пользуясь известной схемой Горнера

$$
\begin{array}{llllll}
 & a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\
+ & & b_0\xi & b_1\xi & \dots & b_{n-1}\xi \\
\hline
 & b0 = a0 & b_1 & b_2 & \dots & b_n = P(\xi)
\end{array}.
$$

Вычисление значений многочлена $P_n(x)$ по схеме Горнера требует выполнения n умножений и $n-k$ сложений, где k - число коэффициентов a_i, равных нулю. если $a_0 = 1$, то требуется выполнить $n-1$ умножений. Показано, что для многочленов общего вида нельзя построить схему более экономную в смысле числа операций, чем схема Горнера.

Пример 5.1. Вычислить при $x = -1{,}5$ значение многочлена

$$P(x) = x^7 - 2x^6 + x^5 - 3x^4 + 4x^3 - x^2 + 6x - 1.$$

Решение. Пользуясь схемой Горнера, получим

$$
\begin{array}{lllllllll|l}
1 & -2 & 1 & -3 & 4 & -1 & 6 & -1 & & \underline{-1{,}5} \\
+ & -1{,}5 & 5{,}25 & -9{,}375 & 18{,}5625 & -33{,}8438 & 52{,}2657 & -87{,}3985 & & \\
\hline
1 & -3{,}5 & 6{,}25 & -12{,}375 & 22{,}5625 & -34{,}8438 & 58{,}2657 & -88{,}3985 = P(-1{,}5) & &
\end{array}
$$

Таким образом, $p(-1{,}5) = -88{,}3985$.

З А Д А Ч И

1. Дан многочлен $P(x) = a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$. Найти значение $P(3{,}25)$ для коэффициентов a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 приведенных в табл. 1.

2. Дан многочлен $P(x) = 0{,}22x^5 - 3{,}27x^4 - 2{,}74x^3 + 2{,}81x^2 - 3{,}36x + 2$. Найти значение $P(\xi)$, где $\xi = 0{,}80 + 0{,}05k;\quad k = 0,1,2,...,20$.

Таблица 1.

	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4		a_0	a_1	a_2	a_3	a_4
а)	7,54	11,08	3,82	0,44	-0,48	д)	2,79	9,85	14,15	5,38	7,24
б)	9,36	12,69	14,39	0,79	-0,94	е)	3,45	-2,91	3,79	-6,75	-2,38
в)	12,78	14,35	17,19	1,34	-1,72	ж)	4,79	5,38	-2,86	7,31	4,55
г)	15,65	17,58	21,7	2,78	1,34	з)	8,34	-7,75	4,53	-9,29	5,79

§6. Вычисление значений некоторых трансцендентных функций с помощью степенных рядов

Здесь рассматриваются только такие трансцендентные функции, которые являются суммами своих рядов Маклорена

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k. \tag{6.1}$$

Беря сумму нескольких первых членов ряда Маклорена, получаем приближенную формулу $f(x)=P_n(x)$, где $P_n(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$ при этом остаток ряда $R_n(x)=f(x)-P_n(x)$ представляет ошибку при замене $f(x)$ многочленом $P_n(x)$. Оценка остатка позволяет определить требуемое число слагаемых, т.е. степень n многочлена $P_n(x)$.

Вычисление значений показательной функции. Для показательной функции справедливо разложение

$$e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\qquad(-\infty<x<\infty). \tag{6.2}$$

Вычисления удобно вести, пользуясь следующей рекуррентной записью:

$$e^x=\sum_{k=0}^{\infty}u_k,\qquad u_k=\frac{x}{k}u_{k-1},\qquad S_k=S_{k-1}+u_k\qquad(k=1,2,...,n)$$

где $u_0=1,\quad S_0=1$. Число $S_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$ приближенно дает искомый результат e^x.

Для остатка ряда может быть получена следующая оценка

$$|R_n(x)|<|u_n|\quad \textit{при}\quad 0<2|x|\le n.$$

$$e^{\frac{1}{2}}=\sum_{k=0}^{n}u_k+R_n\left(\frac{1}{2}\right). \tag{6.3}$$

Вычисление значений синуса и косинуса. Для вычисления значений функций $\sin x$ и $\cos x$ пользуемся степенными разложениями

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad (-\infty < x < \infty). \tag{6.4}$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \qquad (-\infty < x < \infty). \tag{6.5}$$

Ряды (2.4) и (2.5) при больших x сходятся медленно, но, учитывая периодичность функций $\sin x$ и $\cos x$ и формулы приведения тригонометрических функций, легко заключить, что достаточно уметь вычислять $\sin x$ и $\cos x$ для промежутка $0 \le x \le \dfrac{\pi}{4}$. При этом можно использовать следующие рекуррентные формулы:

$$\left.\begin{aligned} &\sin x = \sum_{k=1}^{n} u_k + R_n(x) \\ &u_1 = x, \quad u_{k+1} = -\frac{x^2}{2k(2k+1)} u_k \quad (k = 1,2,..., n-1) \end{aligned}\right\}. \tag{6.6}$$

$$\left.\begin{aligned} &\cos x = \sum_{k=1}^{n} v_k + R_n(x) \\ &v_1 = x, \quad v_{k+1} = -\frac{x^2}{2k(2k+1)} v_k \quad (k = 1,2,..., n-1) \end{aligned}\right\}. \tag{6.7}$$

Так как в промежутке $(0; \dfrac{\pi}{4})$ ряд (2.4) знакочередующийся с монотонно убывающими по модулю членами, то для его остатка R_n справедливо оценка

$$|R_n| \le \frac{|x|^{2n+1}}{(2n1)!} = |u_{n+1}|.$$

Аналогично для ряда (2.5) $|R_n| \le |v_{n+1}|$. Следовательно, процесс вычисления $\sin x$ и $\cos x$ можно прекратить, как только очередной полученный член ряда по модулю будет меньше допустимой погрешности ε.

Вычисление значений гиперболического синуса и гиперболического косинуса. Пользуемся степенными разложениями

$$shx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} \qquad (-\infty < x < \infty). \tag{6.8}$$

$$chx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \qquad (-\infty < x < \infty). \tag{6.9}$$

и рекуррентной записью

$$\left.\begin{aligned} & shx = \sum_{k=1}^{n} u_k + R_n \\ & u_1 = x, \quad u_{k+1} = \frac{x^2}{2k(2k+1)} u_k \end{aligned}\right\} \tag{6.10}$$

$$\left.\begin{aligned} & chx = \sum_{k=0}^{n} v_k + R_n \\ & v_0 = 1, \quad v_{k+1} = \frac{x^2}{(2k+1)(2k+2)} v_k \end{aligned}\right\} \tag{6.11}$$

При $n \ge |x| > 0$ имеют место оценки $R_n < \frac{1}{3}|u_n|$ и $R*_n < \frac{2}{3} v_n$.

Вычисление значений логарифмической функции. Пользуемся разложением по степеням $\frac{1-z}{1+z}$: $\ln x = -2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \left(\frac{1-z}{1+z}\right)^{2k-1}$ $(0 < z < +\infty)$.

Пусть x - положительное число. Представим его в виде $x = 2^m z$,

где m - целое число и $\frac{1}{2} \le z < 1$; тогда, полагая $\frac{1-z}{1+z} = \xi$,

получим $\ln x = \ln 2^m z = m \ln 2 + \ln z = m \ln 2 - 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \xi^{2k-1}$,

где $0 < \xi \le \frac{1}{3}$. Обозначив $uk = \frac{\xi^{2k-1}}{2k-1}$ $(k = 1,2,..., n)$,

получаем рекуррентную запись

$$\left.\begin{aligned} &\ln x = m\ln 2 - 2\sum_{k=1}^{n} u_k + R_n \\ &u_1 = \xi, \quad u_{k+1} = \frac{(2k-1)\xi^2}{2k+1} u_k \end{aligned}\right\} \qquad (6.12)$$

Процесс суммирования прекращается, как только выполнится неравенство $u_n < 4\varepsilon$, где ε - допустимая погрешность.

З А Д А Ч И

1. Пользуясь разложением в степной ряд, составить с указанной точностью ε таблицы значений следующих функций.

а) $e^x, \quad x = 0{,}300 + 0{,}002k \ (k = 0,1,2,...,14), \quad \varepsilon = 10^{-5}$,

б) $e^x, \quad x = 2{,}500 + 0{,}002k \ (k = 0,1,2,...,14), \quad \varepsilon = 10^{-4}$,

в) $e^{-x}, \quad x = 1{,}35 + 0{,}01k \ (k = 0,1,2,...,14), \quad \varepsilon = 10^{-5}$,

г) $e^{-x}, \quad x = 0{,}505 + 0{,}005k \ (k = 0,1,2,...,15), \quad \varepsilon = 10^{-5}$,

д) $e^{x^2}, \quad x = 0{,}50 + 0{,}02k \ (k = 0,1,2,...,15), \quad \varepsilon = 10^{-5}$,

е) $e^{-x^2}, \quad x = 1{,}30 + 0{,}01k \ (k = 0,1,2,...,15), \quad \varepsilon = 10^{-5}$

2. Пользуясь разложением $\sin x$ и $\cos x$ в степенной ряд, составить таблицы значений следующих функций с точностью до 10^{-5}.

а) $\sin x, \quad x = 0{,}345 + 0{,}005k \ (k = 0,1,2,...,15)$,

б) $\sin x, \quad x = 1{,}75 + 0{,}01k \ (k = 0,1,2,...,15)$,

в) $\cos x, \quad x = 0{,}745 + 0{,}005k \ (k = 0,1,2,...,15)$,

г) $\cos x, \quad x = 1{,}75 + 0{,}01k \ (k = 0,1,2,...,15)$,

д) $\dfrac{\sin x}{x}, \quad x = 0{,}4 + 0{,}01k \ (k = 0,1,2,...,15)$,

е) $\dfrac{\cos x}{x}, \quad x = 0{,}25 + 0{,}01k \ (k = 0,1,2,...,15)$.

§ 7. Применение метода итераций для приближенного вычисления значений функций

Всякую функцию $y = f(x)$ можно различными способами задавать неявно, т.е. некоторым уравнением

$$F(x, y) = 0. \tag{7.1}$$

Один из возможных итерационных процессов для вычисления $y(x)$ можно построить следующим образом.

Пусть y_n - приближенное значение y. Применив формулу Лагранжа, получим $F(x, y_n) = F(x, y_n) - F(x, y) = (y_n - y)F'_y(x, \bar{y}_n)$, где $\bar{y}_n$ - некоторое промежуточное значение между y_n и y. Отсюда $y = y_n - \dfrac{F(x, y_n)}{F'_y(x, \bar{y}_n)}$ причем значение $\bar{y}_n$ нам не известно.

Полагая приближенно $\bar{y}_n \approx y_n$, получим следующую формулу для вычисления $y = y_{n+1}$:

$$y_{n+1} = y_n - \frac{F(x, y_n)}{F'_y(x, \bar{y}_n)} \qquad (n = 0,1,2,...). \tag{7.2}$$

Если $F'_y(x, y)$ и $F''_{yy}(x, y)$ существуют и сохраняют постоянные знаки в рассматриваемом интервале, содержащем корень $y(x)$, то итерационный процесс сходится к $y(x)$.

Начальное приближение $y_0(x)$ выбирают так, чтобы оно легко вычислялось и было, по возможности, близким к истинному значению $y(x)$.

Процесс итераций продолжается до тех пор, пока в пределах заданной точности два последовательных значения y_{n+1} и y_n не совпадут между собой, после чего приближенно полагают $y(x) \approx y_{n+1}$.

Вычисление обратной величины. Пусть $y = \dfrac{1}{x}\ (x > 0)$. Положим $F(x, y) \equiv x - \dfrac{1}{y} = 0$. Применив формулу (7.2), получим

$$y_{n+1} = y_n(2 - xy_n). \tag{7.3}$$

Вычисление y_{n+1} по полученной итерационной формуле (7.3) содержит лишь действия умножения и вычитания. Таким образом, можно находить $\dfrac{1}{x}$ на вычислительных машинах, в которых нет операции деления. Начальное значение y_0 выбираются обычно следующим образом. Записывают аргумент x в двоичной системе: $x = 2^m x_1$, где m - целое число и $\frac{1}{2} \le x_1 < 1$.

Вычисление квадратного корня. Пусть $y\sqrt{x}$ $(x > 0)$. Преобразуем это уравнение к виду $F(x, y) \equiv y^2 - x = 0$. Применяя формулу (7.2), получим

$$y_{n+1} = \frac{1}{2}\left(y_n + \frac{x}{y_n}\right) \qquad (n = 0,1,2,...). \tag{7.4}$$

Эта формула называется *формулой Герона*.

Пусть аргумент x записан в двоичной системе: $x = 2^m x_1$

где m - целое число и $\frac{1}{2} \le x_1 < 1$. Тогда обычно полагают $y_0 = 2^{E\left(\frac{m}{2}\right)}$, где $E\left(\frac{m}{2}\right)$ - целая часть числа $\frac{m}{2}$.

Итерационный процесс по формуле Герона легко реализуется на машине, имеющей деление в качестве элементарной операции; при этом процесс итераций сходится при любом выборе $y_0 > 0$.

Вычисление обратной величины квадратного корня. Пусть имеем $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ $(x > 0)$. Итерационная формула для вычисления обратной величины квадратного корня имеет вид

$$y_{n+1} = \frac{3}{2} y_n - \frac{1}{2} x y_n^3 \qquad (n = 0,1,2,...). \tag{7.6}$$

Формула (5.6) получается при преобразовании исходного уравнения

$y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ к виду $F(x, y) \equiv \frac{1}{y^2} - x = 0$. В качестве начального приближения обычно берут $y_0 = 2^{-E\left(\frac{m}{2}\right)}$, где $x = 2^m x_1$, $\frac{1}{2} \le x_1 < 1$.

Мы имеем здесь итеративный процесс также «без деления».

Вычисление кубического корня. Пусть имеем $y = \sqrt[3]{x}$. Применив формулу (5.2) к уравнению $F(x, y) \equiv y^3 - x = 0$, получим итерационную формулу для вычисления кубического корня в виде

$$y_{n+1} = \frac{1}{3}\left(\frac{2y_n^3 + x}{y_n^2}\right) \tag{7.7}$$

начальное приближение $y_0 = 2^{E\left(\frac{m}{3}\right)}$, где $x = 2^m x_1$, m - целое число и $\frac{1}{2} \le x_1 < 1$.

Вычисление корня p-й степени. Пусть $y = \sqrt[p]{x}$, где $x > 0$ и $p > 0$ - целое число. Применив формулу (5.2) к уравнению $F(x, y) \equiv 1 - \frac{x}{y^p} = 0$, получим

$$y_{n+1} = y_n\left[\left(1 + \frac{1}{p}\right) - \frac{y_n^p}{px}\right]. \tag{7.8}$$

Итерационный процесс будет сходящимся, если только начальное приближение $y_0 > 0$ выбрать настолько малым, чтобы $y_0^p < (p+1)x$.

Формула Ньютона для вычисления корня p-й степени. Пусть $y = \sqrt[p]{x}$; тогда имеет место формула

$$y_{n+1} = \frac{1}{p}\left[(p-1)y_n + \frac{x}{y_n^{p-1}}\right], \tag{7.9}$$

получающаяся из формулы (5.2) при $F(x, y) \equiv y^p - x$. Начальное приближение y_0 можно подобрать с точностью до одной-двух значащих цифр.

З А Д А Ч И

1. Пользуясь методом итераций, составить таблицы значений следующих функций с точностью до 10^{-6}.

а) $\frac{1}{x}$, $x = 3 + 2k$ $(k = 0,1,2,...,15)$, б) $\frac{1}{x^2}$ для тех же значений x,

в) $\frac{1}{x^3}$ для тех же значений x, г) $\frac{1}{1+x}$, $x = 0{,}007 + 0{,}003k$ $(k = 0,1,2,...,15)$.

2. Пользуясь методом итераций, составить таблицы значений следующих функций с точностью до 10^{-5}.

а) $\sqrt{x}$, $x = 2 + k$ $(k = 0,1,2,...,15)$, б) $x\sqrt{x}$ для тех же значений x,

в) $\sqrt{1 + x^2}$, $x = 0{,}03 + 0{,}002k$ $(k = 0,1,2,...,15)$, г) $\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ для тех же значений x.

3. Пользуясь методом итераций, составить таблицы значений следующих функций с точностью до 10^{-5}.

а) $\dfrac{1}{\sqrt{x}}, \quad x = 3 + 2k \ (k = 0,1,2,...,15)$,

б) $\dfrac{1}{\sqrt{2+x^2}}, \quad x = 0{,}3 + 0{,}002k \ (k = 0,1,2,...,15)$,

в) $\dfrac{2x+1}{\sqrt{x}}, \quad x = 3{,}1 + 0{,}005k \ (k = 0,1,2,...,15)$,

г) $\dfrac{1}{\sqrt{x(x+1)}}, \quad x = 2{,}3 + 0{,}002k \ (k = 0,1,2,...,15)$.

4. Пользуясь методом итераций, составить таблицы значений следующих функций с точностью до 10^{-6}.

а) $\sqrt[3]{x}, \quad x = 3 + k \ (k = 0,1,2,...,15)$, б) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}, \quad x = 3 + k \ (k = 0,1,2,...,15)$.

5. Пользуясь методом итераций, составить таблицы значений следующих функций с точностью до 10^{-6}.

а) $\sqrt[4]{x}, \quad x = 0{,}05 + 0{,}02k \ (k = 0,1,2,...,15)$, б) $\sqrt[5]{x}$ для тех же значений x,

в) $\sqrt[6]{x}$ для тех же значений x, г) $\sqrt[7]{x}$ для тех же значений x.

Литература

1. Копченова Н.В., Марон И.А. Вычислительная математика в примерах и задачах. – М.: Наука, 1972.
2. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. Т.1, изд. 3-е. – М.: Наука, 1966.
3. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. Т.2, изд. 2-е. – М.: Наука, 1966.