

УДК 517.97 (575.2) (04)

**ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ  
ОПТИМИЗАЦИИ ТЕПЛОВЫХ ПРОЦЕССОВ ПРИ ВЕКТОРНОМ  
ГРАНИЧНОМ УПРАВЛЕНИИ**

Л.С. Красниченко

Исследованы вопросы однозначной разрешимости задачи нелинейной оптимизации в случае двухстороннего управления процессом распространения тепла по стержню.

*Ключевые слова:* нелинейная оптимизация; оптимальное управление; тепловой процесс; граничное условие.

**I. Слабо обобщенное решение краевой задачи управляемого процесса**

Рассмотрим управляемый тепловой процесс описываемый функцией  $V(t, x)$ , которая удовлетворяет в области  $Q = (0, 1) \times (0, T)$  уравнению теплопроводности [1]

$$V_t = V_{xx} + f(t, x), \quad (t, x) \in Q, \quad (1)$$

а на границе области  $Q$  начальному условию

$$V(0, x) = \psi(x), \quad x \in (0, 1) \quad (2)$$

и граничным условиям

$$V_x(t, 0) = p_1[t, \bar{u}(t)], \quad 0 < t < T, \quad (3)$$

где  $f(t, x) \in H(Q)$  – заданная функция;  $\bar{u}(t) = \{u_1(t), u_2(t)\}$ ,  $\bar{u}(t) \in H^2(0, T)$  – вектор-функция управления;  $p_1[t, \bar{u}(t)]$ ,  $p_2[t, \bar{u}(t)] \in H(0, T)$  функции, нелинейно зависящие от вектор-функции управления, которые описывают изменения теплового источника на границе;  $\psi(x) \in H(0, 1) \forall t \in [0, T]$  – функция начального состояния управляемого процесса; постоянная  $\alpha > 0$ ;  $T$  – фиксированный момент времени;  $H$  – пространство Гильберта;  $H^2 = H \times H$  – декартово произведение пространств  $H$ .

**Определение 1.1.** Слабо обобщенным решением краевой задачи (1)–(3) называется любая функция  $V(t, x) \in H(Q)$ , которая удовлетворяет интегральному тождеству

$$\begin{aligned} & \int_0^1 (V(t, x) \Phi(t, x))_{t_1}^{t_2} dx = \\ & = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^1 [V(t, x)(\Phi(t, x) + \Phi(t, x)) + f(t, x)\Phi(t, x)] dx dt + \\ & + \int_{t_1}^{t_2} -(\Phi_x(t, 1) + \alpha \Phi(t, 1))V(t, 1) + \\ & + \Phi_x(t, 0)V(t, 0) dt + \\ & + \int_{t_1}^{t_2} (p_2[t, \bar{u}(t)]\Phi(t, 1) - \\ & - p_1[t, \bar{u}(t)]\Phi(t, 0)) dt, \end{aligned}$$

при произвольных моментах времени  $t_1$  и  $t_2$  ( $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$ ) и для любой функции  $\Phi(t, x) \in C^{1,2}[Q]$  а также начальному условию (2) в слабом смысле, т. е. соотношение

$$\lim_{t \rightarrow +0} \int_0^1 [V(t, x) - \psi(x)] \Phi_0(x) dx = 0$$

выполняется для любой функции  $\Phi_0(x) \in H(0, 1)$ , где  $C^{1,2}[Q]$  – пространство Гильберта функций, имеющих обобщенную производную 1-го порядка по переменной  $t$  и 2-го порядка по переменной  $x$ .

Используя методику работы [2] нетрудно показать, что функция

$$\begin{aligned} V(t, x) = & \sum_{n=1}^{\infty} \left[ e^{-\lambda_n^2 t} \psi_n + \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} [-z_n(0)p_1[\tau, \bar{u}(\tau)] + \right. \\ & \left. + z_n(1)p_2[\tau, \bar{u}(\tau)] + f_n(\tau)] d\tau z_n(x), \right. \quad (4) \end{aligned}$$

где  $\Psi_n, f_n(t)$  – коэффициенты Фурье соответственно функций  $\psi(x)$  и  $f(x,t)$  является слабо обобщенным решением краевой задачи (1)–(3). Заметим, что единственность решения краевой задачи (1)–(3) обеспечивается лишь при выполнении условия

$$D \begin{pmatrix} p_1, p_2 \\ u_1, u_2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial p_1}{\partial u_1} & \frac{\partial p_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial p_2}{\partial u_1} & \frac{\partial p_2}{\partial u_2} \end{vmatrix} \neq 0, \quad \forall t \in [0, T], \quad (5)$$

т. е. при этом каждое управление  $\bar{u}(t)$  определяет единственное слабо обобщенное решение краевой задачи (1)–(3).

**II. Задача нелинейной оптимизации и условия оптимальности**

Вектор-функция управления  $\bar{u}(t) \in H^2(0, T)$ , для которой краевая задача (1)–(3) имеет единственное слабо обобщенное решение  $V(t, x) \in H(Q)$ , называется допустимым управлением.

Рассмотрим задачу нелинейной оптимизации: среди допустимых управлений  $\bar{u}(t) \in H^2(0, T)$ , требуется найти такое управление  $\tilde{u}(t) \in H^2(0, T)$ , которое вместе с соответствующим ему решением  $V(t, x) \in H(Q)$  краевой задачи (1)–(3) минимизирует квадратичный интегральный функционал

$$I[u(t)] = \int_0^T [V(T, x) - \xi(x)]^2 dx + \beta \int_0^T (u_1^2(t) + u_2^2(t)) dt, \quad \beta > 0,$$

где  $\xi(x) \in H(0, 1)$  заданная функция.

Согласно методике работы [3] нетрудно показать, что имеет место равенство

$$\Delta I[\bar{u}] = - \int_0^T \Delta \Pi [t, V(t, x), \omega(t, x), u_1(t), u_2(t)] dt + \int_0^1 \Delta V^2(T, x) dx,$$

где  $\Delta V(T, x)$  – приращение функции  $V(T, x)$ , соответствующее приращению  $\Delta \bar{u}(t)$  управления  $\bar{u}(t)$ ;  $\Delta \Pi [t, \omega(t, x), \bar{u}(t)]$  – приращение функции

$$\begin{aligned} \Pi(\bullet, u_1(t), u_2(t)) &= \\ &= -\omega(t, 0) p_1(t, u_1(t), u_2(t)) + \\ &+ \omega(t, 1) p_2(t, u_1(t), u_2(t)) - \beta (u_1^2 + u_2^2). \end{aligned}$$

Согласно принципу максимума [3], для оптимального управления получим следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \Pi_{u_1}(\bullet, u_1, u_2) &= -\omega(t, 0) \frac{\partial p_1}{\partial u_1} + \omega(t, 1) \frac{\partial p_2}{\partial u_1} - 2\beta u_1 = 0, \\ \Pi_{u_2}(\bullet, u_1, u_2) &= -\omega(t, 0) \frac{\partial p_1}{\partial u_2} + \omega(t, 1) \frac{\partial p_2}{\partial u_2} - 2\beta u_2 = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

или в матричной форме:

$$2\beta \begin{pmatrix} u_1^0(t) \\ u_2^0(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial p_1}{\partial u_1} & \frac{\partial p_2}{\partial u_1} \\ \frac{\partial p_1}{\partial u_2} & \frac{\partial p_2}{\partial u_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\omega(t, 0) \\ \omega(t, 1) \end{pmatrix}, \quad (7')$$

$$\Pi_{u_{1j}}(\bullet, u_1, u_2) < 0, \quad \left| \begin{matrix} \Pi_{u_{1j}}(\bullet, u_1, u_2) & \Pi_{u_{1j_2}}(\bullet, u_1, u_2) \\ \Pi_{u_{2j_1}}(\bullet, u_1, u_2) & \Pi_{u_{2j_2}}(\bullet, u_1, u_2) \end{matrix} \right| > 0, \quad (8)$$

которые называются условиями оптимальности. Здесь  $\Pi_{u_{ij}}(\bullet, u_1, u_2)$  – частные производные 2-го порядка,  $\omega(t, 1)$  – решение сопряженной краевой задачи.

$$\begin{aligned} \omega_t + \omega_{xx} &= 0, (t, x) \in Q, \\ \omega(T, x) + 2[V(T, x) - \xi(x)] &= 0, x \in (0, 1), \\ \omega_x(t, 0) = 0, \omega_x(t, 1) + \alpha \omega(t, 1) &= 0, 0 < t < T. \end{aligned} \quad (9)$$

Соотношение (7') согласно условию (5) представим в виде

$$\begin{aligned} 2\beta D^{-1} \begin{pmatrix} p_1, p_2 \\ u_1, u_2 \end{pmatrix} &= 2\beta D^{-1} \begin{pmatrix} P(t, \bar{u}) \\ \bar{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega(t, 0) \\ \omega(t, 1) \end{pmatrix}, \\ \omega(t, x) &= -2 \sum_{n=1}^{\infty} (-h_n + \int_0^T e^{-\lambda_n^2(T-t)} \times \\ &\times [-z_n(0) P_1(t, u_1(t), u_2(t)) + \\ &+ z_n(1) P_2(t, u_1(t), u_2(t))] dt) e^{-\lambda_n^2(T-t)} z_n(x). \end{aligned} \quad (10)$$

Легко доказать, что сопряженная краевая задача имеет единственное слабо обобщенное решение:

$$\begin{aligned} \omega(t, x) &= -2 \sum_{n=1}^{\infty} (-h_n + \int_0^T e^{-\lambda_n^2(T-t)} \times \\ &\times [-z_n(0) P_1(t, u_1(t), u_2(t)) + \\ &+ z_n(1) P_2(t, u_1(t), u_2(t))] dt) e^{-\lambda_n^2(T-t)} z_n(x), \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$h_n = \xi_n - e^{-\lambda_n^2 T} \Psi_n - \int_0^T e^{-\lambda_n^2(T-\tau)} f_n(\tau) d\tau.$$

### III. Система нелинейных интегральных уравнений

Оптимальное управление  $\tilde{u}(t)$  находим согласно условиям (7)–(8).

Согласно условию (5) и формулам (10)–(11), уравнение (7) перепишем в виде

$$\begin{aligned} & \beta D^{-1} \begin{pmatrix} p_1, p_2 \\ u_1, u_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T \begin{pmatrix} G_n(t, 0) \\ G_n(t, 1) \end{pmatrix} (G_n(\tau, 0), G_n(\tau, 1)) \times \\ & \times \begin{pmatrix} P_1(t, u_1(t), u_2(t)) \\ P_2(t, u_1(t), u_2(t)) \end{pmatrix} d\tau = \\ & = \sum_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} G_n(t, 0) \\ G_n(t, 1) \end{pmatrix} h_n, \end{aligned} \quad (12)$$

где  $G_n(t, 0) = e^{(-\lambda_n^2(T-t))} z_n(0)$ ,  $G_n(t, 1) = e^{(-\lambda_n^2(T-t))} z_n(1)$ . Для исследования однозначной разрешимости уравнения (12) сначала его перепишем в виде

$$\begin{aligned} & \beta D^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{p} \\ \tilde{u} \end{pmatrix} \tilde{u}(t) + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{G}_n(t, 0, 1) \int_0^T \tilde{G}_n^*(\tau, 0, 1) \tilde{p}(t, \tilde{u}(t)) d\tau = \\ & = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{G}_n(t, 0, 1) h_n, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\tilde{u}(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}, \quad \tilde{G}_n(t, 0, 1) = \begin{pmatrix} G_n(t, 0) \\ G_n(t, 1) \end{pmatrix}$$

$$\text{где } \tilde{p}(t, \tilde{u}(t)) = \begin{pmatrix} p_1(t, u_1(t), u_2(t)) \\ p_2(t, u_1(t), u_2(t)) \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Согласно методике работы [4] положим

$$\beta D^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{p} \\ \tilde{u} \end{pmatrix} \tilde{u}(t) = \begin{pmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \end{pmatrix} = \tilde{\Theta}(t); \quad (15)$$

согласно условию (5), это равенство однозначно разрешается относительно вектор-функции  $\tilde{u}(t)$ , т. е. имеет место равенство

$$\begin{aligned} & \tilde{u}(t) = \tilde{\varphi}[t, \tilde{\Theta}(t), \beta] = \\ & = \begin{pmatrix} \varphi_1[t, \theta_1(t), \theta_2(t), \beta] \\ \varphi_2[t, \theta_1(t), \theta_2(t), \beta] \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (16)$$

С учетом (15)–(16) уравнение (13) преобразуем к виду

$$\tilde{\Theta}(t) = G[\tilde{\Theta}(t)], \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} G[\tilde{\Theta}(t)] &= -G_0[\tilde{\Theta}(t)] + h(t) = \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{G}_n(t, 0, 1) \int_0^T \tilde{G}_n^*(\tau, 0, 1) \tilde{p} \times \\ & \times (t, \tilde{\varphi}[t, \tilde{\Theta}(t), \beta]) d\tau + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{G}_n(t, 0, 1) h_n. \end{aligned}$$

**Теорема:** Пусть выполнены условия:

$$\tilde{p}[t, \tilde{u}(t)] \in H^2(0, T), \quad \forall \tilde{u}(t) \in H^2(0, T),$$

$$D\left(\frac{P(t, \tilde{u})}{\tilde{u}}\right) \neq 0, \quad \forall t \in [0, T],$$

$$\|p[t, u(t)] - p[t, \bar{u}(t)]\|_{H^2} \leq$$

$$\leq p_0 \|\tilde{u}(t) - \bar{u}(t)\|_{H^2}, \quad p_0 > 0,$$

$$\|\varphi[t, \theta(t), \beta] - \varphi[t, \bar{\theta}(t), \beta]\|_{H^2} \leq$$

$$\leq \varphi_0(\beta) \|\tilde{\Theta}(t) - \bar{\Theta}(t)\|_{H^2}, \quad \varphi_0(\beta) > 0.$$

Тогда при выполнении условия

$$\gamma = M_1 p_0 \varphi_0(\beta) \left( \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) < 1, \quad M_1 > 0 \quad (18)$$

операторное уравнение (17) имеет единственное решение  $\tilde{\Theta}(t) \in H^2(0, T)$ .

### IV. Приближенное решение задачи оптимизации

Поскольку найти точное решение уравнения (17) не всегда удастся, на практике ограничиваются нахождением приближенного решения, которое определяется с учетом заданной точности.

Приближенное решение строится по формулам  $\tilde{\theta}_k(t) = G[\tilde{\theta}_{k-1}(t)] = G_0[\tilde{\theta}_{k-1}(t)] + h(t)$ ,  $k=1, 2, 3, \dots$ ,

где  $\tilde{\theta}_0(t)$  – произвольная вектор-функция пространства  $H^2(0, T)$  и удовлетворяет оценке:

$$\|\tilde{\theta}(t) - \tilde{\theta}_k(t)\|_{H^2} \leq \frac{\gamma^k}{1-\gamma} \|G_0[\tilde{\theta}_0(t)] + h(t) - \tilde{\theta}_0(t)\|_{H^2}.$$

Приближение оптимального управления, согласно (16), определяется по формуле

$$\tilde{u}_k(t) = \tilde{\varphi}[t, \tilde{\theta}_k(t), \beta], \quad k=1, 2, 3, \dots$$

и удовлетворяет оценке

$$\begin{aligned} & \|\tilde{u}(t) - \tilde{u}_k(t)\|_{H^2} = \\ & = \|\varphi[t, \tilde{\theta}(t), \beta] - \varphi[t, \tilde{\theta}_k(t), \beta]\|_{H^2} \leq \\ & \leq \varphi_0(\beta) \|\tilde{\theta}(t) - \tilde{\theta}_k(t)\|_{H^2} \leq \\ & \leq \varphi_0(\beta) \frac{\gamma^k}{1-\gamma} \|G_0[\tilde{\theta}_0(t)] + h(t) - \tilde{\theta}_0(t)\|_{H^2}. \end{aligned}$$

из которой следует сходимость приближенного оптимального управления к оптимальному.

Приближенный оптимальный процесс, согласно (4), определяется по формуле

$$V_k(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} [e^{-\lambda_n t} \Psi_n + \int_0^t e^{-\lambda_n(t-\tau)} (f_n(\tau) + z_n^*(1) \tilde{p}[\tau \bar{u}_k(\tau)]) d\tau] z_n(x)$$

и удовлетворяет оценке

$$\|V(t, x) - V_k(t, x)\|_{H^2}^2 \leq \left[ TM_1 \left( \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) \right]^{\frac{1}{2}} P_0 \phi_0(\beta) \frac{\gamma^k}{1-\gamma} \|G_0 [\tilde{q}_0(t)] + h(t) - \tilde{q}_0(t)\|_{H^2},$$

из которого следует сходимость приближенного оптимального процесса к оптимальному.

Приближенное значение функционала, согласно (6), вычисляется по формуле

$$I[\bar{u}_k(t)] = \int_0^1 [V_k(T, x) - \xi(x)]^2 dx + \beta \int_0^T \|\bar{u}_k(t)\|^2 dt$$

и удовлетворяет оценке

$$\begin{aligned} |I[\bar{u}(t)] - I[\bar{u}_k(t)]| &\leq \\ &\leq \left\{ \left( \|V(t, x) + V_k(t, x)\|_{H^2} + 2\|\xi(x)\|_{H^2} \right) \times \right. \\ &\quad \times \left[ 2TM_1 \left( \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) \right]^{\frac{1}{2}} P_0 + \beta \|\bar{u}(t) + \bar{u}_k(t)\|_{H^2} \left. \right\} \times \\ &\quad \times \phi_0(\beta) \frac{\gamma^k}{1-\gamma} \|G_0 [\tilde{q}_0(t) + h(t) - \tilde{q}_0(t)]\|_{H^2}, \end{aligned}$$

из которого следует сходимость приближенного значения функционала к точному.

### Литература

1. Бутковский А.Г. Методы управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1975.
2. Плотников В.И. Энергетическое неравенство и свойства переопределенности системы собственных функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1968. Т. 32. № 4. С. 743–755.
3. Егоров А.И. Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. М.: Наука, 1978. 464 с.
4. Керимбеков А.К. Нелинейное оптимальное управление линейными системами с распределенными параметрами: дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Бишкек: Ин-т математики НАН КР, 2003. 224 с.