

ТАБИГЫЙ-МАТЕМАТИКАЛЫК ИЛИМДЕР

Сооронбаев М.Р., Турганбаев О.М.

Алгоритм определения кривых суточного хода солнца для построения солнечных карт

Составлен геометрический алгоритм определения кривых условного суточного хода Солнца для построения солнечных карт для любой географической широты местности и описаны их аналитические вычисления, ориентированные на автоматизированные построения с использованием средств современной вычислительной техники.

Учитывая возможность использования уже имеющихся [1] сведений о методике конструирования многовариантных геометрических моделей расчета солнечных радиаций (ГМРСР), логические их структуры, общих для всех случаев принципов конструирования, построения солнечных карт, зависящих от способов измерения их геометрических характеристик, рассмотрим их аналитические описания.

В зависимости от положения экрана-посредника (ЭП) относительно горизонтальной и экваториальной системы координат ГМРСР делятся на три варианта. К первому варианту относятся ГМРСР, отнесенные к горизонтальной системе координат $OXYZ$ (ЭП-I), ко второму – к экваториальной $O'X'Y'Z'$ (ЭП-II), а к третьему варианту относятся, те ЭП, которые по своему положению отличаются от ЭП, отнесенных к $OXYZ$ (ЭП-III) [2].

Здесь мы будем рассматривать только определение числовых значений и алгоритмы построения кривых суточного хода Солнца для характерных дат – 22-е число каждого месяца в течение всего года – семейство $U\delta_i$ линий для варианта I.I. и III.I.

ВАРИАНТ 1.1. Пусть в качестве экрана-посредника выбрана поверхность параболоида вращения (ЭПП), определяемая уравнением преобразования небесной сферы Φ в Φ'_n .

$$X^2+Y^2+2RZ-R^2=0 \quad (1)$$

При этом масштаб получаемых солнечных карт зависит от параметра формы R исходной поверхности небесной сферы $\Phi(R = 1, 2, \dots, n)$. В связи с этим отпадает необходимость вертикального перемещения плоскости горизонта Π , а если требуется ее перемещение, то параметр $\pm \varepsilon$ принимает любое числовое значение.

Область движения Солнца в течение года, угол наклона который непосредственно связан с угловым значением географической широты φ местности. Движение солнечного луча относительно исследуемой точки K образует однопараметрическое множество круговых конусов солнечных лучей (∞^1 КЛ), свободный параметр которых определяет угловое значение склонения Солнца, относительно плоскости экватора небосферы (Φ) и выражается уравнениям.

$$X^2+Y^2-Z^2 \operatorname{ctg}^2 \delta = 0 \quad (2)$$

Исследуемая точка K в пространстве определяется координатами X_K, Y_K, Z_K в горизонтальной системе координат $OXYZ$, тогда уравнение ∞^1 КЛ с учетом формулы преобразования

$$X' = X \sin \varphi + Z \cos \varphi, \quad Y = Y, \quad Z' = X \cos \varphi + Z \sin \varphi, \quad (3)$$

известными из курса аналитической геометрии [3] запишется в следующем виде

$$A_K X^2 + Y^2 + C_K Z^2 + 2D_K XZ = 0, \quad (4)$$

где

$$A_K = \sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi \operatorname{Ctg}^2 \delta ,$$

$$C_K = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi \operatorname{Ctg}^2 \delta ,$$

$$D_K = \sin \varphi \cos \varphi (1 + \operatorname{Ctg}^2 \delta) = \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\sin^2 \delta} .$$

Для отображения на плоскости видимых из точки зрения траекторий Солнца, сектор ограничивается углами $90^\circ - j = \varphi \pm \delta$ и решается позиционная задача – определяется линия взаимного пересечения ∞^1 КЛ и ЭПП, для характерных дней каждого месяца в течение всего года. Для этого ∞^1 КЛ с вершиной, расположенной в начале $OXYZ$, причем $K \equiv 0$ на заданной широте φ , с учетом уравнений (2) и (3), выразим в аналитическом виде формулой(4).

Совместное решение уравнений (1) и (4) дает уравнение искомым линий – кривых условного суточного хода Солнца на Π . Однако для решения таких позиционных задач на поверхностях, использование существующих традиционных подходов, в некоторых случаях, является нерациональным из-за сложности аппарата численных методов. Например, в указанном случае решение системы уравнений (1 и 4) показывает, что промежуточный результат уравнения четвертого порядка, точнее биквадратное уравнение, решение которого требует, сравнительно больших вычислений.

В связи с этим предлагается наиболее удобный и упрощенный алгоритм построения ортогональных проекций линий пересечения поверхностей, имеющих общую плоскость симметрии, применительно к данной или подобным данным, задачам, зная, что они на общей плоскости симметрии проецируются в виде прямой, а на плоскости Π – окружностями.

В данном случае необходимым и достаточным условием является определение координаты точек пересечения, образующих конуса лучей MN и EF , инцидентных главной меридиональной или общей плоскости симметрии, с поверхностью ЭПП. Очевидно, что уравнения образующих MN и EF (рис. 1) можно выразить в $OXYZ$ как уравнения прямой с угловым коэффициентом [3].

$$Z_{M,N,E,F} = \operatorname{tg} \alpha X_{M,N,E,F} \tag{5}$$

где, $\alpha = 90^\circ - \varphi \pm \delta$, при этом склонение Солнца δ со знаком “+” для точки M и N , а для точки E и F - δ со знаком “-”.

Для определения точки пересечения прямых MN и EF с ЭПП составим систему уравнений (1) и (5), решение которых дает пространственные координаты искомым точек (рис.1):

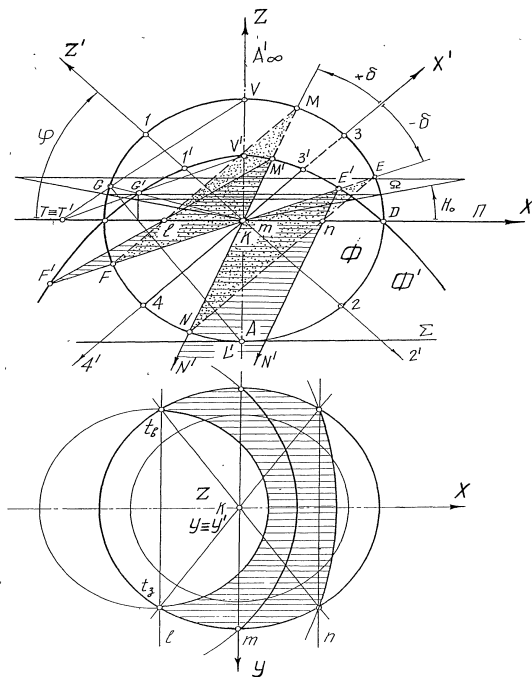


Рис.1. Геометрия преобразованной небесной сферы Φ в параболоид вращения Φ'

$M(X_M, O, Z_M), N(X_N, O, Z_N), E(X_E, O, Z_E)$, и $F(X_F, O, Z_F)$:

$$X_{M,E} = \frac{R(1 - \sin \alpha)}{\cos \alpha}, \quad X_{N,F} = \frac{R(1 - \sin \alpha)}{\cos \alpha} \quad (6)$$

Подстановка значений X_M, X_N, X_E, X_F , в исходное положение уравнение (5) дает координаты Z_M, Z_N, Z_E, Z_F .

В данном случае, заданные поверхности ∞^1 КЛ и ЭПП пересекают по плоской кривой. Это означает что, через точки $M(X_M, O, Z_M)$ и $F(X_F, O, Z_F)$ и параллельно оси OY можно провести секущую плоскость. Тогда, уравнение этой плоскости через ее нормальный вектор можно выразить следующим образом:

$$A(X - X_F) + B(Z - Z_F) = 0 \quad (7)$$

где $A = Z_M - Z_F$, $B = X_F - X_M$

Из этого уравнения, определив переменную Z , и подставив ее в уравнения (1), получим уравнение окружности:

$$(X - C_\delta)^2 + y^2 = R_\delta^2 \quad (8)$$

$$C_\delta = \frac{RA}{B}, \quad R_\delta = \frac{R}{B} \sqrt{A^2 + B^2 - 2RB(A X_F + B Z_F)}$$

Для точек $E(X_E, O, Z_E)$ и $N(X_N, O, Z_N)$ задача решается аналогично выше описанному и соответствует осенне-весеннему периоду года. Если принять во внимание, что ортогональные проекции плоских сечений параболоида вращения на плоскость, нормальную к его оси, есть окружности, то указанная задача может быть решена сравнительно просто, без больших вычислений. Учитывая (8), R_δ и C_δ для осенне-весеннего периода времени с 22.09 по 22.03. имеют следующий вид:

$$R_\delta = \frac{|X_F| + |X_M|}{2}, \quad C_\delta = R_\delta - |X_F| \quad (9)$$

И для весенно-осеннего периода времени с 22.03 по 22.09, имеют следующий вид:

$$R_\delta = \frac{|X_E| + |X_N|}{2}, \quad C_\delta = R_\delta - |X_N| \quad (10)$$

Аналитические выражения (9) и (10) – результат использования свойств, при заранее известном характере линий плоского сечения, а уравнение (8), аналитически еще раз доказывает корректность свойства плоских сечений ЭПП и свидетельствует о простоте решения поставленных задач с использованием предлагаемого алгоритма для указанного типа задач.

Таким образом, окружности, описываемые уравнением (8) с учетом (9) и (10), есть искомое семейство U_{δ_i} линий – кривые суточного хода Солнца для характерных дат – 22 число каждого месяца в течение всего года, параметром которых является склонения δ . Кроме того построение семейство U_{δ_i} линий зависит и от значения параметра формы R небесной сферы, так как чем больше значение R , тем больше масштаб построения солнечных карт ЭПП-I (рис.2).

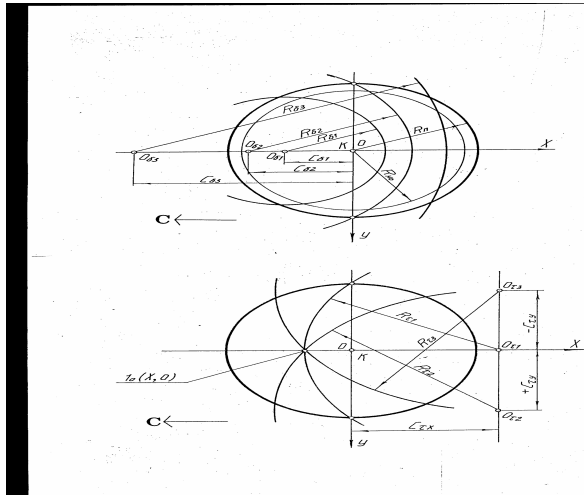


Рис.2. Порядок построения кривых (окружностей) суточного хода Солнца для солнечной карты ЭПИ-I.

$$R_{\Pi}=R \quad (12)$$

ПРИМЕР. Пусть требуется определить числовые значения семейства $u_{\delta i}$ линий для $\varphi = 40,5^\circ$ северной широты (г.Ош, г.Коканд, г.Маргалан), для характерных дат – 22-е число каждого месяца в течение всего года.

1. Параметр формы ЭЭП-I – $R=6$;
2. Характерная дата – 22 июня – самое высокое Солнцестояние года;
3. Определяем значения $\alpha=90^\circ-\varphi\pm\delta$. При этом необходимо учитывать, что для точки M и N значения δ со знаком “+”, а для точки E и F значения δ со знаком “-“. Значения склонение Солнца можно получить из таблицы №2 [4].

- для точки M – $\alpha = 90^\circ - 40,5^\circ + 23,4^\circ = 72,90^\circ$;
- для точки F – $\alpha = 90^\circ - 40,5^\circ - 23,4^\circ = 26,10^\circ$.

4. По формуле (6) находим координаты точки M и F

$$X_M = \frac{R(1 - \sin\alpha)}{\cos\alpha} = \frac{6(1 - \sin 72,9^\circ)}{\cos 72,9^\circ} = \frac{6(1 - 0,9558)}{0,294} = 0,962;$$

$$X_F = \frac{R(-1 - \sin\alpha)}{\cos\alpha} = \frac{6(-1 - \sin 26,1^\circ)}{\cos 26,1^\circ} = \frac{6(1 - 0,4399)}{0,898} = -9,621.$$

5. Зная, что кривые суточного хода Солнца в нашем варианте есть окружности описываемые по формуле (8), находим их центры и радиусы, используя формулы (9)

$$R_\delta = \frac{|X_F| + |X_M|}{2} = \frac{|-9,621| + |0,902|}{2} = 5,261;$$

$$C_\delta = R_\delta - |X_F| = 5,261 - |-9,621| = -4,36.$$

Полученные цифровые значения $R_\delta=5.261$ и $C_\delta=-4,36$ есть параметры окружности для построения хода Солнца на горизонтальной плоскости (или на прозрачной бумаге) для 22 июня, как один из элементов солнечной карты ЭПИ-I (рис.2).

Для точности и корректности определим числовые значения еще для точек N и E по выше предлагаемому алгоритму без лишних описаний:

1. $R=6$; $\varphi=40,5^\circ$ с.ш.

Кроме семейства $u_{\delta i}$ и v_{ii} на солнечную карту накладывается прозрачный круг горизонта, центр которого совпадает с точкой зрения $K \equiv O$, где находится наблюдатель или исследуемая точка. Величина радиуса круга горизонта определяется из уравнения $R^2 = 2P \frac{R^2}{2R}$ или

$$P=R \quad (11)$$

где P – параметр формы параболоида вращения, который, очевидно связан с параметром формы R небесной сферы Φ [2].

Таким образом при условии, что $Z = 0$;

2. 22 января и 22 ноября
3. для точки N – $\alpha = 90^\circ - 40,5^\circ + 20^\circ = 69,5^\circ$;
для точки E – $\alpha = 90^\circ - 40,5^\circ - 20^\circ = 29,5^\circ$.
4. $X_N = \frac{R(-1 - \sin\alpha)}{\cos\alpha} = \frac{6(-1 - \sin 69,5^\circ)}{\cos 69,5^\circ} = \frac{6(-1 - 0,936)}{0,350} = -33,180$;
 $X_E = \frac{R(1 - \sin\alpha)}{\cos\alpha} = \frac{6(1 - \sin 29,5^\circ)}{\cos 29,5^\circ} = \frac{6(1 - 0,492)}{0,870} = 3,499$.
5. $R_\delta = \frac{|X_E| + |X_N|}{2} = \frac{|3,499| + |-33,180|}{2} = 18,34$;
 $C_\delta = R_\delta - |X_E| = 18,34 - |3,499| = -14,841$.

Для других характерных дат каждого месяца значения α , $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, R , C и координаты X точки M, N, E, F занесены в таблицу №1 для практического использования по географической широты $\varphi=40,5^\circ$ района строительства г.Ош, г.Коканд, г.Маргалан и т. д. Эти же данные могут быть использованы для южной вышеуказанной широты, если поменять направление юг на север.

Таблица 1.

Дата	R, c	Коорд. x	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\alpha=90^\circ-\varphi \pm \delta$	Коорд. X	R, c	Дата
22.06.	$R= 5,261$	$X_M= 0,902$	0,955	0,294	72,90	$X_N= -39,908$	$R= 21,825$	22.12.
	$c= -4,359$	$X_F= -9,621$	0,440	0,898	26,1	$X_E= 3,742$	$c= -18,083$	
22.05. 22.07	$R= 5,687$	$X_M= 1,085$	0,936	0,350	69,5	$X_N= -33,180$	$R= 18,340$	22.01. 22.11
	$c= -4,602$	$X_F= -10,288$	0,492	0,870	29,5	$X_E= 3,499$	$c= -14,841$	
22.04. 22.08	$R= 6,927$	$X_M= 1,552$	0,874	0,484	61	$X_N= -23,200$	$R= 13,063$	22.02. 22.10.
	$c= -5,375$	$X_F= -12,302$	0,615	0,788	38	$X_E= 2,926$	$c= -10,137$	
22.03. 22.09	$R= 9,239$	$X_M= 2,214$	0,760	0,649	49,5			
	$c= -7,025$	$X_F= -16,264$	0,760	0,649	49,5			

Таблица 2.

Дата	22.01.	22.02.	22.03.	22.04.	22.05.	22.06.
склонение	-20°	-11,5°	0°	+11,5°	+20°	+23,4°
Дата	22.07.	22.08.	22.09.	22.10.	22.11.	22.12.
склонение	+20°	+11,5°	0°	-11,5°	-20°	-23,4°

Очевидно, что сравнительная сложность пользования математическими формулами всегда вызывают появление ряда таблиц. В нашем случае, тоже составлена таблица для получения числовых значений радиуса (R) и смещение центра (C) окружностей по оси X для северной широты от 40° до 52° для практического использования при построении солнечной карты ЭПП-I (таблица №3). Эти окружности, естественно, представляют собой условные суточные кривые хода Солнца для характерных дат в течение всего года.

Кроме этого, учитывая большое удобство пользования и их преимущество перед таблицами, построена диаграмма (рис.3.). На диаграмме вертикальная шкала представляет собой широту местности до $0,1^\circ$. Для определения смещения центра окружностей для каждого

месяца берем расстояние слева по горизонтали от вертикальной шкалы до кривых линий соответствующего месяца ($C\delta i$).

Далее, от этой же точки кривой линии по горизонтали до точки прямой, расположенной справа от вертикальной шкалы, отсчитывается радиус окружности ($R\delta i$) соответствующего месяца и т.п. Предлагаемая диаграмма дает полную информацию для построения кривых (окружностей) суточного хода Солнца для 22-го числа каждого месяца в течение всего года и северных широт от 40° до 52° . Подобную диаграмму можно построить для всей северной широты, а если повернуть юг на север, то получим диаграмму для южных широт.

Как отмечено выше, что существует третий вариант конструирования ГМРСР. Как видно из солнечных карт первого варианта, получаемых в $OXYZ$, проекции поверхности экранов с семействами $U\delta i$ линий разворачиваются внутри круга горизонта и последний ограничивает простор их использования.

Дата	R, c	$40^\circ c.ш.$	$41^\circ c.ш.$	$42^\circ c.ш.$	$43^\circ c.ш.$	$44^\circ c.ш.$	$45^\circ c.ш.$	$46^\circ c.ш.$	$47^\circ c.ш.$	$48^\circ c.ш.$	$49^\circ c.ш.$	$50^\circ c.ш.$	$51^\circ c.ш.$	$52^\circ c.ш.$
22.06.	$R=$	5,3	5,23	5,16	5,1	5,04	4,99	4,93	4,88	4,83	4,78	4,73	4,69	4,65
	$c=$	4,42	4,3	4,18	4,07	3,95	3,84	3,73	3,63	3,52	3,42	3,32	3,22	3,12
22.05.	$R=$	5,73	5,65	5,58	5,51	5,44	5,37	5,31	5,25	5,2	5,14	5,09	5,04	4,99
22.07.	$c=$	4,67	4,54	4,41	4,29	4,16	4,04	3,93	3,81	3,7	3,59	3,48	3,37	3,27
22.04.	$R=$	6,98	6,87	6,77	6,67	6,58	6,49	6,4	6,32	6,24	6,16	6,09	6,02	5,95
22.08.	$c=$	5,46	5,29	5,13	4,98	4,83	4,68	4,54	4,4	4,26	4,13	3,99	3,87	3,74
22.03.	$R=$	9,33	9,15	8,97	8,8	8,64	8,49	8,34	8,2	8,07	7,95	7,83	7,72	7,61
22.09.	$c=$	7,15	6,9	6,66	6,43	6,21	6	5,79	5,6	5,4	5,22	5,03	4,86	4,69
22.02.	$R=$	22,42	21,27	12,52	12,18	18,51	17,77	17,09	16,48	15,91	15,4	14,93	14,49	14,09
22.10.	$c=$	18,71	17,49	9,49	9,09	14,51	13,69	12,94	12,24	11,6	11,01	10,45	9,94	9,45
22.01.	$R=$	18,75	17,95	17,24	16,58	15,99	15,44	14,94	14,48	14,06	13,66	13,3	12,96	12,64
22.11.	$c=$	15,28	14,42	13,63	12,91	12,24	11,62	11,05	10,51	10,01	9,54	9,1	8,68	8,28
22.12.	$R=$	13,26	12,87	20,25	19,33	11,87	11,58	11,31	11,05	10,81	10,59	10,38	10,18	9,99
	$c=$	10,37	9,92	16,39	15,41	8,71	8,36	8,02	7,69	7,38	7,09	6,81	6,54	6,28

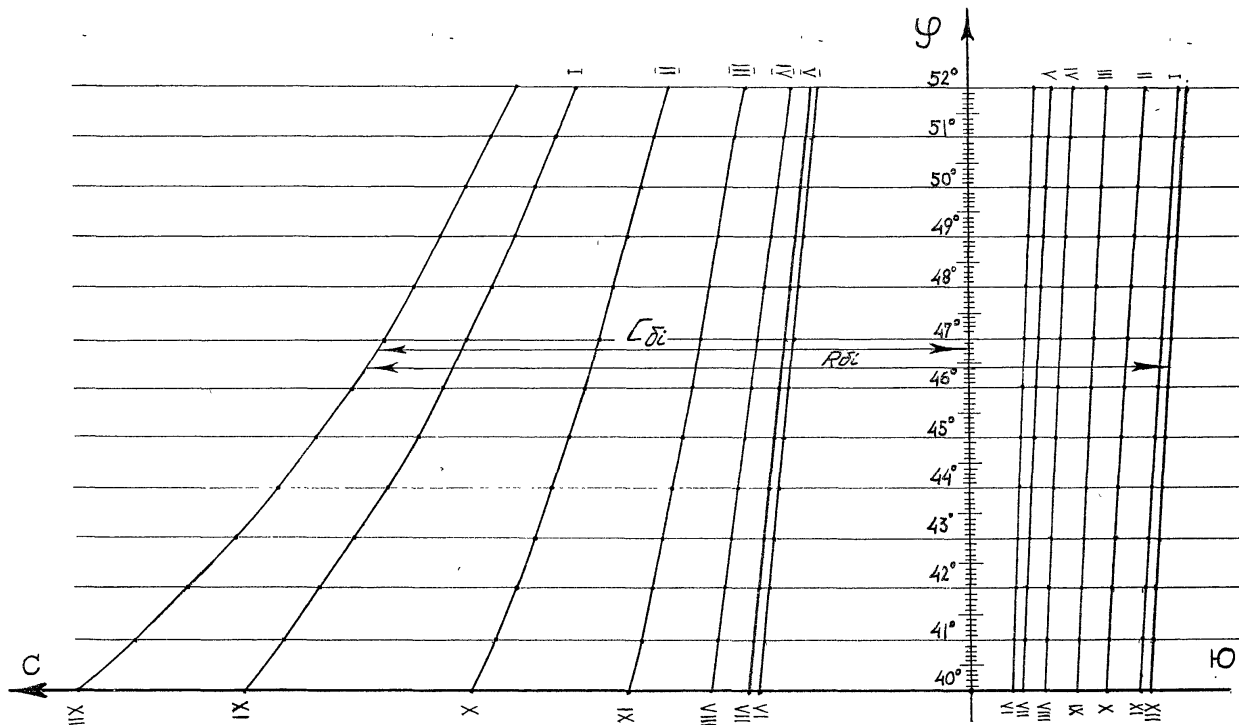


Рис.3. Диаграмма для определения кривых (окружностей) суточного хода Солнца для построения солнечной карты ЭПП-I($\varphi=40^\circ$ с.ш. – $\varphi=52^\circ$ с.ш.)

Кроме того, имея преобразованную поверхность вращения, можно получить оригинальную солнечную карту, где траектории Солнца ортогонально проецируются не внутри круга горизонта, а вне него. Для этого в процессе конструирования ГМРСР достаточно, чтобы поверхность параболоида вращения была восходящая в $OXYZ$.

ВАРИАНТ III. Экран – посредник – параболоид (ЭПП – III).

Уравнение ЭПП в $OXYZ$ (рис.4).

$$X^2 + Y^2 - 2RZ - R^2 = 0 \quad (13)$$

Уравнение (13) получено в результате преобразования небосферы радиусом R , при этом точка A совпадает с точкой V зенита (рис.3).

I. Пространственные координаты точек $M(X_M, O, Z_M)$, $N(X_N, O, Z_N)$, $E(X_E, O, Z_E)$, $F(X_F, O, Z_F)$:

определяются формулами.

$$X_{M,E} = \frac{R(1 + \sin\alpha)}{\cos\alpha}, \quad X_{N,F} = \frac{R(\sin\alpha - 1)}{\cos\alpha} \quad (14)$$

Подстановка значений X_M, X_N, X_E, X_F в уравнения (5) определяет координаты соответственно Z_M, Z_N, Z_E, Z_F .

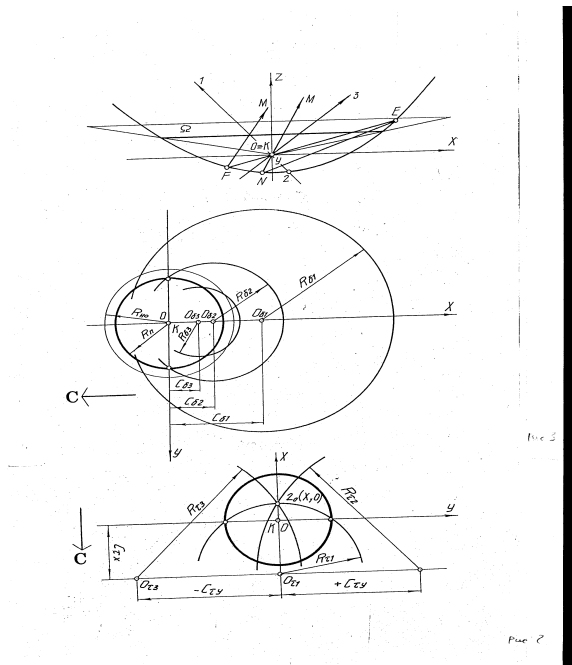


Рис.4. Порядок построения кривых (окружностей) суточного хода Солнца для солнечной карты ЭПП-III.

Уравнение семейства $U\delta i$ линий с учетом (14) принимает такой же вид как (7) с параметрами, определяемыми равенствами, (8) – (10), (рис.4).

Предлагаемый геометрический алгоритм, главным образом, ориентирован на автоматизированное построение солнечных карт с использованием средств машинной графики и вычислительной техники для любой широты местности.

Литература

1. *Исманжанов А.И, Сооронбаев М.Р., Турганбаев О.М.* Алгоритм определения часовых линий и концентрических окружностей высоты солнца для построения солнечных карт. // Гелиотехника. 2008. № 1. 83 стр.
2. *Сооронбаев М.Р.* Рациональные геометрические модели расчета инсоляции и солнцезащитных средств. // Бишкек, 2000. 161 стр.
3. *Мухелишвили Н.И.* Курс аналитической геометрии. // Изд.2, ОНТИ ГТТИ, 1934. 276 стр.
4. *Дашкевич Л.Л.* Методы расчета инсоляции при проектировании промышленных зданий. // Госстройиздат, 1939. 139 стр.

* * *