МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ

КЫРГЫЗСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ им. И.РАЗЗАКОВА

Кафедра «Высшая математика»

ПОЛНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ

ПРЕДНАЗНАЧЕНЫ ДЛЯ СТУДЕНТОВ 1-КУРСА МЭИ-КГТУ И ФТИМ

БИШКЕК 2011

«Рассмотрено»
на заседании кафедры
«Высшая математика»
им. Р. Усубакунова
Протокол № 7 от 11.05.2010 г.

«Одобрено»
Методическим советом
энергетического факультета

Протокол № 10 от 20.06.2011 г.

УДК: 514.122.(076)

Составители: СУЛАЙМАНОВ Б.Э., МЫРЗАПАЯЗОВА З.К..

Полное исследование функции. Предназначены для студентов 1-курса МЭИ-КГТУ и ФТиМ / КГТУ им. И.Раззакова; сост.: Б.Э.Сулайманов, З.К.Мырзапаязова. – Б.: ИЦ «Текник», 2011. – 24 с.

В методических указаниях приведены краткий теоретический материал по «Исследования функции». Изложения теоретического материала сопровождается разбором задач. По каждой теме приводится задания для самостоятельной работы.

Предназначены для студентов 1-курса МЭИ-КГТУ и ФТиМ.

Илл.: 2 . Библиогр.: наименов.

Рецензент доц. Пахыров З.П.

Тех. редактор ***Субанбердиева Н.Е.***

Подписано к печати 15.08.2011 г. Формат бумаги 60x84 $^{1}/_{16}$.

Бумага офс. Печать офс. Объем 1,25 п.л. Тираж 100 экз. Заказ 286. Цена 25,65 с.
Бишкек, ул. Сухомлинова, 20. ИЦ “Текник” КГТУ им. И.Раззакова, т.: 54-29-43
e-mail: beknur@mail.ru

Исследование функций с помощью производной. Возрастание и убывание функций

Теорема. 1) *Если функция $f(x)$ имеет производную на отрезке $[a, b]$ и возрастает на этом отрезке, то ее производная на этом отрезке неотрицательна, т.е. $f'(x) \geq 0$.*

2) *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на промежутке (a, b), причем $f'(x) > 0$ для $a < x < b$, то эта функция возрастает на отрезке $[a, b]$.*

Доказательство.

1) Если функция $f(x)$ возрастает, то $f(x + \Delta x) > f(x)$ при $\Delta x>0$ и $f(x + \Delta x) < f(x)$ при $\Delta x<0$, тогда:

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} > 0, \qquad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \geq 0.$$

2) Пусть $f'(x)>0$ для любых точек x_1 и x_2, принадлежащих отрезку $[a, b]$, причем $x_1<x_2$.

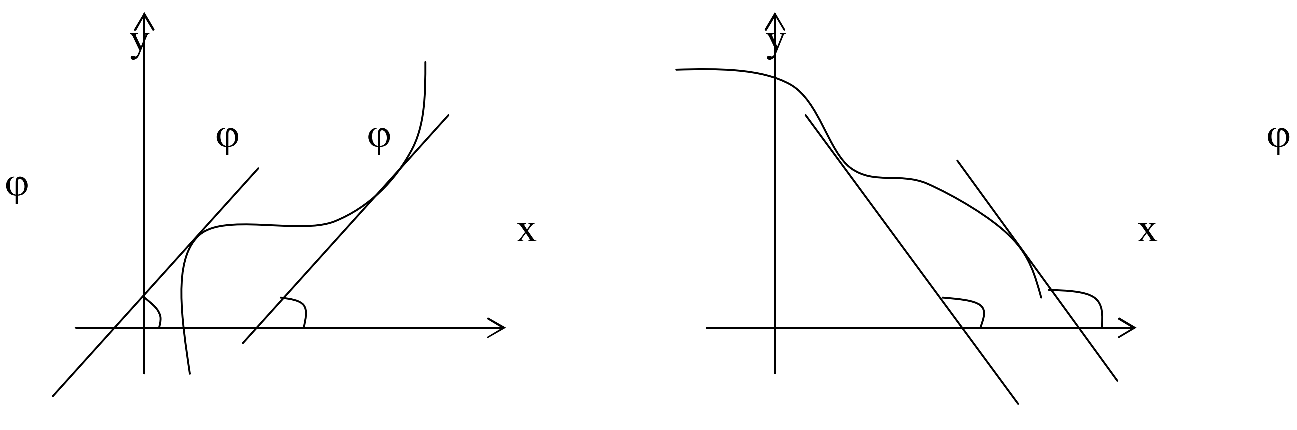
Тогда по теореме Лагранжа: $f(x_2) - f(x_1) = f'(\varepsilon)(x_2 - x_1)$, $x_1 < \varepsilon < x_2$
По условию $f'(\varepsilon)>0$, следовательно, $f(x_2) - f(x_1) >0$, т.е. функция $f(x)$ возрастает.

Теорема доказана.

Аналогично можно сделать вывод о том, что если функция $f(x)$ убывает на отрезке $[a, b]$, то $f'(x)\leq 0$ на этом отрезке. Если $f'(x)<0$ в промежутке (a, b), то $f(x)$ убывает на отрезке $[a, b]$.

Конечно, данное утверждение справедливо, если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b).

Доказанную выше теорему можно проиллюстрировать геометрически:



Точки экстремума

Определение. Функция f(x) имеет в точке x_1 максимум, если ее значение в этой точке больше значений во всех точках некоторого интервала, содержащего точку x_1. Функция f(x) имеет в точке x_2 минимум, если $f(x_2 + \Delta x) > f(x_2)$ при любом Δx (Δx может быть и отрицательным).

Очевидно, что функция, определенная на отрезке может иметь максимум и минимум только в точках, находящихся внутри этого отрезка. Нельзя также путать максимум и минимум функции с ее наибольшим и наименьшим значением на отрезке – это понятия принципиально различные.

Определение. Точки максимума и минимума функции называются **точками экстремума.**

Теорема. (необходимое условие существования экстремума) *Если функция f(x) дифференцируема в точке $x = x_1$ и точка x_1 является точкой экстремума, то производная функции обращается в нуль в этой точке.*

Доказательство.

Предположим, что функция f(x) имеет в точке $x = x_1$ максимум.

Тогда при достаточно малых положительных $\Delta x>0$ верно неравенство:

$f(x_1 + \Delta x) < f(x_1)$, т.е.

$f(x_1 + \Delta x) - f(x_1) < 0$

Тогда

$$\frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} > 0 \qquad при \quad \Delta x < 0$$

$$\frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} < 0 \qquad при \quad \Delta x > 0$$

По определению:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} = f'(x_1)$$

Т.е. если $\Delta x \to 0$, но $\Delta x<0$, то $f'(x_1) \geq 0$, а если $\Delta x \to 0$, но $\Delta x>0$, то $f'(x_1) \leq 0$.

А возможно это только в том случае, если при $\Delta x \to 0$ $f'(x_1) = 0$.

Для случая, если функция f(x) имеет в точке x_2 минимум теорема доказывается аналогично.

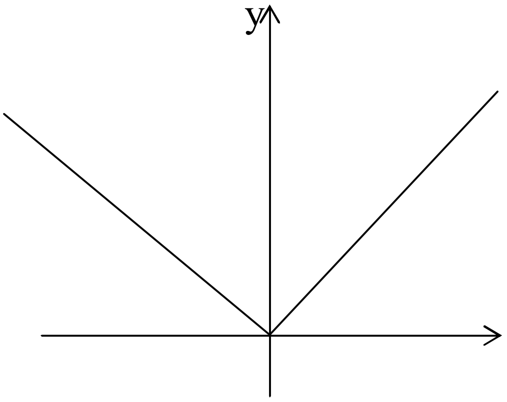
Теорема доказана.

Следствие. Обратное утверждение неверно. Если производная функции в некоторой точке равна нулю, то это еще не значит, что в этой точке функция имеет экстремум. Красноречивый пример этого – функция $y = x^3$, производная которой в точке x = 0 равна нулю, однако в этой точке функция имеет только перегиб, а не максимум или минимум.

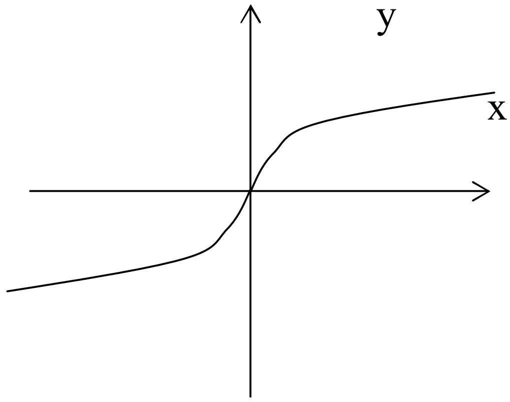
Определение. **Критическими точками** функции называются точки, в которых производная функции не существует или равна нулю.

Рассмотренная выше теорема дает нам необходимые условия существования экстремума, но этого недостаточно.

<u>Пример:</u> $f(x) = |x|$



<u>Пример:</u> $f(x) = \sqrt[3]{x}$



В точке x = 0 функция имеет минимум, но не имеет производной.
В точке x = 0 функция не имеет ни максимума, ни минимума, ни производной.

Вообще говоря, функция f(x) может иметь экстремум в точках, где производная не существует или равна нулю.

<u>**Теорема.**</u> (Достаточные условия существования экстремума)

Пусть функция f(x) непрерывна в интервале (a, b), который содержит критическую точку x_1, и дифференцируема во всех точках этого интервала (кроме, может быть, самой точки x_1).

Если при переходе через точку x_1 слева направо производная функции $f'(x)$ меняет знак с "+" на "-", то в точке $x = x_1$ функция f(x) имеет максимум, а если производная меняет знак с "-" на "+"- то функция имеет минимум.

<u>**Доказательство.**</u>

Пусть $\begin{cases} f'(x) > 0 & при \quad x < x_1 \\ f'(x) < 0 & при \quad x > x_1 \end{cases}$

По теореме Лагранжа: $f(x) - f(x_1) = f'(\varepsilon)(x - x_1)$, где $x < \varepsilon < x_1$.

Тогда: 1) Если $x < x_1$, то $\varepsilon < x_1$; $f'(\varepsilon)>0$; $f'(\varepsilon)(x - x_1)<0$, следовательно

$$f(x) - f(x_1)<0 \quad или \quad f(x) < f(x_1).$$

2) Если $x > x_1$, то $\varepsilon > x_1$ $f'(\varepsilon)<0$; $f'(\varepsilon)(x - x_1)<0$, следовательно

$$f(x) - f(x_1)<0 \quad или \quad f(x) < f(x_1).$$

Т. к. ответы совпадают, то можно сказать, что $f(x) < f(x_1)$ в любых точках вблизи x_1, т.е. x_1 – точка максимума.

Доказательство теоремы для точки минимума производится аналогично.

Теорема доказана.

На основе вышесказанного можно выработать единый порядок действий при нахождении наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке:

1) Найти критические точки функции.
2) Найти значения функции в критических точках.
3) Найти значения функции на концах отрезка.
4) Выбрать среди полученных значений наибольшее и наименьшее.

Исследование функции на экстремум с помощью производных высших порядков

Пусть в точке $x = x_1$ $f'(x_1) = 0$ и $f''(x_1)$ существует и непрерывна в некоторой окрестности точки x_1.

Теорема. *Если $f'(x_1) = 0$, то функция $f(x)$ в точке $x = x_1$ имеет максимум, если $f''(x_1)<0$ и минимум, если $f''(x_1)>0$.*

Доказательство.

Пусть $f'(x_1) = 0$ и $f''(x_1)<0$. Т.к. функция $f(x)$ непрерывна, то $f''(x_1)$ будет отрицательной и в некоторой малой окрестности точки x_1.

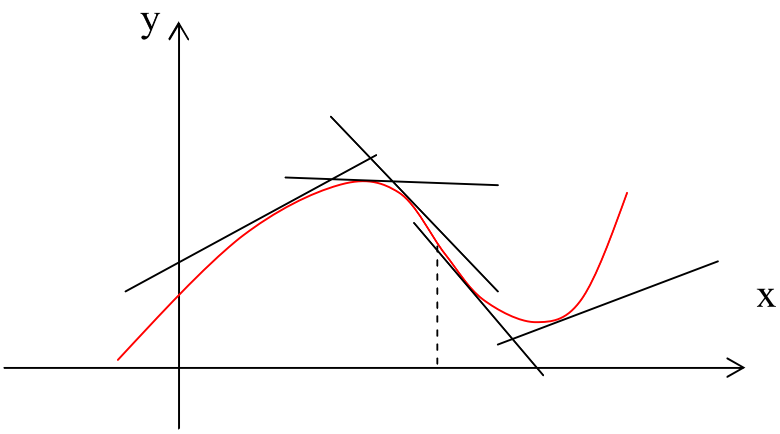
Т.к. $f''(x) = (f'(x))' < 0$, то $f'(x)$ убывает на отрезке, содержащем точку x_1, но $f'(x_1)=0$, т.е. $f'(x) > 0$ при $x<x_1$ и $f'(x) < 0$ при $x>x_1$. Это и означает, что при переходе через точку $x = x_1$ производная $f'(x)$ меняет знак с “+” на “-“, т.е. в этой точке функция $f(x)$ имеет максимум.

Для случая минимума функции теорема доказывается аналогично.

Если $f''(x) = 0$, то характер критической точки неизвестен. Для его определения требуется дальнейшее исследование.

Выпуклость и вогнутость кривой. Точки перегиба

Определение. Кривая обращена выпуклостью **вверх** на интервале (a, b), если все ее точки лежат ниже любой ее касательной на этом интервале. Кривая, обращенная выпуклостью вверх, называется **выпуклой**, а кривая, обращенная выпуклостью вниз – называется **вогнутой**.



На рисунке показана иллюстрация приведенного выше определения.

Теорема 1. *Если во всех точках интервала (a, b) вторая производная функции f(x) отрицательна, то кривая y = f(x) обращена выпуклостью вверх (выпукла).*

Доказательство.

Пусть $x_0 \in (a, b)$. Проведем касательную к кривой в этой точке.

Уравнение кривой: y = f(x);

Уравнение касательной: $\overline{y} - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

Следует доказать, что $y - \overline{y} = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$.

По теореме Лагранжа для f(x)– f(x_0): $y - \overline{y} = f'(c)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$, $x_0 < c < x$.

$$y - \overline{y} = (x - x_0)[f'(c) - f'(x_0)]$$

По теореме Лагранжа для $f'(c) - f'(x_0)$:

$y - \overline{y} = f''(c_1)(c - x_0)(x - x_0)$, $\quad x_0 < c_1 < c$

Пусть $x > x_0$ тогда $x_0 < c_1 < c < x$. Т.к. $x - x_0 > 0$ и $c - x_0 > 0$, и кроме того есть условие $f''(c_1) < 0$, следовательно, $y - \overline{y} < 0$.

Пусть $x < x_0$ тогда $x < c < c_1 < x_0$ и $x - x_0 < 0$, $c - x_0 < 0$, т.к. по условию $f''(c_1) < 0$, то $y - \overline{y} < 0$.

Аналогично доказывается, что если $f''(x) > 0$ на интервале (a, b), то кривая y=f(x) вогнута на интервале (a, b).

Теорема доказана.

Определение. Точка, отделяющая выпуклую часть кривой от вогнутой, называется **точкой перегиба**.

Очевидно, что в точке перегиба касательная пересекает кривую.

Теорема 2. *Пусть кривая определяется уравнением y = f(x). Если вторая производная f″(a) = 0 или f″(a) не существует и при переходе че-*

рез точку x = a f″(x) меняет знак, то точка кривой с абсциссой x = a является точкой перегиба.

Доказательство.

1) Пусть f″(x) < 0 при x < a и f″(x) > 0 при x > a. Тогда при x < a кривая выпукла, а при x > a кривая вогнута, т.е. точка x = a – точка перегиба.

2) Пусть f″(x) > 0 при x < b и f″(x) < 0 при x < b. Тогда при x < b кривая обращена выпуклостью вниз, а при x > b – выпуклостью вверх. Тогда x = b – точка перегиба.

Теорема доказана.

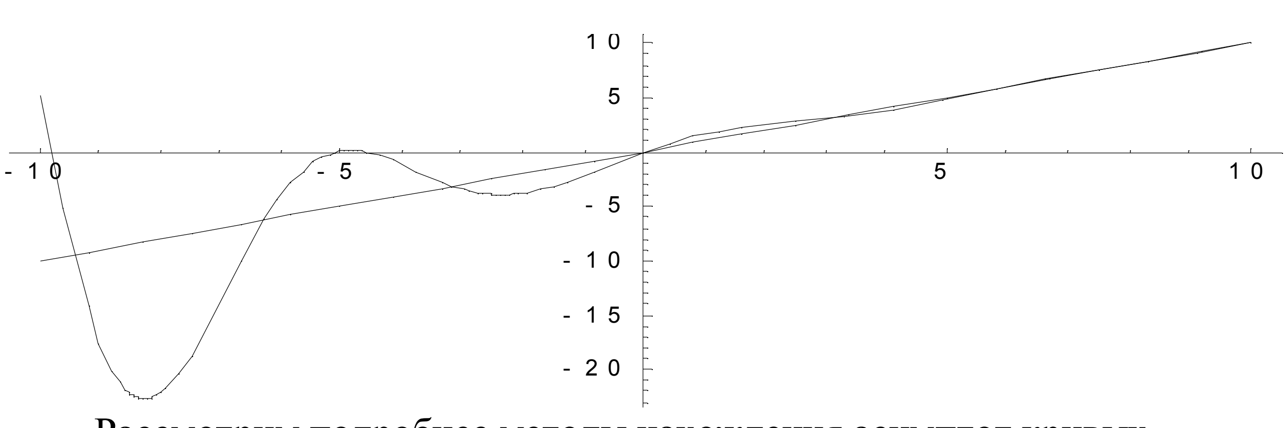
Асимптоты графика функции

При исследовании функций часто бывает, что при удалении координаты x точки кривой в бесконечность кривая неограниченно приближается к некоторой прямой.

Определение. Прямая называется **асимптотой** кривой, если расстояние от переменной точки кривой до этой прямой при удалении точки в бесконечность стремится к нулю.

Следует отметить, что не любая кривая имеет асимптоту. Асимптоты могут быть прямые и наклонные. Исследование функций на наличие асимптот имеет большое значение и позволяет более точно определить характер функции и поведение графика кривой.

Вообще говоря, кривая, неограниченно приближаясь к своей асимптоте, может и пересекать ее, причем не в одной точке, как показано на приведенном ниже графике функции $y = x + e^{-\frac{x}{3}} \sin x$. Ее наклонная асимптота y = x.



Рассмотрим подробнее методы нахождения асимптот кривых.

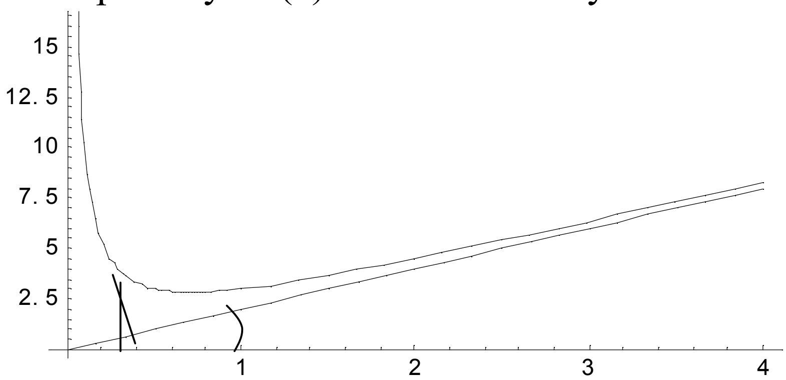
Вертикальные асимптоты

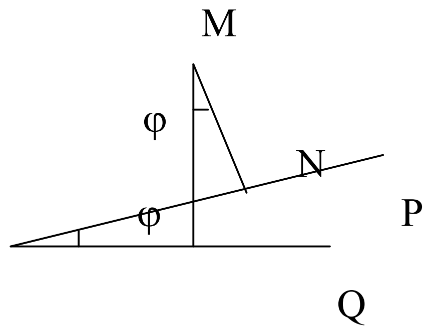
Из определения асимптоты следует, что если $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\infty$ или $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=\infty$ или $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, то прямая *x=a* – асимптота кривой *y = f(x)*.

Например, для функции $f(x)=\dfrac{2}{x-5}$ прямая $x = 5$ является вертикальной асимптотой.

Наклонные асимптоты

Предположим, что кривая y = f(x) имеет наклонную асимптоту y = kx + b.





Обозначим точку пересечения кривой и перпендикуляра к асимптоте – M, P – точка пересечения этого перпендикуляра с асимптотой. Угол между асимптотой и осью Ox обозначим φ. Перпендикуляр MQ к оси Ox пересекает асимптоту в точке N.

Тогда MQ = y – ордината точки кривой, NQ = $\bar{y}$ - ордината точки N на асимптоте.

По условию: $\lim\limits_{x\to\infty}|MP|=0$, $\angle NMP = \varphi$, $|NM|=\dfrac{|MP|}{\cos\varphi}$.

Угол φ - постоянный и не равный 90^0, тогда

$$\lim_{x\to\infty}|MP|=\lim_{x\to\infty}|NM|\cos\varphi=\lim_{x\to\infty}|NM|=0$$

$$|NM|=\left||MQ|-|QN|\right|=|y-\bar{y}|=|f(x)-(kx+b)|$$

Тогда $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-(kx+b)]=0$.

Итак, прямая y = kx + b – асимптота кривой. Для точного определения этой прямой необходимо найти способ вычисления коэффициентов k и b.

В полученном выражении выносим за скобки x:

$$\lim_{x\to\infty} x\left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x}\right] = 0$$

Т.к. $x\to\infty$, то $\lim_{x\to\infty}\left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x}\right] = 0$, т.к. b = const, то $\lim_{x\to\infty}\frac{b}{x} = 0$; $\lim_{x\to\infty} k = k$.

Тогда $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} - k - 0 = 0$, следовательно,

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}.$$

Т.к. $\lim_{x\to\infty}[f(x) - (kx+b)] = 0$, то $\lim_{x\to\infty}[f(x) - kx] - \lim_{x\to\infty} b = 0$, следовательно,

$$b = \lim_{x\to\infty}[f(x) - kx]$$

Отметим, что горизонтальные асимптоты являются частным случаем наклонных асимптот при k =0.

<u>Пример.</u> Найти асимптоты и построить график функции $y = \frac{x^2 + 2x - 1}{x}$.

1) Вертикальные асимптоты: $y\to+\infty$ $x\to 0-0$: $y\to-\infty$ $x\to 0+0$, следовательно, x = 0- вертикальная асимптота.

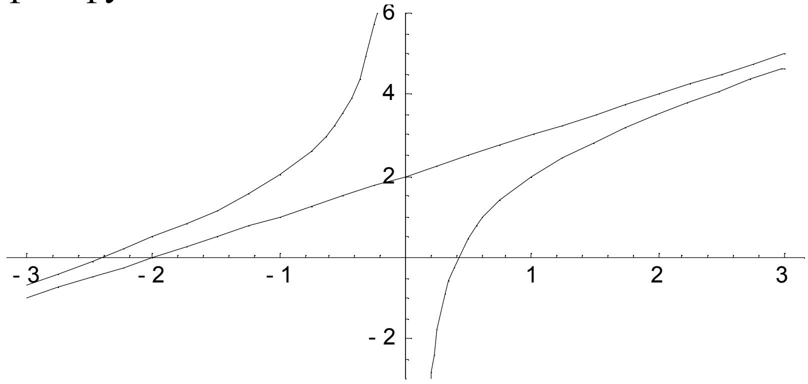
2) Наклонные асимптоты:

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x-1}{x^2} = \lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right) = 1$$

$$b = \lim_{x\to\infty}(f(x) - x) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x-1}{x} - x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x-1-x^2}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(2 - \frac{1}{x}\right) = 2$$

Таким образом, прямая $y = x + 2$ является наклонной асимптотой.

Построим график функции:



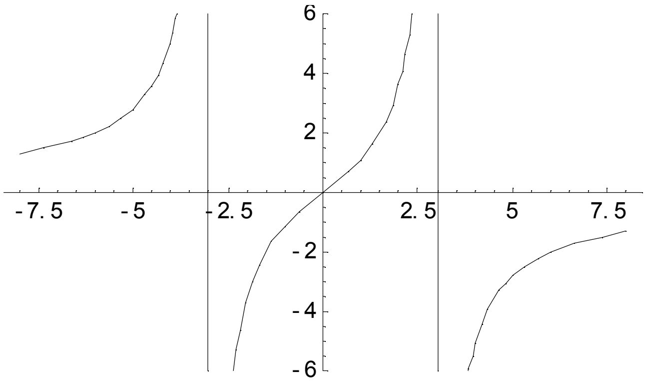
Пример. Найти асимптоты и построить график функции $y = \frac{9x}{9 - x^2}$.

Прямые $x = 3$ и $x = -3$ являются вертикальными асимптотами кривой.

Найдем наклонные асимптоты: $k = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{9}{9 - x^2} = 0$

$$b = \lim_{x\to\infty} \frac{9x}{9 - x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{9}{x}}{\frac{9}{x^2} - 1} = 0$$

y = 0 – горизонтальная асимптота.



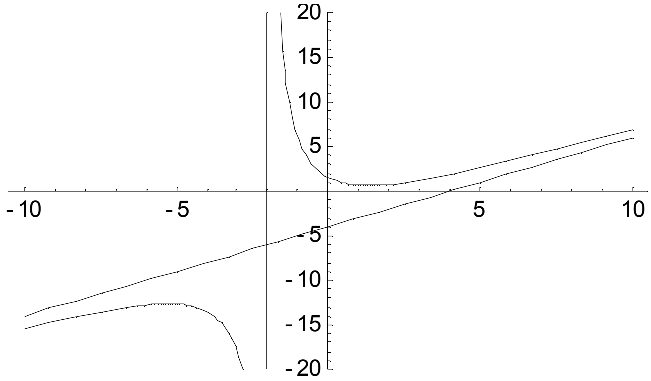
Пример. Найти асимптоты и построить график функции $y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x + 2}$.

Прямая x = -2 является вертикальной асимптотой кривой.
Найдем наклонные асимптоты.

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 2x + 3}{x(x+2)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 + 2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}}{1 + \frac{2}{x}} = 1.$$

$$b = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2 - 2x + 3}{x + 2} - x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2 - 2x + 3 - x^2 - 2x}{x + 2}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{-4x + 3}{x + 2} = \lim_{x\to\infty} \frac{-4 + \frac{3}{x}}{1 + \frac{2}{x}} = -4$$

Итого, прямая y = x – 4 является наклонной асимптотой.



<u>Схема исследования функций</u>

Процесс исследования функции состоит из нескольких этапов. Для наиболее полного представления о поведении функции и характере ее графика необходимо отыскать:

1) Область существования функции.

Это понятие включает в себя и область значений и область определения функции.

2) Точки разрыва. (Если они имеются).
3) Интервалы возрастания и убывания.
4) Точки максимума и минимума.
5) Максимальное и минимальное значение функции на ее области определения.
6) Области выпуклости и вогнутости.
7) Точки перегиба.(Если они имеются).
8) Асимптоты.(Если они имеются).
9) Построение графика.

Применение этой схемы рассмотрим на примере.

<u>Пример.</u> Исследовать функцию $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$ и построить ее график.

Находим область существования функции. Очевидно, что *областью определения* функции является область $(-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; \infty)$.

В свою очередь, видно, что прямые $x = 1$, $x = -1$ являются *вертикальными асимптотами* кривой.

Областью значений данной функции является интервал $(-\infty; \infty)$.

Точками разрыва функции являются точки $x = 1, x = -1$.

Находим *критические точки*.

Найдем производную функции

$$y' = \frac{3x^2(x^2-1) - 2x \cdot x^3}{(x^2-1)^2} = \frac{3x^4 - 3x^2 - 2x^4}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2}$$

Критические точки: $x = 0$; $x = -\sqrt{3}$; $x = \sqrt{3}$; $x = -1$; $x = 1$.

Найдем вторую производную функции

$$y'' = \frac{(4x^3 - 6x)(x^2 - 1)^2 - (x^4 - 3x^2)4x(x^2 - 1)}{(x^2 - 1)^4} =$$

$$= \frac{(4x^3 - 6x)(x^4 - 2x^2 + 1) - (x^4 - 3x^2)(4x^3 - 4x)}{(x^2 - 1)^4} =$$

$$= \frac{4x^7 - 8x^5 + 4x^3 - 6x^5 + 12x^3 - 6x - 4x^7 + 4x^5 + 12x^5 - 12x^3}{(x^2 - 1)^4} =$$

$$= \frac{2x^5 + 4x^3 - 6x}{(x^2 - 1)^4} = \frac{2x(x^4 + 2x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^4} = \frac{2x(x^2 + 3)(x^2 - 1)}{(x^2 - 1)^4} = \frac{2x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3}.$$

Определим выпуклость и вогнутость кривой на промежутках.

$-\infty < x < -\sqrt{3}$, $y'' < 0$, кривая выпуклая

$-\sqrt{3} < x < -1$, $y'' < 0$, кривая выпуклая

$-1 < x < 0$, $y'' > 0$, кривая вогнутая

$0 < x < 1$, $y'' < 0$, кривая выпуклая

$1 < x < \sqrt{3}$, $y'' > 0$, кривая вогнутая

$\sqrt{3} < x < \infty$, $y'' > 0$, кривая вогнутая

Находим промежутки *возрастания* и *убывания* функции. Для этого определяем знаки производной функции на промежутках.

$-\infty < x < -\sqrt{3}$, $y' > 0$, функция возрастает

$-\sqrt{3} < x < -1$, $y' < 0$, функция убывает

$-1 < x < 0$, $y' < 0$, функция убывает

$0 < x < 1$, $y' < 0$, функция убывает

$1 < x < \sqrt{3}$, $y' < 0$, функция убывает

$\sqrt{3} < x < \infty$, $y'' > 0$, функция возрастает

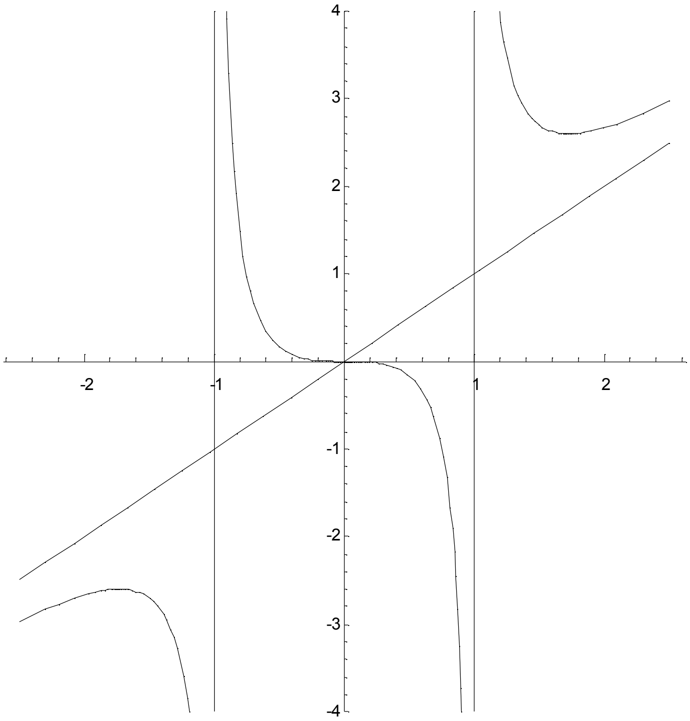
Видно, что точка $x = -\sqrt{3}$ является точкой *максимума*, а точка $x = \sqrt{3}$ является точкой *минимума*. Значения функции в этих точках равны соответственно $-3\sqrt{3}/2$ и $3\sqrt{3}/2$.

Про вертикальные *асимптоты* было уже сказано выше. Теперь найдем *наклонные асимптоты*.

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2 - 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{x^2}} = 1;$$

$$b = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2 - 1} - x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3 - x^3 + x}{x^2 - 1}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2 - 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x^2}} = 0$$

Итого, уравнение наклонной асимптоты – $y = x$.
Построим *график* функции:



Исследовать на экстремум следующие функции:

1. $y = 2 + x - x^2$.
2. $y = (x - 1)^3$.
3. $y = (x - 1)^4$.
4. $y = x^m(1 - x)^n$ (m и n –целые положительные числа).
5. $y = cosx + chx$.
6. $y = (x + 1)^{10}e^{-x}$.
7. $y = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right)e^{-x}$ (n –натуральное число).
8. $y = |x|$.
9. $y = x^{\frac{1}{3}}(1 - x)^{\frac{2}{3}}$.
10. Исследовать на экстремум в точке $x = x_0$ функцию
$f(x) = (x - x_0)^n\varphi(x)$
(n –натуральное число), где функция $\varphi(x)$ непрерывна при $x = x_0$ и $\varphi(x_0) \neq 0$.
11. Пусть $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, $f'(x) = \frac{P_1(x)}{Q^2(x)}$ и x_0 –стационарная точка функции $f(x)$, т.е. $P_1(x_0) = 0, Q(x_0) \neq 0$.

Доказать, что

$$sgnf''(x_0) = sgnP_1'(x_0).$$

12. Можно ли утверждать, что если функция $f(x)$ в точке x_0 имеет максимум, то в некоторой достаточно малой окрестности этой точки слева от точки x_0 функция $f(x)$ возрастает, справа от нее убывает?

Рассмотреть пример:

$f(x) = 2 - x^2(2 + sin\frac{1}{x})$, если $x \neq 0$ и $f(0) = 2$.

13. Доказать, что функция

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}, \text{ если } x \neq 0 \text{ и } f(0) = 0,$$

имеет в точке $x = 0$ минимум, а функция

$$g(x) = xe^{-\frac{1}{x^2}}, \text{ если } x \neq 0 \text{ и } g(0) = 0$$

не имеет в точке экстремума, хотя

$$f^{(n)}(0) = 0, g^{(n)}(0) = 0 \quad (n = 1,2, \dots).$$

Построить графики этих функции.

14. Исследовать на экстремум функции:

а) $f(x) = e^{-\frac{1}{|x|}}\left(\sqrt{2} + sin\frac{1}{x}\right)$ при $x \neq 0$ и $f(0) = 0$;

б) $f(x) = e^{-\frac{1}{|x|}}\left(\sqrt{2} + cos\frac{1}{x}\right)$ при $x \neq 0$ и $f(0) = 0$.

Построить графики этих функции.

15. Исследовать на экстремум в точке $x = 0$ функцию

$$f(x) = |x|\left(2 + cos\frac{1}{x}\right), \text{ если } x \neq 0 \text{ и } f(0) = 0.$$

Построить график этой функции.

Найти экстремумы следующих функции:

1. $y = x^3 + 6x^2 + 9x - 4$.
2. $y = x^2 - x^4$.
3. $y = x(x-1)^2(x-2)^3$.
4. $y = x + \frac{1}{x}$.
5. $y = \frac{2x}{1+x^2}$.
6. $y = \frac{x^2-3x+2}{x^2+2x+1}$.
7. $y = \sqrt{2x - x^2}$.
8. $y = x\sqrt[3]{x-1}$.
9. $y = xe^{-x}$.
10. $y = \sqrt{x}lnx$.
11. $y = \frac{ln^2x}{x}$.
12. $y = cosx + \frac{1}{2}cos2x$.
13. $y = \frac{10}{1+sin^2x}$.
14. $y = arctgx - \frac{1}{2}\ln(1 + x^2)$.

15. $y = e^x \sin x$.
16. $y = |x|e^{-|x-1|}$.

Найти наименьшие и наибольшие значения следующих функции:

1. $f(x) = 2^x$ на сегменте [-1;5].
2. $f(x) = x^2 - 4x + 6$ на сегменте [-3;10].
3. $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$ на сегменте [-10;10].
4. $f(x) = x + \frac{1}{x}$ на сегменте [0,01;100].
5. $f(x) = \sqrt{5 - 4x}$ на сегменте [-1;1].

Построить графики следующих функций:

1. $y = 3x - x^3$.
2. $y = 1 + x^2 - \frac{x^4}{2}$.
3. $y = (x + 1)(x - 2)^2$.
4. $y = \frac{2-x^2}{1+x^4}$.
5. $y = \frac{x^2-1}{x^2-5x+6}$.
6. $y = \frac{x}{(1+x)(1-x)^2}$.
7. $y = \frac{x^4}{(1+x)^3}$.
8. $y = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^4$.
9. $y = \frac{x^2(x-1)}{(1+x)^2}$.
10. $y = \frac{x}{(1+x^2)^2}$.
11. $y = \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$.
12. $y = \frac{x^4+8}{x^3+1}$.
13. $y = \frac{1}{1+x} - \frac{10}{3x^2} + \frac{1}{1-x}$.
14. $y = (x - 3)\sqrt{x}$.
15. $y = \pm\sqrt{8x^2 - x^4}$.
16. $y = \frac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}$.
17. $y = \pm\sqrt{(x - 1)(x - 2)(x - 3)}$.
18. $y = \sqrt[3]{x^3 - x^2 - x + 1}$.
19. $y = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^2 + 1}$.

20. $y = (x+2)^{\frac{2}{3}} - (x-2)^{\frac{2}{3}}.$

21. $y = (x+1)^{\frac{2}{3}} + (x-1)^{\frac{2}{3}}.$

22. $y = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}.$

23. $y = \frac{x^2\sqrt{x^2-1}}{2x^2-1}.$

24. $y = \frac{|1+x|^{\frac{3}{1}}}{\sqrt{x}}.$

25. $y = 1 - x + \sqrt{\frac{x^3}{3+x}}.$

26. $y = \sqrt[3]{\frac{x^2}{x+1}}.$

27. $y = \sqrt{\frac{x^4+3}{x^2+1}}.$

28. $y = sinx + cos^2x.$

29. $y = (7 + 2cosx)sinx.$

30. $y = sinx + \frac{1}{3}sin3x.$

31. $y = cosx - \frac{1}{2}cos2x.$

32. $y = sin^4x + cos^4x.$

33. $y = sinxsin3x.$

34. $y = \frac{sinx}{sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}.$

35. $y = \frac{cosx}{cos2x}.$

36. $y = \frac{sinx}{2+cosx}.$

37. $y = 2x - tgx.$

38. $y = e^{2x-x^2}.$

39. $y = (1+x^2)e^{-x^2}.$

40. $y = x + e^{-x}.$

41. $y = x^{\frac{2}{3}}e^{-x}.$

42. $y = e^{-2x}sin^2x.$

43. $y = \frac{e^x}{1+x}.$

44. $y = \sqrt{1 - e^{x^2}}.$

45. $y = \frac{lnx}{\sqrt{x}}.$

46. $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right).$

47. $y = \sqrt{x^2+1}\,ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right).$

48. $y = \frac{arcsinx}{\sqrt{1-x^2}}$.

49. $y = x + arctgx$.

50. $y = \frac{x}{2} + arctgx$.

51. $y = xarctgx$.

52. $y = arcsin\frac{2x}{1+x^2}$.

53. $y = arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}$.

54. $y = (x+2)e^{\frac{1}{x}}$.

55. $y = 2^{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}$.

56. $y = ln\frac{x^2-3x+2}{x^2+1}$.

57. $y = \alpha arcsin\frac{x}{\alpha} - \sqrt{\alpha^2 - x^2}$ $(\alpha > 0)$.

58. $y = arccos\frac{1-x}{1-2x}$.

59. $y = x^x$.

60. $y = x^{\frac{1}{x}}$.

61. $y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$.

62. $y = x\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ $(x > 0)$.

63. $y = \frac{e^{\frac{1}{1-x^2}}}{1+x^2}$ (без исследования вогнутости).

Построить кривые, заданные в параметрической форме:

1. $x = \frac{(t+1)^2}{4}$, $y = \frac{(t-1)^2}{4}$.
2. $x = 2t - t^2$, $y = 3t - t^2$.
3. $x = \frac{t^2}{t-1}$, $y = \frac{t}{t^2-1}$.
4. $x = \frac{t^2}{1-t^2}$, $y = \frac{1}{1+t^2}$.
5. $x = t + e^{-t}$, $y = 2t + e^{-2t}$.
6. $x = \alpha cos2t$, $y = \alpha cos3t$ $(\alpha > 0)$.
7. $x = cos^4t$, $y = sin^4t$.
8. $x = tlnt$, $y = \frac{lnt}{t}$.
9. $x = \frac{\alpha}{cos^3t}$, $y = \alpha tg^3t$ $(\alpha > 0)$.
10. $x = \alpha(sht - t)$, $y = \alpha(cht - t)$ $(\alpha > 0)$.

Литература

1. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. – М.: Наука, 1985.
2. Шнейдер В.Е., Слуцкий А.И., Шумов А.С. Краткий курс высшей математики. – М.: Высшая школа, 1978. Т.1.
3. Бугров Я.С., Никольский С.М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. М., 1988.
4. Высшая математика для экономистов. Под ред. Н.Ш.Кремера. М., 2001 г.
5. Бугров Я.С., Никольский С.М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. – М.: Наука, 1980, 1984 и т.д.
6. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: Наука, 1980, 1984 и т.д.