УДК 539.3:534.2

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ТЕРМОУПРУГИХ ВОЛН В АНИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ

СЕЙТХАНОВА А.К.
nurlybek_79@mail.ru

Павлодарский государственный университет им. С. Торайгырова, г. Павлодар, Казахстан,

ABOUT PROPAGATION OF THERMOELASTIC WAVES IN ANISOTROPIC MEDIUMS

SEYTHANOVA A.K.
nurlybek_79@mail.ru

The Pavlodar state university of S.Torajgyrov, Pavlodar t., Kazakhstan,

Актуальность исследования закономерностей волновых процессов в упругих средах с термомеханическим эффектом связана с необходимостью решения теоретических и прикладных задач геофизики, сейсмологии, механики композитных материалов и т.д. Связанные уравнения движения и уравнения теплопроводности отличаются сложностью и обилием физико-механических параметров. В связи с этим интенсивно развивается раздел механики деформируемого твердого тела - термоупругость. В рамках этого направления, опираясь на использование определенных физико-механических свойств в анизотропных средах, изучаются связанные тепловые и механические поля. В данной статье на основе метода матриканта рассмотрено построение системы дифференциальных уравнений 1-го порядка и вытекающей из нее матрицы коэффициентов для термоупругих волн, распространяющихся в анизотропной среде триклинной сингонии.

Введение

В данной работе на основе метода матриканта [1] рассмотрено построение системы дифференциальных уравнений 1-го порядка и вытекающей из нее матрицы коэффициентов для термоупругих волн, распространяющихся в анизотропной среде триклинной сингонии. Построена структура матриканта уравнений движения термоупругих волн в объемном случае. Данная среда обладает самой низкой симметрией и обладает 21-ю упругими и 9-ю термомеханическими параметрами.

1. Определяющие соотношения

Анализ распространения термоупругих волн в анизотропных средах основывается на совместном решении уравнений движения [2]:

$$\sigma_{ij,j} = \rho \ddot{U}_i \tag{1}$$

или в покомпонентной форме

$$\frac{\partial \sigma_{XX}}{\partial X} + \frac{\partial \sigma_{XY}}{\partial Y} + \frac{\partial \sigma_{XZ}}{\partial Z} = \rho \frac{\partial^2 U_X}{\partial t^2};$$

$$(1)^{/}$$

$$\frac{\partial \sigma_{XY}}{\partial X} + \frac{\partial \sigma_{YY}}{\partial Y} + \frac{\partial \sigma_{YZ}}{\partial Z} = \rho \frac{\partial^2 U_Y}{\partial t^2};$$

$$\frac{\partial \sigma_{XZ}}{\partial X}+\frac{\partial \sigma_{YZ}}{\partial Y}+\frac{\partial \sigma_{ZZ}}{\partial Z}=\rho\,\frac{\partial^2 U_Z}{\partial t^2};$$

уравнения теплопроводности Фурье

$$\lambda_{ij}\frac{\partial \theta}{\partial x_j}=-q_i\,; \tag{2}$$

уравнения притока тепла

$$\frac{\partial q_i}{\partial x_i}=-i\omega\beta_{ij}\varepsilon_{ij}-i\omega\frac{c_\varepsilon}{T_0}\theta\,, \tag{3}$$

где σ_{ij} – тензор напряжения, ρ – плотность среды, λ_{ij} – тензор теплопроводности, q_i – вектор притока тепла, ω – круговая частота, β_{ij} – термомеханические параметры, ε_{ij} – тензор малых деформаций Коши, c_ε – теплоемкость при постоянной деформации, $\theta=T-T_0$ – приращение температуры по сравнению с температурой естественного состояния T_0, $\left|\frac{\theta}{T_0}\right|\prec\prec 1$ для малых деформаций.

Физико-механические величины связаны соотношением Дюгамеля-Неймана:

$$\sigma_{ij}=c_{ijkl}\varepsilon_{kl}-\beta_{ij}\theta. \tag{4}$$

Для *триклинной сингонии* (оси произвольны) число упругих постоянных равно 21, а термомеханических параметров – 9. В матричном виде соотношение Дюгамеля - Неймана (4) для триклинной сингонии имеет вид:

$$\begin{pmatrix}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yy}\\ \sigma_{zz}\\ \sigma_{yz}\\ \sigma_{xz}\\ \sigma_{xy}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}&c_{13}&c_{14}&c_{15}&c_{16}\\ c_{12}&c_{22}&c_{23}&c_{24}&c_{25}&c_{26}\\ c_{13}&c_{23}&c_{33}&c_{34}&c_{35}&c_{36}\\ c_{14}&c_{24}&c_{34}&c_{44}&c_{45}&c_{46}\\ c_{15}&c_{25}&c_{35}&c_{45}&c_{55}&c_{56}\\ c_{16}&c_{26}&c_{36}&c_{46}&c_{56}&c_{66}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \varepsilon_3\\ \varepsilon_4\\ \varepsilon_5\\ \varepsilon_6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\beta_{11}&\beta_{12}&\beta_{13}\\ \beta_{12}&\beta_{22}&\beta_{23}\\ \beta_{13}&\beta_{23}&\beta_{33}\end{pmatrix}\theta\,, \tag{4$'$}$$

где c_{ijkl} – упругие параметры анизотропной среды триклинной сингонии.

2. Система дифференциальных уравнений 1 порядка

Уравнения (1) − (4) определяют взаимосвязь механических напряжений и температуры как функции независимых переменных – теплового поля и деформации.

На основе метода разделения переменных в случае гармонической зависимости от времени:

$$\left[U_i(x,y,z,t);\ \ \sigma_{ij}(x,y,z,t);\ \theta;\ q_z\right]=\left[U_i(z),\sigma_{ij}(z),\ \theta;\ q_z\right]e^{i(\omega t-mx-ny)} \tag{5}$$

система уравнений (1) − (4) приводится к системе дифференциальных уравнений 1-го порядка с переменными коэффициентами, описывающей распространение гармонических волн:

$$\frac{d\vec{W}}{dz}=B\vec{W}\,. \tag{6}$$

Здесь $\vec{W}(x,y,z,t)=\left[u_z(z),\sigma_{zz},u_x(z),\sigma_{xz},u_y(z),\sigma_{yz},\theta,q_z\right]^t \exp(i\omega\, t-i\,mx-i\,ny)$ – вектор-столбец. Символ t означает операцию транспонирования вектора − строки в вектор – столбец. $B=B\left[c_{ijkl}(z),\beta_{ij}(z),\theta,\omega,m,n\right]$ – матрица коэффициентов, элементы которой содержат в себе параметры среды, в которой распространяются термоупругие волны, m,n − компоненты волнового вектора $\widetilde{k}$.

Матрица коэффициентов в объемном случае для триклинной сингонии имеет вид:

$$B=\begin{bmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} & b_{16} & b_{17} & 0 \\ b_{21} & 0 & 0 & b_{24} & 0 & b_{26} & 0 & 0 \\ b_{24} & b_{14} & b_{33} & b_{34} & b_{35} & b_{36} & b_{37} & 0 \\ 0 & b_{13} & b_{43} & b_{33} & b_{45} & b_{46} & b_{47} & 0 \\ b_{26} & b_{16} & b_{46} & b_{36} & b_{55} & b_{56} & b_{57} & 0 \\ 0 & b_{15} & b_{45} & b_{35} & b_{65} & b_{55} & b_{67} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{78} \\ 0 & -i\omega\, b_{17} & -i\omega\, b_{37} & \omega\, b_{47} & -\omega\, b_{57} & -\omega\, b_{67} & b_{87} & 0 \end{bmatrix}.$$

Из структуры матрицы коэффициентов следует, что в пространственном случае упругие волны различной поляризации и тепловые волны взаимосвязаны. Связь тепловой волны с упругими волнами характеризуется коэффициентом b_{17}, который равен

$$b_{17}=\frac{(c_{45}^2-c_{44}c_{55})(\beta_{13}+\beta_{23}+\beta_{33})}{a}.$$

Взаимосвязь упругих волн различной поляризации определяется наличием и расположением в матрице коэффициентов − b_{37}, b_{47}, b_{57}, соответственно равные:

$$b_{37}=\frac{(c_{35}c_{44}-c_{34}c_{45})(\beta_{13}+\beta_{23}+\beta_{33})}{a};$$

$$b_{47}=-i\left(\frac{c_{34}^2\beta_{13}+c_{33}(c_{45}\beta_{23}-c_{44}\beta_{13})+c_{35}c_{44}\beta_{33}-c_{34}(c_{35}\beta_{23}+c_{45}\beta_{33})}{a}\right);$$

$$b_{57}=-\frac{(c_{35}c_{45}-c_{34}c_{55})(\beta_{13}+\beta_{23}+\beta_{33})}{a};$$

где $a=c_{35}^2c_{44}-2c_{34}c_{35}c_{45}+c_{34}^2c_{55}+c_{33}\left(c_{45}^2-c_{44}c_{55}\right)$.

Малое количество нулей в матрице коэффициентов говорит о низкой симметрии анизотропной среды триклинной сингонии.

3. Структура матрицанта

Построение структуры матрицанта основано на его представлении в форме экспоненциального матричного ряда [3]:

$$T=E+\int_0^z B dz_1+\int_0^z\int_0^{z_1} B(z_1)B(z_2)dz_1dz_2+\ldots \qquad (7)$$

И аналогичном представлении обратного матрицанта T^{-1}

$$T^{-1}=E-\int_0^z B dz_1+\int_0^z\int_0^{z_1} B(z_2)B(z_1)dz_1dz_2-\ldots \qquad (8)$$

Матричные ряды (7), (8) представимы в виде сумм матриц

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} T_{(n)}, T^{-1} = \sum T^{-1}_{(n)} . \tag{9}$$

Структура матриканта в случае распространения термоупругих волн в кристаллах триклинной сингонии в объемном случае определена в виде:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} t_{22} & -t_{12} & -t_{42} & t_{32} & -t_{62} & t_{52} & t_{82} & -t_{72} \\ -t_{21} & t_{11} & t_{41} & -t_{31} & t_{61} & -t_{51} & -t_{81} & t_{71} \\ -t_{24} & t_{14} & t_{44} & -t_{34} & t_{64} & -t_{54} & -t_{84} & t_{74} \\ t_{23} & -t_{13} & -t_{43} & t_{33} & -t_{63} & t_{53} & t_{83} & -t_{73} \\ -t_{26} & t_{16} & t_{46} & -t_{36} & t_{66} & -t_{56} & -t_{86} & t_{76} \\ t_{25} & -t_{15} & -t_{45} & t_{35} & -t_{65} & t_{55} & t_{85} & -t_{75} \\ t_{28} & -t_{18} & -t_{48} & t_{38} & -t_{68} & t_{58} & t_{88} & -t_{78} \\ -t_{27} & t_{17} & t_{47} & -t_{37} & t_{67} & -t_{57} & -t_{87} & t_{77} \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Структура матриканта есть зависимость между элементами прямого и обратного матриканта в форме (7) − (8) и все следствия, вытекающие из него, а также зависимость между элементами T и T^{-1}, следующие из тождества [4]:

$$TT^{-1}=T^{-1}T=E, \tag{11}$$

где E − единичная матрица.

Таким образом, в работе построена система дифференциальных уравнений 1-го порядка, описывающая распространение термоупругих волн в анизотропных средах триклинной сингонии, а знание структуры матрицы коэффициентов в этой системе позволяет определить связь между волнами различной поляризации, в данном случае определить связь упругих и тепловых волн, т.е. наличие термоупругого эффекта. Построена структура матриканта уравнений движения термоупругих волн в объемном случае.

Литература

1. С.К. Тлеукенов Метод матриканта. −Павлодар, НИЦ ПГУ им. С. Торайгырова, 2004. −148 с.
2. Новацкий В. Теория упругости. − М.: Мир, 1986. −556 с.
3. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. −М.: Наука,1988. −552 с.
4. Тлеукенов С. К., Орынбасаров К. А. О матрицах фундаментальных решений уравнений динамики неоднородных анизотропных сред. −Изв. АН Каз. ССР, сер. физ.-мат.,1991, N 5, С. 87-91.