КОМПЬЮТЕРНОЕ ИНТЕРАКТИВНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ И ДЕЙСТВИЙ НАД НИМИ

П.С. Панков, член-корр. НАН КР

Одним из основных направлений современной информатики является наглядное компьютерное представление как реальных, так и виртуальных объектов, возникающих в различных областях человеческой деятельности. Оно дает возможность пользователю в безопасных и комфортных условиях изучить объекты перед непосредственной работой с ними, а также при наличии времени в безопасных условиях реагировать на некоторые возникающие непредвиденные ситуации (если они были предусмотрены составителем). Известно, что для большей эффективности компьютерное представление должно быть интерактивным.

Для контроля знаний по изучаемому объекту обычно применяется метод множественного выбора (с закрытыми ответами) – описываются в текстовом виде или (что более эффективно) графически различные ситуации или ответы на вопрос и пользователю предлагается выбрать из них правильный. Такой метод является универсальным, но, вместе с тем, имеет существенные недостатки.

Для объективного контроля знаний по данному объекту, не требующему знания системы обозначений (если он относится к классу непрерывных), нами развита методика «интеллектуального глазомера» или «измеряющего воображения» [1], [9], [11] (ее элементы применялись ранее в тренажерах).

Нами предлагается

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Если представление данного объекта на компьютере не требует для своего понимания знаний по аналогичным объектам, то такое представление называется **независимым**.

По нашему мнению, такие представления являются более эффективными, поскольку пользователь усваивает их без каких-либо посредников.

Все сказанное относится и к виртуальным математическим объектам. Вместе с тем, они имеют свою специфику и на сегодняшний день, по нашему мнению, возможности современной вычислительной техники для представления математических объектов в научных и учебных целях используются очень незначительно. В отличие от многих других классов объектов, математические объекты имеют адекватное текстовое представление, но его простой перенос на компьютер, даже с некоторыми усовершенствованиями, гиперссылками и.т.д. не дает возможности реализовать все преимущества компьютера.

Целью настоящей статьи является обзор существующих интерактивных представлений математических объектов и предложения для реализации новых представлений.

1. Общие определения

В соответствии с общим принципом экономии времени, цель пользователя компьютера в наиболее общем виде можно сформулировать следующим образом: имеется некоторое изображение (ситуация) на компьютере; требуется за кратчайшее время получить другое изображение.

Если «другое изображение» сводится к сообщению, что задание выполнено (например, даны правильные ответы на все вопросы, касающиеся объекта), то такая цель является тривиальной. Для придания большей естественности поставленной цели предположим, что изображения на дисплее изменяются непрерывно. Таким образом, получаем

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 [5]. **Кинематическим пространством** называется множество G точек и множество K **маршрутов.** Каждый маршрут M, в свою очередь состоит из положительного числа T_M (**время** маршрута) и функции $m_M : [0, T_M] \to G$ (**траектория** маршрута). Выполняются следующие свойства.

(K1) Для любых различных z_0 и z_1 существует такое $M \in K$, что $m_M(0) = z_0$ и $m_M(T_M) = z_1$, и множество значений T_M для таких M ограничено снизу положительным числом {передвижение между любыми точками возможно, но сколь угодно быстрое передвижение невозможно}.

(K2) Если $M = \{T_M, m_M(t)\} \in K$, то $\{T_M, m_M(T_M - t)\}$ также принадлежит K {движение в обратном направлении}.

(K3) Если $M = \{T_M, m_M(t)\} \in K$ и $T^* \in (0, T_M)$, то пара: T^* и функция $m^*(t) = m_M(t) \quad (0 \le t \le T^*)$ также принадлежит K {можно остановиться в любой момент}.

(K4) Если $\{T_1, m_1(t)\} \in K$, $\{T_2, m_2(t)\} \in K$ и $m_1(T_1) = m_2(0)$, то пара: число $T^* = T_1 + T_2$ и функция

$$m^*(t) = \begin{cases} m_1(t) & (0 \le t < T_1) \\ m_2(t - T_1) & (T_1 \le t \le T_1 + T_2) \end{cases}$$

также принадлежит K {транзитивность}.

Кинематическое пространство является линейно связным (без изолированных точек) метрическим топологическим пространством с метрикой

$$d_K(z_0, z_1) = \inf \{T_M \mid M \in K,\ m_M(0) = z_0 \text{ и } m_M(T_M) = z_1\}.$$

Вместе с тем, есть пример [5] линейно связного метрического пространства, не являющегося кинематическим.

Данное определение является основой для представления различных множеств (пространств).

В [5] нами была поставлена общая проблема наглядного компьютерного представления топологических пространств.

Отметим еще, что при изображениях объектов, ранее считавшихся абстрактными, возникает общая проблема: как различить изображения двух различных объектов? Иногда ее решение вытекает из самой сущности объекта, например, графики двух различных функций, но в других случаях требует развития самой математической теории.

2. Примеры построений

В [6] нами было предложено раскрашивание пространства, полученного путем склейки, для его наглядного представления на дисплее. В [8] нами были рассмотрены "раскрашивания" пространства конечным количеством цветов (тремя цветами), дающие возможность распознавания его двумерных проекций (на дисплей). В [17] введены соответствующие определения и доказана распознаваемость эвклидовых пространств. В [18] доказана распознаваемость кинематических пространств при условии вида «неоднomерности в каждой точке».

Таким способом представлены римановы поверхности логарифмической функции, квадратного корня, квадратного корня из двучлена, лист Мебиуса, проективная плоскость, топологический тор [5] и эвклидово четырехмерное пространство [4].

Далее, в [13], [14], [19] построены программы, которые дают возможность пользователю определять риманову поверхность при помощи любого дифференциального или алгебраического уравнения, а потом производить поиск точек ветвления на этой поверхности.

Следующим, одним из наиболее общих математических объектов является оператор (функция, преобразование одного множества в другое).

Для изучения свойств заданного непрерывного оператора предлагаются следующие приемы.

Иногда оператор имеет обратный. Как обобщение интерактивного представления 2×2-матрицы, предложенное Ж.Р.Джаналиевой, для оператора $A\colon X \to Y$ предлагается следующее.

На одном из участков дисплея изображается множество X, на другом – множество Y (или же они обозначаются различными цветами на одном и том же участке, например, функция и производная от нее). Далее, на множестве Y задается некоторый элемент y_0, пользователь задает (произвольно) элемент x множества X, программа вычисляет и изображает $A(x) \in Y$. Пользователь, меняя $x \in X$, приближает $A(x)$ к y_0, решая тем самым уравнение $A(x)= y_0$, или, иными словами, вычисляя значение обратного оператора $A^{-1}(y_0)$.

С помощью такой программы можно также изучать понятие линейности операторов.

Для функциональных рядов (Тейлора, Фурье) можно применить следующее. Задана функция. Пользователь задает значения коэффициентов (3-4 первых), программа вычисляет сумму соответствующих членов и показывает ее график вместе с графиком функции. Меняя значения коэффициентов, пользователь пытается приблизить график суммы к графику функции.

3. Примеры использования математических объектов

В наиболее общем виде – любой объект перед его изображением на компьютере должен быть сначала записан в математической форме. Далее, если объект представлен в виде конечного набора целых (не очень больших) чисел, то он представляется на компьютере адекватно. В других случаях производится дискретизация. Наиболее разработано представление двумерных поверхностей треугольными сплайнами.

Далее, при компьютерной реализации соответствующие построения могут производиться с точностью до одного пиксела – еще одна дискретизация.

Нами предложено независимое компьютерное представление естественных языков [19].

Определение 3. Пусть дано какое-либо "Понятие" ("Слово" из языка). Если алгоритм, действуя на компьютере: демонстрирует человеку достаточно большое количество ситуаций; в каждой ситуации дает команду с этим "Словом"; принимает действия человека и наглядно демонстрирует их результаты; определяет, соответствуют ли эти эти результаты данной команде, то такой алгоритм будем называть компьютерным интерактивным представлением "Понятия".

В рамках реализации этого определения используется многослойное двумерное пространство (многослойная горизонтальная или вертикальная плоскость), см. например [20].

Известно много способов визуализации трехмерного пространства.

Э.Касымов под нашим руководством реализовал следующее. Вместе с изображением предмета изображается его проекция на горизонтальную плоскость («тень» при условии, что «источник света» находится высоко сверху). Таким путем он составил независимые представления некоторых «существенно трехмерных» глаголов: «надеть», «снять», в дополнение к уже реализованным ранее «сдвинуть», «положить», «закрыть», «открыть» и т.д.

Таким образом, независимые компьютерные представления различных объектов могут использоваться в различных целях, в том числе при изучении языков.

Литература

1. Pankov P.S. Independent learning for open society // Collection of papers as results of seminars conducted within the frames of the program «High Education Support». Bishkek: Foundation «Soros-Kyrgyzstan», 1996. - Issue 3, pp. 27-38.

2. Pankov P.S., Bayachorova B.J. Using computers to perform non-Euclidean topological spaces. The 6-th conference and exhibition on computer graphics and visualization "Graphicon-96", 1996. Saint-Petersburg, Russia. - Vol.2. – P. 232.

3. Борубаев А.А., Панков П.С. Классификация компьютерных представлений топологических пространств // Вестник КГПУ. Серия: Математика. Физика. Информатика. 1998, № 1. - С. 99-103.

4. Pankov P. S., Bayachorova B. J., Terehin A. V. Computer Presentation of Four-Dimensional Spaces // The 8-th International Conference on Computer Graphics and Visualization "GraphiCon-98". Moscow, Russia. - P. 204.

5. Борубаев А.А., Панков П.С. Компьютерное представление кинематических топологических пространств. - Бишкек: КГНУ, 1999. – 131 с.

6. Борубаев А.А., Панков П.С. Кинематическое изображение топологических пространств, представляемых в виде склейки // Вычислительные технологии (изд. СО РАН). – 1999, том 4, № 5. – С. 3-9.

7. Борубаев А.А., Панков П.С. Итоги и перспективы развития топологических исследований в Кыргызстане // Вестник КГНУ: серия 3. Естественно-технические науки. – Выпуск 4. Математические науки. Информатика и информационные технологии, 2000 / Проблемы математики и информатики в XXI веке: Труды международной научной конференции. – С. 11-14.

8. Borubaev A.A., Pankov P.S., Chekeev A.A. Spaces Uniformed by Coverings. – Hungarian-Kyrgyz Friendship Society, Budapest, 2003. – 169 p.

9. Панков П.С., Табылды кызы Ж. Измеряющее воображение для представления математических объектов // Ученые записки Ульяновского гос. университета. Сер. Образование. Вып. 2(6). – 2001. – С. 110-123.

10. Панков П.С., Барыктабасов К.К. Инварианты при бесконечномерных геометрических преобразованиях и их компьютерная реализация // Вестник КГПУ им. И.Арабаева. Серия 3, выпуск 2: Педагогика. Психология, 2004. – С. 56-60.

11. Панков П.С., Табылды кызы Ж., Краснобородкина Т.В. Инварианты как основа интерактивного компьютерного представления математических объектов // Асимптотические, топологические и компьютерные методы в математике: Труды Международной научной конференции. – Бишкек: КГНУ, 2001 / Вестник КГНУ: Сер. 3. Естественно-технические науки. – Вып. 6. Математические науки. Информатика и информационные технологии. - С. 37-40.

12. Панков П.С., Асанов Д.Т. Интерактивное компьютерное представление математических объектов и кинематические преобразования // Природа университетского образования и исследования: Сборник материалов межвузовской конференции. - Бишкек: АУЦА, 2004. – С. 55-61.

13. Панков П.С., Жораев А.Х. Наглядное кинематическое представление римановой поверхности, определяемой алгебраическим уравнением // Вестник КНУ им. Ж.Баласагына. Серия 6. Наука и инновационные образовательные технологии в вузе. Труды ИИМОП. – Вып. 5. - Бишкек: КНУ, 2006. - С. 422-426.

14. Жораев А.Х., Ельгин А.А. Наглядное кинематическое представление Римановой поверхности, определяемой "сдвиговой" функцией // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям, вып. 34. – Бишкек: Илим, 2006. – С. 179-183.

15. Панков П.С., Долматова П.С. Построение дифференциальных уравнений для гибкого управления объектами с помощью компьютерной мыши // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям, вып. 37. – Бишкек: Илим, 2007. – С. 18-23.

16. Борубаев А.А., Панков П.С. Распознаваемость размеченных топологических пространств // Вестник КНУ, 2007. – Серия 3, выпуск 4. – С. 5–8.

17. Борубаев А.А., Панков П.С. Распознаваемость размеченных кинематических пространств // Вестник МУК, № 1(16), 2008. – С. 205-207.

18. Pankov P.S., Joraev A.H. Manned search in kinematical topological spaces // Reports of the Third Congress of the World Mathematical Society of Turkic countries, Vol. 1. – Almaty: Al-Farabi Kazakh National University, 2009. – Pp. 102-105.
19. Pankov P.S., Aidaraliyeva J. Sh., Lopatkin V.S. Active English on computer // Conference «Improving Content and Approach in the Teaching of English Language in the Context of Educational Reform», Bishkek: Kyrgyz State Pedagogical University, 1996. – Pp. 25-27.
20. Pankov P., Dolmatova P. Software for Complex Examination on Natural Languages // Human Language Technologies as a Challenge for Computer Science and Linguistics: Proceedings of 4th Language and Technology Conference, 2009, Poznan, Poland. – P. 502-506.