

К ПРОБЛЕМЕ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ МЕХАНИКИ

Т.М.БОЗГУНЧИЕВ
E.mail. ksucta@elcat.kg

Макалада жыш чойролордун механикасынын тендемелерин колдонуу мене жаратылыш кырсыктарын моделдештируу каралган.

В статье рассмотрено моделирование природных катастроф с использованием уравнений механики сплошных сред.

The paper considers the modeling of natural disasters using the equations of continuum mechanics.

В последние годы на территории горных районов Кыргызстана наиболее часто происходят такие опасные экзогенно-геологические процессы, как оползни, сели, обвалы, снежные лавины и другие, нанося огромный ущерб народному хозяйству и населению региона.

В результате проблема разработки эффективных методов снижения опасностей этих явлений природы, особенно селевых и оползневых процессов, является одной из главных задач научных и инженерно-геологических исследований. Решения этих задач возможны лишь после того, как будут осмыслены и достаточно точно описаны количественные и качественные механизмы их возникновения и развития.

На основе фундаментальных принципов механики сплошных сред могут быть раскрыты причины возникновения селевых и оползневых процессов и закономерности их формирования и развития. Таким образом, частые возникновения селевых и оползневых процессов на территории горных районов южных областей республики наталкивают на мысль о необходимости изучения причин формирования и зарождения этих явлений природы, а также определения основных физико-механических параметров.

При этом в качестве инструмента исследования данного процесса выдвигаются методы моделирования. Как известно, под методами моделирования понимаются процесс построения, изучения и применения различных моделей. Процесс моделирования взаимосвязан с такими категориями, как абстракция, аналогия, гипотеза и другие, и обязательно включает в себя и построение абстракций и умозаключений по аналогии, и конструирование научных гипотез, и т.д. Из теории моделирования известно, что познавательные возможности любой модели обуславливаются тем фактом, что модель отражает какие-либо существенные черты исследуемого объекта или процесса. Существуют в основном три формы методов моделирования:

1) математическое моделирование. Оно в настоящее время применяется практически во всех отраслях современной науки;

2) натурное моделирование, которое предусматривает проведение различных экспериментов в природных условиях;

3) лабораторно-экспериментальное моделирование. Оно позволяет производить изучение механизма развития и зарождения оползневых процессов и селевых потоков.

Необходимость использования метода математического моделирования определяется тем фактом, что многие процессы, явления, объекты непосредственно исследовать невозможно или же эти исследования требуют больших временных и материальных затрат.

Изучение селевых и оползневых процессов математическими методами в последние годы находит все более широкое применение при решении прогнозных задач и разработки защитных мероприятий. Математический аппарат предоставляет возможность

решать проблему долговременного регионального прогноза, а также локальные прогнозные задачи, в которых селевые и оползневые процессы рассматриваются как многофакторные динамические системы.

Рассмотрим модель механики сплошной среды в виде жидкости и твердой частицы, обладающей свойствами непрерывности в смысле распределения массы и легкой подвижности. На основе этих свойств установим основные уравнения динамики жидкости, а также физические области их применения при различных допущениях и упрощениях.

Приведем основные уравнения движения динамики вязкой жидкости:

а) Уравнение состояния, связывающее давление P , плотность ρ , температуру T рассматриваемой жидкости, которое в общем виде запишется:

$$P = F(\rho, T), \quad (1)$$

где T – абсолютная температура в данной точке.

б) Уравнение неразрывности в трехмерных декартовых координатах имеет вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0. \quad (2)$$

Если рассматриваемый процесс происходит на плоскости или в осесимметричном пространстве, тогда уравнение неразрывности, или иногда его называют уравнением сохранения массы, имеет вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \delta \frac{\partial(\rho w)}{\partial y} = 0, \quad (3)$$

где $\delta = 0$ – для двумерного случая и для осесимметричного случая $\delta = 1$.

Для одномерного движения уравнение неразрывности будет иметь следующую форму:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U)}{\partial x} = 0 \quad (4)$$

в) Уравнения движения вязкой жидкости.

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{Du}{Dt} &= F_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \operatorname{div} W \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right], \\ \rho \frac{Dv}{Dt} &= F_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(2 \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \operatorname{div} W \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right], \\ \rho \frac{Dw}{Dt} &= F_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(2 \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3} \operatorname{div} W \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Если жидкость несжимаемая, тогда

$$\operatorname{div} \vec{W} = 0,$$

и уравнение (5) примет вид:

$$\left. \begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= F_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \\ \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) &= F_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right), \\ \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= F_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right), \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Таким образом, уравнение неразрывности и уравнение движения для несжимаемой жидкости имеет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= F_x - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right); \\ \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) &= F_y - \frac{\partial P}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right); \\ \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= F_z - \frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right). \end{aligned}$$

Итак, если массовые силы рассматривать как заданные, тогда остаются четыре неизвестные величины U, V, W, P , и для их определения имеем четыре уравнения. Однако необходимо отметить, что до настоящего времени вследствие больших математических трудностей не получено ни одного общего решения уравнений Навье-Стокса в их полном виде, т.е. с сохранением всех конвективных членов и всех членов, учитывающих вязкость. Но, вместе с тем, имеются некоторые частные решения, например, для ламинарного течения в трубе или для течения в пограничном слое, и эти частные решения столь хорошо совпадают с экспериментальными результатами, что вряд ли можно сомневаться в общей применимости уравнений Навье-Стокса.

Следует отметить, что уравнения Навье – Стокса отличаются от уравнений Эйлера для движения жидкости без трения членом $\mu \Delta W$, учитывающим вязкость.

Используется криволинейная ортогональная система координат (X, Y, Z) , где ось X направлена вдоль вогнутой поверхности в направлении течения, ось Y – по нормали к поверхности, а ось Z – перпендикулярно плоскости (X, Y) . В выбранной системе координат уравнения Навье-Стокса могут быть записаны в безразмерной форме в следующем виде:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{1-Ky} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{Kv}{1-Ky} = 0 \\
& \frac{u}{1-Ky} \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{Kuv}{1-Ky} + \frac{1}{1-Ky} \frac{\partial P}{\partial x} = \\
& = \varepsilon^2 \left[\frac{1}{(1-Ky)^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{K}{1-Ky} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{2K}{(1-Ky)^2} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{K^2 u}{(1-Ky)^2} \right] \\
& \frac{u}{1-Ky} \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{Ku^2}{1-Ky} + \frac{\partial P}{\partial y} = \\
& = \varepsilon \\
& \frac{u}{1-Ky} \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial P}{\partial z} = \\
& = \varepsilon^2 \left[\frac{1}{(1-Ky)^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \frac{K}{1-Ky} \frac{\partial w}{\partial y} \right]
\end{aligned}$$

Здесь координаты X, Y, Z отнесены к L , компоненты скорости U, V, W (вдоль осей координат X, Y, Z соответственно) – к U_∞ , давление P отнесено к ρU_∞^2 (где ρ – плотность жидкости).

Отметим, что в дальнейшем используются только безразмерные переменные (независимые и искомые).

Предполагается, что кривизна вогнутой поверхности:

$$K = L/R = \alpha K < 1, \quad K \sim O(1), \quad \varepsilon < \alpha < 1,$$

т.е. рассматриваются такие течения, когда число Гертлера велико:

$$G_e = 2 Re^{1/2} L/R \sim O(\alpha/\varepsilon) > 1.$$

Пусть « a », « b » и « c » – характерные толщина, протяженность и ширина пространственной возмущенной вихревой области течения. Очевидно, эти величины должны быть больше характерной длины свободного пробега молекул жидкости $O(\varepsilon^2)$, иначе для исследования течения в областях с характерными размерами:

$$\Delta x \sim O(b), \quad \Delta y \sim O(a), \quad \Delta z \sim O(c)$$

уже нельзя будет использовать уравнения сплошной среды, поэтому также очевидно справедливо следующее соотношение:

$$\varepsilon^2 < a < c < b < 1.$$

Таким образом, схема исследуемого течения характеризует вязкий несжимаемый поток, где для его расчета будет использован метод сращиваемых разложений.

Список литературы

1. Peerhossaini H. On the subject of Gortler vortices. Lecture notes in Physics, 1984, ed. S. Zaleski, pp. 376 – 384.
2. Бийбосунув А.И. Гидродинамическая неустойчивость течения в поле центробежных сил // Проблемы механики и технологий: Материалы международной конференции. – Бишкек, 1994.
3. Изучение режима оползневых процессов / Под ред. А.И.Шеко. – М.: Недра, 1982. – 412 с.
4. Варнес Д. Движение склонов, типы и процессы // Оползни, исследования и укрепления. – М.: Мир, 1981. – С. 32-85.