УДК 532.546

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ОБТЕКАНИЯ ПОВЕРХНОСТИ ПОТОКОМ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Т.М.БОЗГУНЧИЕВ

E.mail. ksucta@elcat.kg

Бузулуу ыкмасын Навье-Стоксун тендемелерине карата пайдалануу менен коо жердин устуно суюктуктук агышынын четки милдети алынган.

С использованием метода разложений к уравнениям Навье-Стокса получена краевая задача обтекания жидкостью вогнутой поверхности.

Using the method of expansions to the Navier-Stokes boundary-value problem obtained by fluid flow over a concave surface

В научной литературе для анализа течения вблизи вогнутой поверхности удобно применять метод сращиваемых асимптотических разложений. Идеи, лежащие в основе метода, развивались в течение многих лет. Как указано в монографии Ван-Дайка, он был систематически развит и приложен к течениям вязкой жидкости в работах Каплуна, который ввел формальные внутренний и внешний переходы для теории пограничного слоя и соответствующие внутренние и внешние разложения, а также в работах Лагерстрома и Коула. После этого периода развития метод сращиваемых асимптотических разложений был приложен к множеству проблем механики жидкости и газа. Большая часть ранних приложений относилась к вязким течениям. Например, Жермен и Гиро, а также Чоу и Тинг вычислили влияние кривизны на структуру ударной волны. Меррей определил влияние внешней завихренности на пограничный слой вблизи передней кромки плоской пластины и на большом удалении от нее. Независимо от них Праудмен и Пирсон использовали метод для изучения обтекания сферы и кругового цилиндра при малых числах Рейнольдса. Гольдштейн и Имам дали первое правильное развитие решения Блазиуса для пограничного слоя на полубесконечной плоской пластине. Тинг решил задачу о вязком сдвиговом слое между двумя потоками, движущимися с разной скоростью.

Такой способ может применяться также и к невязким течениям. Миссате рассмотрел трансзвуковое обтекание тонких тел. Булах использовал его для исправления линеаризованных сверхзвуковых конических течений и их приближений высшего порядка в окрестности головной ударной волны. Подобным же образом Френкель и Уотсон попытались решить задачу о «псевдотрансзвуковом» обтекании треугольного крыла, которая возникает в том случае, когда головная волна близко прилегает к передней кромке. Якура исследовал энтропийный слой, образованный малым затуплением тела в гиперзвуковом потоке.

Методу сращиваемых асимптотических разложений свойственна потеря граничных условий. Нельзя ожидать, что внешнее разложение будет удовлетворять условиям, которые наложены во внутренней области, и обратно, внутреннее разложение в общем случае не будет удовлетворять условиям в удаленной области. Но потеря условий восполняется сращиванием.

Сращивание представляет собой основную черту метода. Возможность сращивания основана на существовании области перекрытия, в которой пригодны как внутреннее, так и внешнее разложения. Используя это перекрытие, можно получить точное соотношение между конечными частными суммами. Реализация этой возможности осуществима только для возмущения параметра, которое неоднородно в координатах, или для возмущения координаты, которое неоднородно по другим координатам. Нельзя срастить два различных параметрических разложения, таких, как разложение для больших и малых значений числа Рейнольдса или числа Маха: невозможно срастить два различных координатных разложения, таких, как разложение для малых и больших значений времени или расстояния. Такие ряды могут перекрываться в том смысле, что они имеют общую область сходимости, но процесс аналитического продолжения дает только приближенное соотношение для некоторого конечного числа членов.

Существование области перекрытия означает, что внутреннее разложение внешнего разложения должно с точностью до соответствующего порядка согласовываться с внешним разложением внутреннего разложения. Этот принцип распространяется на приближения высшего порядка при сохранении дальнейших членов в асимптотических разложениях. Можно допустить, что число членов может быть различно во внутреннем и внешнем разложениях, поскольку нормальный порядок сращивания требует разницы на единицу при четных шагах. Таким образом, получим, что m-членное внутреннее разложение n-членного внешнего разложения равно n-членному внешнему разложению m-членного внутреннего разложения. Здесь m и n – два целых числа; практически m обычно выбирается равным n или n + 1.

При асимптотическом анализе будем использовать ставшие уже традиционными при построении асимптотических теорий обозначения для различных областей возмущенного течения: область I – возмущенная часть внешнего невязкого течения, ее характерная толщина:

$\Delta y_1 > \delta \sim O(\varepsilon)$.

Область II – основная часть пограничного слоя с характерной толщиной:

$\Delta y_2 \sim \delta$.

Вязкая пристеночная область III с характерной толщиной:

$\Delta y_3 < \delta$.

При построении асимптотической теории вихрей Гертлера в пограничном слое жидкости будем предполагать, что потеря устойчивости основного плоского течения вблизи вогнутой поверхности вызывает нелинейные возмущения функций течения в области их локализации, например:

$\Delta u \sim u$.

Следовательно, возмущения от вихрей уже в первом приближении влияют на характеристики основного плоского течения вблизи вогнутой поверхности. В поле центробежных сил тогда возникают возмущения давления:

$\Delta P \sim ku^2 \Delta y$,

которые индуцируют поперечные составляющие скорости:

$w \sim \Delta w \sim \Delta P^{1/2} \sim k^{1/2} u \Delta y^{1/2}$.

Так как оценки для P и w получаются из сопоставления порядков величин конвективных членов то, очевидно, механизмы конвекции являются основными в процессе порождения вторичного вихревого течения.

Пусть возмущения зарождаются в области с характерной толщиной в виде:

$\Delta y \sim O(a) < \delta \sim O(\varepsilon)$,

то есть толщиной меньшей, чем толщина пограничного слоя, расположенного непосредственно около вогнутой поверхности, где завихренность основного плоского течения вблизи вогнутой поверхности является наибольшей, а функции течения изменяются пропорционально расстоянию от поверхности, например:

$u \sim \Delta y / \varepsilon$.

Тогда справедливы следующие оценки для функций течения:

$u \sim O(a/\varepsilon)$;

$\Delta P \sim O(\aleph\, a^3/\varepsilon^2)$;

(1)

$w \sim O(\aleph^{1/2} a^{3/2}/\varepsilon)$.

Принимая, что в общем случае толщина возмущенной области «a» соизмерима с ее шириной - $\Delta z \sim O(c) \sim O(a)$, и приравнивая порядки величин членов уравнения неразрывности, можно получить, что:

$a \sim c \sim O(\aleph b^2),$

(2)

где «a», «b» и «c» – характерные толщина, протяженность и ширина пространственной возмущенной вихревой области течения, и:

$\varepsilon^2 < a < c < b < 1.$

Соотношения (1) и (2) позволяют оценить порядки величин конвективных и основных диссипативных членов уравнений движения:

$$u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \sim O(\aleph^2 b^3/\varepsilon), \ \varepsilon^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \sim O(\varepsilon/\aleph b^2)$$

(3)

Из оценок (1-3) видно, что в наименее вырожденном случае, когда механизмы конвекции и диссипации равнозначны и:

$$u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \sim \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

протяженность возмущенной области «b» по порядку величины равна:

$b \sim O(\varepsilon^{3/5}/\aleph^{3/5}) < 1.$

(4)

Оценки (1), (2) и (3) позволяют для возмущенной вихревой области течения III с характерными размерами:

$\Delta x \sim O(b) \sim O(\varepsilon/\aleph)^{3/5},$

$\Delta y \sim \Delta z \sim O(a) \sim O(c) \sim O(\varepsilon^{6/5}/\aleph^{1/5}),$

расположенной непосредственно около вогнутой поверхности, ввести следующие переменные и асимптотические разложения функций течения:

$x = (\varepsilon^{3/5}/\aleph^{3/5})\, X_3,$

$y = (\varepsilon^{6/5}/\aleph^{1/5})\, Y_3,$

$z = (\varepsilon^{6/5}/\aleph^{1/5})\, Z_3,$

$u = (\varepsilon^{1/5}/\aleph^{1/5})u_3 + \ldots,$

(5)

$v = \aleph^{1/5}\varepsilon^{4/5} v_3 + \ldots,$

$w = \aleph^{1/5}\varepsilon^{4/5} w_3 + \ldots,$

$\Delta P = \aleph^{2/5}\varepsilon^{8/5} P_3 + \ldots,$

где возмущение давления P отсчитывается от значения на вогнутой поверхности в точке зарождения неустойчивости основного плоского течения вблизи вогнутой поверхности.

Теперь можно получить в первом приближении для области III параболизированные в продольном направлении уравнения Навье-Стокса без продольного градиента давления:

$$\frac{\partial U_3}{\partial X_3} + \frac{\partial \vartheta_3}{\partial Y_3} + \frac{\partial w_3}{\partial Z_3} = O$$

$$U_3 \frac{\partial U_3}{\partial X_3} + \vartheta_3 \frac{\partial U_3}{\partial Y_3} + w_3 \frac{\partial U_3}{\partial Z_3} = \frac{\partial^2 U_3}{\partial Y^2{}_3} + \frac{\partial^2 U_3}{\partial Z^2{}_3};$$

(6)

$$U_3 \frac{\partial \vartheta_3}{\partial X_3} + \vartheta_3 \frac{\partial \vartheta_3}{\partial Y_3} + w \frac{\partial \vartheta_3}{\partial Z_3} + \mathrm{K}U^2{}_3 + \frac{\partial \rho_3}{\partial Y_3} = \frac{\partial^2 \vartheta_3}{\partial Y^2{}_3} + \frac{\partial^2 \vartheta_3}{\partial Z^2{}_3};$$

$$U_3\frac{\partial w_3}{\partial X_3}+\vartheta_3\frac{\partial w_3}{\partial Y_3}+w_3\frac{\partial w_3}{\partial Z_3}+\frac{\partial \rho_3}{\partial Z_3}=\frac{\partial^2 w_3}{\partial {Y^2}_3}+\frac{\partial^2 w_3}{\partial {Z^2}_3}.$$

На вогнутой поверхности должны выполняться обычные условия прилипания и непротекания:

$$U_3=\vartheta_3=w_3=\mathrm{O},Y_3=\mathrm{O}$$

(7)

Внешние и начальные краевые условия получаются из сращивания с решением для пристеночной части основного плоского течения вблизи вогнутой поверхности (с нижней сдвиговой частью пограничного слоя около вогнутой поверхности):

$$U_3\rightarrow AY_3,\ \rho_3\rightarrow -\mathrm{K}A^2{Y^3}_3$$

(8)

$$\vartheta_3,\mathrm{w}_3\rightarrow \mathrm{O},\mathrm{X}_3,\mathrm{Y}_3\rightarrow\infty$$

где «А» – напряжение трения в продольном направлении на вогнутой поверхности в точке зарождения неустойчивости основного плоского течения вблизи вогнутой поверхности.

Предполагается исследовать периодические по поперечной координате «Z»-решения, поэтому:

$$\mathrm{f}\left(\mathrm{X}_3,\mathrm{Y}_3,\mathrm{Z}_3\right)=\mathrm{f}\left(\mathrm{X}_3,\mathrm{Y}_3,\mathrm{Z}_3+\lambda\right)$$

(9)

$$f=U_3,\vartheta_3,w_3,\rho_3$$

где λ – длина волны вытянутых в продольном направлении стационарных вихрей Гертлера.

Краевая задача (6) – (9) описывает нелинейное развитие вихрей Гертлера с длиной волны меньшей толщины пограничного слоя около вогнутой поверхности.

Список литературы

1. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике. – М.: Мир, 1967.
2. El – Hady N.M., Verma A.K. Instability of compressibly layers along curved walls with suction or cooling. AIAA paper, 1982, №82.
3. Peerhossaini H. On the subject of Gortler vortices. Lecture notes in Phisics, 1984, ed. S. Zaleski, pp. 376 – 384.