

УДК.: 621. 014.2, УДК.: 539. 371.

## АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПРУЖИН КРУЧЕНИЯ ИЗ МАТЕРИАЛА С ПАМЯТЬЮ ФОРМЫ

АБДРАХМАНОВ С.А. А., КОЖОШОВ Т.Т.,  
ОСМОНКАНОВ А.М., ДОТАЛИЕВА Ж.Ж.

КГТУ им. И Раззакова

Тел. 0312545171, 0312545150

[abdrahmanov7@rambler.ru](mailto:abdrahmanov7@rambler.ru), [talant71965@mail.ru](mailto:talant71965@mail.ru)

*В данной работе производится расчет цилиндрических пружин кручения, изготовленных из материала, обладающего эффектом памяти формы, в нелинейной постановке. Приводится анализ напряженно-деформированного состояния и определяется предельный крутящий момент, после которой в образце появляются неупругие деформации.*

С появлением материалов, обладающих эффектом памяти формы, оказалось, что пружины, изготовленные на их основе, могут использоваться при работе за пределом упругости [1,2,7,8]. Причем для проявления эффектов памяти формы, генерации реактивных усилий и других нетрадиционных свойств таких материалов наличие неупругих деформаций является обязательным условием. Обзор технических решений и применения материалов с памятью формы приведен в работе [3].

В данной работе теоретически исследуются рабочие характеристики цилиндрических пружин кручения, изготовленных из материала, обладающего эффектом памяти формы, при её деформировании в упругой области и при этом задача решается в нелинейной постановке. Проводится анализ напряженно-деформированного состояния и определяется предельная нагрузка, после которой в пружине появляются неупругие деформации. Определение рабочих характеристик включает установление соотношений между изменениями диаметра, угла подъема, а также перемещений конца пружины (угловых и линейных) в зависимости от крутящего момента  $m$ .

Рассмотрим цилиндрическую винтовую пружину, изготовленную из проволоки диаметром  $d$ , обладающей эффектом памяти формы. Пусть она воспринимает продольно-растягивающую нагрузку  $P$  и крутящий момент  $m$ . Известно, что геометрия цилиндрической винтовой пружины определяется тремя основными независимыми параметрами:  $D$  – диаметр пружины,  $\alpha$  – угол подъема оси винтового бруса,  $l$  – длина оси рабочей части винтового бруса.

Рассмотрим геометрическую сторону данной задачи. Выразим необходимые геометрические характеристики пружины через основные независимые параметры. Известно [4,5], что они определяются следующими зависимостями:  
шаг оси винтового бруса

$$h = \pi D \operatorname{tg} \alpha, \quad (1)$$

число рабочих витков

$$i = \frac{l \cos \alpha}{\pi D}. \quad (2)$$

Длина рабочей части пружины, т.е. её высота

$$H = hi, \text{ или } H = l \sin \alpha. \quad (3)$$

Введем полярный угол  $\varphi$ , отсчитываемый от некоторой оси, перпендикулярной оси винтового бруса. Тогда его максимальное значение будет

$$\varphi_i = \psi = 2\pi i,$$

или с учетом формулы (2)

$$\psi = \frac{2l}{D} \cos \alpha. \quad (4)$$

Кривизна винтовой линии определяется формулой

$$\chi = \frac{2 \cos \alpha}{D}, \quad (5)$$

кручение винтовой линии:

$$\omega = \frac{\sin 2\alpha}{D}. \quad (6)$$

Из этих формул видно, что при растяжении и кручении пружины её высота  $H$  и угол подъема  $\alpha$  изменяются, а торцы пружины получают взаимные угловые и линейные перемещения. Рассмотрим внутренние усилия в пружине, нагруженной растягивающей осевой силой  $P$  и крутящим моментом  $m$  (рис. 1 а.).

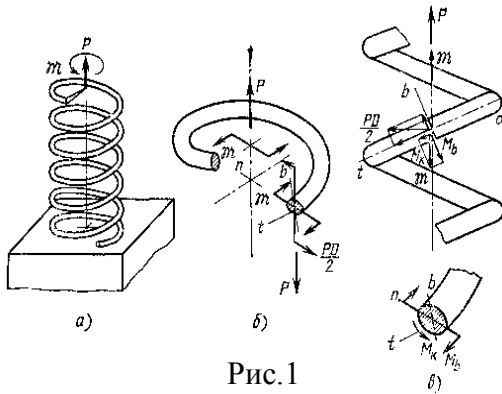


Рис.1

Из равновесия пружины, отсеченной плоскостью, нормальной к винтовой линии, имеем, что момент внутренних сил в осевой плоскости будет  $PD/2$ , а момент в плоскости перпендикулярной к оси равен  $m$  (рис. 1б). Из рисунка (рис. 1в) видно, что крутящий и изгибающий моменты в поперечном сечении витка будут равны:

$$M_{кр} = \frac{PD}{2} \cos \alpha + m \sin \alpha, \quad (7)$$

$$M_{из} = m \cos \alpha - \frac{PD}{2} \sin \alpha. \quad (8)$$

Рассмотрим перемещение конца пружины. Очевидно, что осадка пружины  $\lambda$  равна изменению высоты  $\Delta H$ , а угол поворота  $\theta$  одного торца относительно другого равен изменению центрального угла  $\Delta \psi$ .

Изменение кручения и кривизны витка пружины в упругой стадии её работы определяется законом Гука, т. е.

$$\Delta \omega = \frac{M_{кр}}{C}, \quad \Delta \chi = \frac{M_{из}}{B}, \quad (9)$$

где  $C = GJ_{кр}$ ,  $B = EJ_{из}$  – жесткости проволоки на кручение и изгиб,  $J_{кр} = J_{\rho}$  – полярный момент инерции,  $J_{из} = J_{\bar{b}}$  – осевой момент инерции сечения относительно бинормали  $\bar{b}$ .

Рассмотрим нелинейный случай. Уравнения равновесия составляются для деформированного состояния пружины.

Перемещения определяются на основании (3) и (4) следующими формулами:

$$\lambda = H - H_0 = l(\sin \alpha - \sin \alpha_0), \quad (10)$$

$$\theta = \psi - \psi_0 = 2l \left( \frac{\cos \alpha}{D} - \frac{\cos \alpha_0}{D_0} \right). \quad (11)$$

На основании формул (5) и (6) изменения кривизны и кручения равны

$$\Delta \chi = \chi - \chi_0 = \frac{2 \cos^2 \alpha}{D} - \frac{2 \cos^2 \alpha_0}{D_0}, \quad (12)$$

$$\Delta \omega = \omega - \omega_0 = \frac{\sin 2\alpha}{D} - \frac{\sin 2\alpha_0}{D_0}. \quad (13)$$

Учитывая формулу (9) и подставляя значения  $M_{из}$  и  $M_{кр}$ , по формулам (7) и (8) имеем:

$$\left. \begin{aligned} 2B \left( \frac{\cos^2 \alpha}{D} - \frac{\cos^2 \alpha_0}{D_0} \right) &= -\frac{PD}{2} \sin \alpha + m \cos \alpha \\ C \left( \frac{\sin 2\alpha}{D} - \frac{\sin 2\alpha_0}{D_0} \right) &= \frac{PD}{2} \cos \alpha + m \sin \alpha \end{aligned} \right\}. \quad (14)$$

Решая последнее уравнение относительно  $\alpha$  и  $D$  и подставляя их значения в формулы (10) и (11), находятся угловые и линейные перемещения пружины в общем случае [4,5,6].

Рассмотрим пружину кручения, на торце которого приложен только крутящий момент (случай когда  $P = 0$ ). В этом случае имеем:

$$\left\{ 2B \left( \frac{\cos^2 \alpha}{D} - \frac{\cos^2 \alpha_0}{D_0} \right) = m \cdot \cos \alpha \right. \quad (15)$$

$$\left. C \left( \frac{\sin 2\alpha}{D} - \frac{\sin 2\alpha_0}{D_0} \right) = m \cdot \sin \alpha. \right\} \quad (16)$$

Из (15) и (16), исключив  $m$ , найдем связь между  $\alpha$  и  $D$

$$D = D_0 \frac{(B-C) \sin 2\alpha}{(2B \tan \alpha \cos^2 \alpha_0 - C \sin 2\alpha_0)}. \quad (17)$$

Подставляя (17) в (15), получаем следующую связь  $m(\alpha)$

$$m = \frac{2C}{D_0 \cdot \cos \alpha} \frac{\left( \cos^2 \alpha_0 - \frac{\sin 2\alpha_0}{\sin 2\alpha} \cdot \cos^2 \alpha \right)}{\left( 1 - \frac{C}{B} \right)}. \quad (18)$$

Учитывая формулу (3), можно получить зависимость  $m$  от  $\lambda$ . Для этого подставим выражение

$$\sin \alpha = \frac{\lambda}{l} + \sin \alpha_0.$$

Тогда:

$$\sin^2 \alpha = \left( \frac{\lambda}{l} + \sin \alpha_0 \right)^2 = \left( \frac{\lambda}{l} \right)^2 + 2 \frac{\lambda}{l} \sin \alpha_0 + \sin^2 \alpha_0,$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \left( \frac{\lambda}{l} \right)^2 - 2 \frac{\lambda}{l} \sin \alpha_0 - \sin^2 \alpha_0.$$

Обозначим  $\frac{\lambda}{l} = \xi$ . Величину  $\xi$  можно трактовать как безразмерное перемещение конца

пружины при её кручении. Тогда  $\cos \alpha = \sqrt{A}$ , где  $A = 1 - \xi^2 - 2\xi \sin \alpha_0 - \sin^2 \alpha_0$ .

При этом

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 2(\xi + \sin \alpha_0) \cdot \sqrt{A}.$$

Подставляя в (18)  $\cos \alpha$  и  $\sin 2\alpha$ , окончательно получаем

$$m = \frac{BC}{D_0(B-C)} \cdot \frac{2\cos^2\alpha_0(\xi + \sin\alpha_0) - \sin 2\alpha_0 \cdot \sqrt{A}}{(\xi + \sin\alpha_0) \cdot \sqrt{A}}. \quad (19)$$

Переходим к нахождению изгибающего момента, соответствующего началу фазовой деформации.

Если учитывать только один силовой фактор, действующий в поперечном сечении прутка – изгибающий момент, то максимальное нормальное напряжение определяется по следующей формуле:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{из}}{W_{из}},$$

где  $W_{из}$  – момент сопротивления изгибу. Для прутка диаметром  $d$

$$W_{из} = \frac{\pi d^3}{32}. \quad (20)$$

Пусть при некоторой нагрузке  $m$  максимальные нормальные напряжения в поперечном сечении прутка достигнут величины предела фазовой текучести материала  $\sigma_{фТ}$ , значение изгибающего момента, соответствующее этому случаю, обозначим  $M_{фТ}$ .

Определим значение параметра  $\alpha = \alpha_{фТ}$ , при котором заканчивается чисто упругая работа пружины. Для этого приравняем величину изгибающего момента  $M_{из} = M_{фТ}$ . С учетом (8) (при  $P=0$ ), (9) и (12) получим:

$$\frac{2C}{D_0} \left( \frac{\cos^2\alpha_0 - \frac{\sin 2\alpha_0}{\sin 2\alpha} \cdot \cos^2\alpha}{1 - \frac{C}{B}} \right) = \sigma_{фТ} W_{из}, \quad (21)$$

или

$$m_{фТ} \cdot \frac{\cos\alpha}{W_{из}} - \sigma_{фТ} = 0.$$

Корень уравнения (21)  $\alpha = \alpha_{фТ}$  определяет граничное значение угла подъема пружины, после которого начинают появляться неупругие деформации.

Таким образом, окончательно получили:

$$m_{фТ} = \frac{2C}{D_0 \cdot \cos\alpha_{фТ}} \left( \frac{\cos^2\alpha_0 - \frac{\sin 2\alpha_0}{\sin 2\alpha_{фТ}} \cdot \cos^2\alpha_{фТ}}{1 - \frac{C}{B}} \right). \quad (22)$$

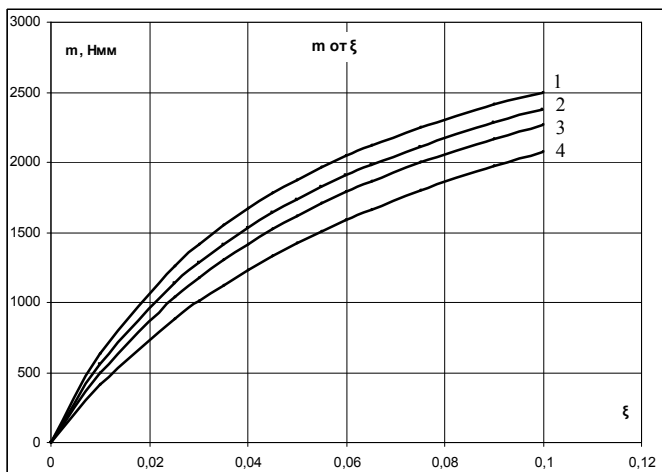


Рис. 2

Для получения графических характеристик пружины произведен расчет цилиндрической пружины, изготовленной из никелида титана, имеющего следующие параметры: модуль продольной упругости  $E=8,5 \cdot 10^{10} \text{ Па}$ , модуль сдвига  $G=1,5 \cdot 10^{10} \text{ Па}$ , коэффициент Пуассона  $\mu=0,35$ , диаметр пружины  $D_0=20 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ , диаметр прутка  $d_0=2 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ , количество витков  $i_0=10$ . На всех построенных диаграммах кривые: 1, 2, 3 и 4 получены при начальных углах подъема соответственно  $\alpha_0=2,73; 3,19; 3,64$  и  $5,45^\circ$ .

На рис. 2 приведены зависимости крутящего момента  $m$  от  $\xi$  при различных начальных углах  $\alpha_0$ .

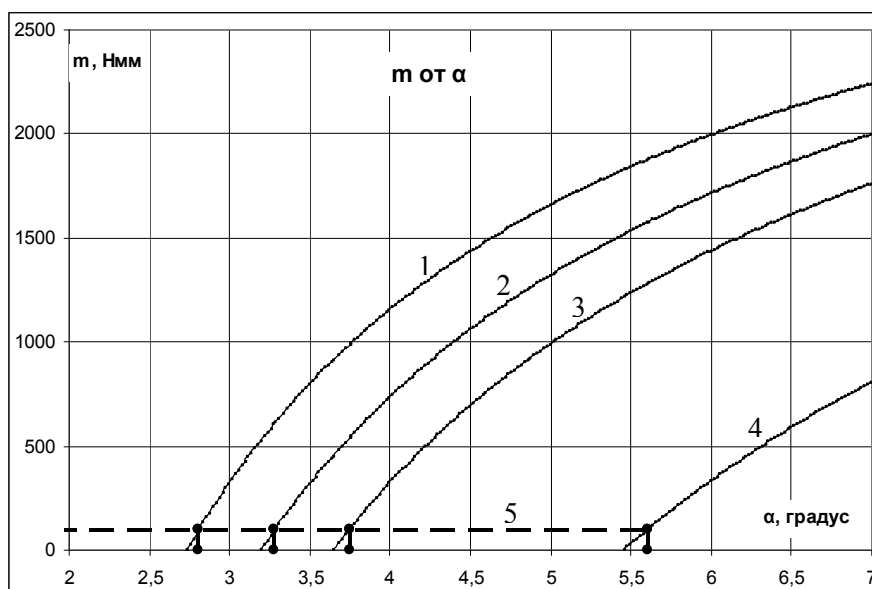


Рис.3

На рис. 3 приведены кривые зависимости момента  $m$  от угла подъема  $\alpha$  для различных начальных углов, кривая 5 соответствует предельным крутящим моментам.

Таким образом, графически и аналитически получены решения уравнения (21). При этом для рассматриваемых углов подъема пружины  $\alpha$  предельные крутящие моменты оказались приблизительно равны  $m_{\text{фТ}} = 102H \cdot \text{мм}$ .

### Литература

1. Абдрахманов С.А. Деформация материалов с памятью формы при термосиловом воздействии. – Бишкек: Илим, 1991. 116 с.
2. Лихачев В.А. и др. Эффект памяти формы. –Л.: Изд-во ЛГУ, 1987. 216 с.
3. Материалы с эффектом памяти формы. Справочное издание под общей ред. В.А. Лихачева. – СП., 1998. Т.4. 268 с.
4. С.Д. Пономарев и др. Расчет на прочность в машиностроении. – М.: Машгиз, 1956. Т. 1. 881 с.
5. С.Д. Пономарев, Л.Е. Андреева. Расчет упругих элементов машин и приборов. М.: Машиностроение. 1980. 323 с.
6. Н.А. Чернышев. Напряженное состояние и деформация цилиндрических пружин, свитых из круглого прутка // В кн. Динамика и прочность машин. М.: АН СССР, 1950. С. 7 – 78.
7. Мартенситная деформация никелида титана/Паскаль Ю.И., Ерофеев В.Я., Монасевич Л.А. и др.// Изв. вузов, Физика. 1982. №6. с. 103 – 117.
8. Ооцука К., Симудзу К., Судзуки Ю. Сплавы с эффектом памяти формы /Под ред. Фунакуба Х. Пер. с японск./ – М.: Металлургия. 1990. 224 с.