

НЕЛИНЕЙНОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ВОЛЬТЕРРА ПЕРВОГО РОДА С ТРЕМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

ЗУЛУКАРОВ Ж. А.

ОмГТУ

izvestiya@ktu.aknet.kg

Аннотация: В данной статье рассматриваются методы и механизмы решения основной научной проблемы нелинейное интегральное уравнение Вольтерра первого рода с тремя независимыми переменными в функциональном пространстве $L_2(G)$. Решение такой научной задачи до этого времени рассматривалось только для двух переменных.

Рассмотрим уравнение:

$$\int_0^t K(t, x, y, s, u(s, x, y)) ds + \int_0^t \int_0^x N(t, x, y, s, z, u(s, z, y)) dz ds + \\ + \int_0^t \int_0^x \int_0^y M(t, x, y, s, z, w, u(s, z, w)) dw dz ds = f(t, x, y), \quad (t, x, y) \in G, \quad (1)$$

где $K(t, x, y, s, u)$, $N(t, x, y, s, z, u)$, $M(t, x, y, s, z, w, u)$ и $f(t, x, y)$ – известная функция, а $u(t, x, y)$ – неизвестная, в области $G = \{(t, x, y): 0 \leq t \leq T; 0 \leq x \leq X; 0 \leq y \leq Y\}$, $f(0, x, y) = 0$ при $x \in [0, X]$, $y \in [0, Y]$.

Различные вопросы для интегральных уравнений Вольтерра первого рода исследовались в [1 – 5]. В частности, в [4] для линейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода с гладкими ядрами доказано существование многопараметрического семейства решений. В [5] изучены вопросы регуляризации и единственности решений систем нелинейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода с двумя независимыми переменными. Здесь при выборе параметра регуляризации допускается, что функции $K(t, x, y, s, u)$, $N(t, x, y, s, z, u)$, $M(t, x, y, s, z, w, u)$ могут быть негладкими.

Всюду в дальнейшем предполагается, что $K(t, x, y, s, u) = K_0(t, x, y, s)u + K_1(t, x, y, s, u)$.

Предположим выполнение следующих условий:

а) При любом фиксированном $(t, x, y) \in G$, функция $K_0(t, x, y, s) \in L_1(0, t)$, функции $K_1(t, x, y, s, u)$, $M(t, x, y, s, z, w, u)$ и $N(t, x, y, s, z, u)$ непрерывны соответственно в области $G_1 \times R$, $G_2 \times R$ и $G_3 \times R$, $G_1 = \{(t, x, y, s): 0 \leq s \leq t \leq T, 0 \leq x \leq X, 0 \leq y \leq Y\}$, $G_2 = \{(t, x, y, s, z): 0 \leq s \leq t \leq T, 0 \leq z \leq x \leq X, 0 \leq y \leq Y\}$, $G_3 = \{(t, x, y, s, z, w): 0 \leq s \leq t \leq Y, 0 \leq z \leq x \leq X, 0 \leq w \leq y \leq Y\}$, $K_0(t, x, y, s) \geq 0$ при $(t, x, y) \in G$, и функция $\varphi(t, x, y) = \int_0^t K_0(s, x, y, s) ds$ непрерывны в области G .

б) При $t > \tau$ для любых $(t, x, y, s), (\tau, x, y, s) \in G_1$ справедливо:

$$|K_0(t, x, y, s) - K_0(\tau, x, y, s)| \leq C \int_\tau^t K_0(s, x, y, s) ds,$$

где $0 < C$ – известная постоянная;

в) При $t > \tau$ для любых $(t, x, y, s, u_1), (\tau, x, y, s, u_1), (t, x, y, s, u_2), (\tau, x, y, s, u_2) \in G_1 \times R$, справедливо

$$|K_1(t, x, y, s, u_1) - K_1(\tau, x, y, s, u_1) - K_1(t, x, y, s, u_2) + K_1(\tau, x, y, s, u_2)| \leq \\ \leq C_1 \int_\tau^t K_0(s, x, y, s) ds |u_1 - u_2|,$$

где $0 < C_1$ – некоторая постоянная; $K_1(t, x, y, t, u) \equiv 0$ при $(t, x, y, s, u) \in G_1 \times R$

г) При $t > \tau$ для любых $(t, x, y, s, z, u_1), (\tau, x, y, s, z, u_1), (t, x, y, s, z, u_2), (\tau, x, y, s, z, u_2) \in G_2 \times R$, справедливо:

$$|N(t, x, y, s, z, u_1) - N(\tau, x, y, s, z, u_1) - N(t, x, y, s, z, u_2) + N(\tau, x, y, s, z, u_2)| \leq \\ \leq C_2 \int_\tau^t K(s, x, y, s) ds |u_2 - u_1|,$$

где $0 < C_2$ – некоторая постоянная и $N(t, x, y, t, z, u) \equiv 0$ при $(t, x, y, s, z, u) \in G_2 \times R$, $G_4 = \{(t, x, y, z): 0 \leq t \leq T; 0 \leq z \leq x \leq X; 0 \leq y \leq Y\}$.

д) При $t > \tau$ для любых $(t, x, y, s, z, w, u_1), (\tau, x, y, s, z, w, u_1), (t, x, y, s, z, w, u_2), (\tau, x, y, s, z, w, u_2) \in G_3 \times R$ справедливо:

$$|M(t, x, y, s, z, w, u_1) - M(\tau, x, y, s, z, w, u_1) - M(t, x, y, s, z, u_2) + M(\tau, x, y, s, z, w, u_2)| \leq \\ \leq C_3 \int_{\tau}^t K(s, x, y, s) ds |u_2 - u_1|,$$

где $0 < C$ – некоторая постоянная и $M(t, x, y, t, z, w, u) \equiv 0$ при $(t, x, y, z, w, u) \in G_5 \times R$, $G_5 = \{(t, x, y, z, w): 0 \leq t \leq T; 0 \leq z \leq x \leq X; 0 \leq w \leq y \leq Y\}$.

Наряду с уравнением (1) будем рассматривать следующее уравнение:

$$\varepsilon u(t, x, y, \varepsilon) + \int_0^t K_0(t, x, y, s) u(s, x, y, \varepsilon) ds + \int_0^t K_1(t, x, y, s, u(s, x, y, \varepsilon)) ds + \\ + \int_0^t \int_0^x N(t, x, y, s, z, u(s, z, y, \varepsilon)) dz ds + \int_0^t \int_0^x \int_0^y M(t, x, y, s, z, w, u(s, z, w, \varepsilon)) dw dz ds = \\ = f(t, x, y) + \varepsilon u(0, x, y), \quad (t, x, y) \in G, \quad (2)$$

где $0 < \varepsilon$ – малый параметр.

Решение уравнения (2) будем искать в виде $u(t, x, y, \varepsilon) = u(t, x, y) + \xi(t, x, y, \varepsilon)$. (3)

Подставляя (3) в (2) и преобразуя получим:

$$\xi(t, x, y, \varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t K_0(s, x, y, s) \xi(s, x, y, \varepsilon) ds = -\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t [K_0(t, x, y, s) - K_0(s, x, y, s)] \times \\ \times \xi(s, x, y, \varepsilon) ds - \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t [K_1(t, x, y, s, u(s, x, y) + \xi(s, x, y, \varepsilon)) - K_1(t, x, y, s, u(s, x, y))] ds - \\ - \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \int_0^x [N(t, x, y, s, z, u(s, z, y) + \xi(s, z, y, \varepsilon)) - N(t, x, y, s, z, u(s, z, y))] dz ds - \\ - \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \int_0^x \int_0^y [M(t, x, y, s, z, w, u(s, z, w) + \xi(s, z, w, \varepsilon)) - M(t, x, y, s, z, w, u(s, z, y))] dw dz ds - \\ - [u(t, x, y) - u(0, x, y)].$$

Применим резольвенту ядра $\frac{1}{\varepsilon} K_0(s, x, y, s)$ и используя формулу Дирихле и учитывая, что

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t K_0(s, x, y, s) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t K(\tau, x, y, \tau) d\tau} ds = 1 - e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t K_0(s, x, y, s) ds}, \quad \text{затем заменив } \tau \text{ на } s, \text{ имеем}$$

$$\xi(t, x, y, \varepsilon) = F(t, x, y, \varepsilon) + \int_0^t H(t, x, y, s, \varepsilon) \xi(s, x, y, \varepsilon) ds + \int_0^t L(t, x, y, s, u(s, x, y) + \\ + \xi(s, x, y, \varepsilon), u(s, x, y), \varepsilon) ds + \int_0^t \int_0^x N_1(t, x, y, s, z, u(s, z, y) + \xi(s, z, y, \varepsilon), u(s, z, y), \varepsilon) dz ds + \\ + \int_0^t \int_0^x \int_0^y M_1(t, x, y, s, z, w, u(s, z, w) + \xi(s, z, w, \varepsilon), u(s, z, y), \varepsilon) dw dz ds, \quad (4)$$

$$\text{где } H(t, x, y, s, \varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon} [K_0(t, x, y, s) - K_0(s, x, y, s)] e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t K(\tau, x, y, \tau) d\tau} -$$

$$-\frac{1}{\varepsilon^2} \int_s^t K(\tau, x, y, \tau) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t K_0(\tau, x, y, \tau) d\tau} [K_0(t, x, y, s) - K_0(\tau, x, y, s)] d\tau; \quad (5)$$

$$L(t, x, y, s, u(s, x, y) + \xi(s, x, y, \varepsilon), u(s, x, y), \varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon} [K_1(t, x, y, s, u(s, x, y) +$$

$$\begin{aligned}
& + \xi(s, x, y, \varepsilon)) - K_1(t, x, y, s, u(s, x, y)) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t K(\tau, x, y, \tau) d\tau} - \frac{1}{\varepsilon^2} \int_s^t K_0(\tau, x, y, \tau) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t K(\tau, x, y, \tau) d\tau} \times \\
& \times [K_1(t, x, y, s, u(s, x, y) + \xi(s, x, y, \varepsilon)) - K_1(\tau, x, y, s, u(s, x, y) + \xi(s, x, y, \varepsilon)) - \\
& - K_1(t, x, y, s, u(s, x, y)) + K_1(\tau, x, y, s, u(s, x, y))] d\tau \quad (6)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& N_1(t, x, y, s, z, u(s, z, y) + \xi(s, z, y, \varepsilon), u(s, z, y), \varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon} [N(t, x, y, s, z, u(s, z, y) + \\
& + \xi(s, z, y, \varepsilon)) - N(t, x, y, s, z, u(s, z, y))] e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t K_0(\tau, x, y, \tau) d\tau} - \frac{1}{\varepsilon^2} \int_s^t K_0(\tau, x, y, \tau) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t K_0(\tau, x, y, \tau) d\tau} \times \\
& \times [N(t, x, y, s, z, u(s, z, y) + \xi(s, z, y, \varepsilon)) - N(\tau, x, y, s, z, u(s, z, y) + \xi(s, z, y, \varepsilon)) - \\
& - N(t, x, y, s, z, u(s, z, y)) + N(\tau, x, y, s, z, u(s, z, y))] d\tau \quad (7)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& M_1(t, x, y, s, z, w, u(s, z, w) + \xi(s, z, w, \varepsilon), u(s, z, w), \varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon} [M(t, x, y, s, z, w, u(s, z, w) + \\
& + \xi(s, z, w, \varepsilon)) - M(t, x, y, s, z, w, u(s, z, w))] e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t K_0(\tau, x, y, \tau) d\tau} - \frac{1}{\varepsilon^2} \int_s^t K_0(\tau, x, y, \tau) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t K_0(\tau, x, y, \tau) d\tau} \times \\
& \times [M(t, x, y, s, z, w, u(s, z, w) + \xi(s, z, w, \varepsilon)) - M(\tau, x, y, s, z, w, u(s, z, w) + \xi(s, z, w, \varepsilon)) - \\
& - M(t, x, y, s, z, w, u(s, z, w)) + M(\tau, x, y, s, z, w, u(s, z, w))] d\tau \quad (8)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& F(t, x, y, \varepsilon) = [u(t, x, y) - u(0, x, y)] e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t K_0(\tau, x, y, \tau) d\tau} - \frac{1}{\varepsilon^2} \int_s^t K_0(\tau, x, y, \tau) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t K_0(\tau, x, y, \tau) d\tau} \times \\
& \times [u(t, x, y) - u(s, x, y)] ds. \quad (9)
\end{aligned}$$

Лемма 1. Пусть

$$F(t, x, y, \varepsilon) = -u(t, x, y) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t K(\tau, x, y, \tau) d\tau} - \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t K(s, x, y, s) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t K(\tau, x, y, \tau) d\tau} [u(t, x, y) - u(s, x, y)] ds \text{ где}$$

$u(t, x, y) \in C(G)$, $u(0, x, y) = 0$ при $x \in [0; X]$, $y \in [0; Y]$, $K(t, x, y, t) \in L_1(G)$, $K(t, x, y, t) > 0$ при почти всех $(t, x, y) \in G$; функция $\varphi(t, x, y) = \int_0^t K(s, x, y, s) ds$ непрерывна по совокупности $(t, x, y) \in G$. Тогда справедлива оценка:

$$\|F(t, x, y, \varepsilon)\| \leq 3 \|u(t, x, y)\|_C e^{\frac{1}{\varepsilon^{1-\beta}}} + \omega_{\bar{u}}(\varepsilon^\beta) = C_0(\varepsilon)$$

где β – произвольное число из интервала $(0, 1)$;

$$\omega_{\bar{u}}(\delta) = \sup_{\substack{|v-v_0| < \delta \\ x \in [0; X] \\ y \in [0; Y]}} |u(\varphi^{-1}(v, x, y), x, y) - u(\varphi^{-1}(v_0, x, y), x, y)|:$$

$\varphi^{-1}(v, x, y)$ – обратная функция функции $v = \varphi(t, x, y)$.

Доказательство. 1) если $0 \leq t \leq \varphi^{-1}(\varepsilon^\beta, x, y)$, $x \in [0; X]$, $y \in [0; Y]$, то из (9)

Имеем:

$$|F(t, x, y, \varepsilon)| = \omega_{\bar{u}}(\varepsilon^\beta) e^{\frac{1}{\varepsilon} \varphi(t, x, y)} + \omega_{\bar{u}}(\varepsilon^\beta) \int_0^t \frac{1}{\varepsilon} K(s, x, y, s) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t K(\tau, x, y, \tau) d\tau} ds = \omega_{\bar{u}}(\varepsilon^\beta). \quad (10)$$

2) если $\varphi^{-1}(\varepsilon^\beta, x, y) \leq t \leq T$, $x \in [0; X]$, $y \in [0; Y]$ то

$$|u(t, x, y)| e^{\frac{1}{\varepsilon} \varphi(t, x, y)} \leq \|u(t, x, y)\|_C e^{\frac{1}{\varepsilon^{1-\beta}}}; \quad (11)$$

$$\left| \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t K(s, x, y, s) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t K(\tau, x, y, \tau) d\tau} [u(t, x, y) - u(s, x, y)] ds + \right.$$

$$+ \frac{1}{\varepsilon} \int_{\varphi^{-1}(\varphi(t,x,y)-\varepsilon^\beta, x, y)}^t K(s, x, y, s) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t K(\tau, x, y, \tau) d\tau} |u(t, x, y) - u(s, x, y)| ds \leq 2 \|u(t, x, y)\|_C e^{-\frac{1}{\varepsilon^{1-\beta}}} + \omega_{\bar{u}}(\varepsilon^\beta);$$

из (10), (11) и последнего следует справедливость лемм 1.

В дальнейшем нам понадобятся легко доказуемые следующие леммы:

Лемма 2. Пусть выполняются условия а)-з). Функции $H(t, x, y, s, \varepsilon)$, $L(t, x, y, s, u(s, x, y) + \xi(s, x, y, \varepsilon), u(s, x, y), \varepsilon)$, $N_1(t, x, y, s, z, u(s, z, y) + \xi(s, z, y, \varepsilon), u(s, z, y), \varepsilon)$ и $|M(t, x, y, s, z, w, u(s, z, w) + \xi(s, z, w, \varepsilon), u(s, z, w), \varepsilon)| \leq C_6 |\xi(s, z, w, \varepsilon)|$ определены соответственно с помощью формул (5), (6) (7) и (8). Тогда справедливо:

$$|H(t, x, y, s, \varepsilon)| \leq C_3$$

$$|L(t, x, y, s, u(s, x, y) + \xi(s, x, y, \varepsilon), u(s, x, y), \varepsilon)| \leq C_5 |\xi(s, x, y, \varepsilon)|$$

$$|N_1(t, x, y, s, z, u(s, z, y) + \xi(s, z, y, \varepsilon), u(s, z, y), \varepsilon)| \leq C_5 |\xi(s, x, y, \varepsilon)|$$

$$|M(t, x, y, s, z, w, u(s, z, w) + \xi(s, z, w, \varepsilon), u(s, z, w), \varepsilon)| \leq C_6 |\xi(s, z, w, \varepsilon)|,$$

$$\text{где } C_3 = C(1 + e^{-1}), C_5 = C_2(1 + e^{-1}), C_6 = C_3(1 + e^{-1}).$$

Далее, учитывая леммы 1-2 из (4), имеем:

$$|\xi(t, x, y, \varepsilon)| \leq C_0(\varepsilon) + \int_0^t C_4 |\xi(s, x, y, \varepsilon)| ds + \int_0^t \int_0^x C_5 |\xi(s, z, y, \varepsilon)| dz ds + \int_0^t \int_0^x \int_0^y C_6 |\xi(s, z, w, \varepsilon)| dw dz ds$$

$$\text{где } C_4 = (C + C_1)(1 + e^{-1}); \quad C_0(\varepsilon) = 4 \|u(t, x, y)\| e^{-\frac{1}{\varepsilon^{1-\beta}}} + \omega_{\bar{u}}(\varepsilon^\beta), \quad \beta \in (0; 1)$$

$$\omega_{\bar{u}}(\delta) = \sup_{\substack{|\nu - \nu_0| < \delta \\ x \in [0; X] \\ y \in [0; Y]}} |u(\varphi^{-1}(\nu, x, y), x, y) - u(\varphi^{-1}(\nu_0, x, y), x, y)|:$$

$$\varphi^{-1}(\nu, x, y) - \text{обратная функция функции } \varphi(t, x, y) = \int_0^t K_0(s, x, y, s) ds.$$

$$\text{Обозначим } a(t, x, y, \varepsilon) = C_0(\varepsilon) + \int_0^t \int_0^x C_4 |\xi(s, z, y, \varepsilon)| dz ds + \int_0^t \int_0^x \int_0^y C_6 |\xi(s, z, w, \varepsilon)| dw dz ds \quad (13).$$

Тогда последнее неравенство примет вид:

$$|\xi(t, x, y, \varepsilon)| \leq a(t, x, y, \varepsilon) + \int_0^t C_4 |\xi(s, x, y, \varepsilon)| ds. \quad (14)$$

Применим лемму [5] к неравенству (14) имеем:

$$|\xi(t, x, y, \varepsilon)| \leq a(t, x, y, \varepsilon) + \int_0^t C_4 e^{C_4(t-s)} a(s, x, y, \varepsilon) ds,$$

вместо $a(t, x, y, \varepsilon)$ положим выражение (14) из последнего неравенства, применив, формула Дирихле, имеем:

$$\begin{aligned} |\xi(t, x, y, \varepsilon)| &\leq C_0(\varepsilon) e^{C_4 T} + \int_0^t \int_0^x C_0(\varepsilon) e^{C_4 T} R(t, x, s, s) dz ds + \int_0^t \int_0^x \int_0^y [C_6 e^{C_4 T} + \\ &+ \int_s^t \int_z^x C_6 e^{C_4 T} R(t, x, s_1, z_1) dz_1 ds_1] dw dz ds, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\text{где } R(t, x, s, z) = C_5 e^{C_4 T} \sum_{n=0}^{\infty} (C_5 e^{C_4 T})^n \frac{(t-s)^n (x-z)^n}{(n!)^2}.$$

Из (15) получим:

$$|\xi(t, x, y, \varepsilon)| \leq C_7 + \int_0^t \int_0^x \int_0^y C_8 |\xi(s, z, w, \varepsilon)| dw dz ds, \quad (16)$$

$$\text{где } C_7 = C_0(\varepsilon) e^{C_4 T} [1 + R(T, X, 0, 0)TX], \quad C_8 = C_6 e^{C_4 T} [1 + R(T, X, 0, 0)TX].$$

На (17) применим (13) и (15) имеем:

$$|\xi(t, x, y, \varepsilon)| \leq C_7 + \int_0^t \int_0^x \int_0^y R(t, x, y, s, z, w) C_7 dw dz ds, \quad (17)$$

$$\text{где } R(t, x, y, s, z, w) = C_8 \sum_{n=0}^{\infty} C_8^n \frac{(t-s)^n (x-z)^n (y-w)^n}{(n!)^3}.$$

Из (17) имеем $|\xi(t, x, y, \varepsilon)| \leq C_7 [1 + R(T, X, Y, 0, 0, 0) TXY] \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$

Таким образом получим следующую оценку:

$$\|\xi(t, x, y, \varepsilon)\|_C \leq C_0(\varepsilon) e^{C_4 T}. \quad (18)$$

И так доказана

Теорема 1. Пусть выполняются условия *a)-д)* и уравнение (1) имеет непрерывное решение $u(t, x, y)$ на G , кроме того, пусть $K_0(t, x, y, t) > 0$ при почти всех $(t, x, y) \in G$, тогда решение уравнения (2) представимо в виде (3), причем это решение при $\varepsilon \rightarrow 0$ сходится по норме $C(G)$ к непрерывному решению уравнения (1) в области G и справедлива (18).

Теперь покажем, что решение уравнение (1) единственно в пространстве $C(G)$.

Теорема 2. Пусть выполняются условия *a)-з)*, а также $\int_0^t K_0(s, x, y, s) ds > 0$ при почти

всех $(t, x, y) \in G$. Тогда решение уравнения (1) единственно в пространстве G .

Доказательство. Пусть уравнение (1) при фиксированном $f(t, x, y)$ имеет два решения $u_1(t, x, y)$ и $u_2(t, x, y)$. Сначала покажем, что $u_1(0, x, y) = u_2(0, x, y)$ $x \in [0; X]$, $y \in [0; Y]$. В самом деле из (1) имеем:

$$\begin{aligned} [u_1(0, x, y) - u_2(0, x, y)] \int_0^t K_0(s, x, y, s) ds &= - \int_0^t K_0(s, x, y, s) [u_1(s, x, y) - u_1(0, x, y) - \\ &- u_2(s, x, y) - u_2(0, x, y)] ds - \int_0^t [K_0(t, x, y, s) - K_0(s, x, y, s)] (u_1(s, x, y) - u_2(s, x, y)) ds - \\ &- \int_0^t [K_1(t, x, y, s, u_1(s, x, y)) - K_1(s, x, y, s, u_1(s, x, y)) - K_1(t, x, y, s, u_2(s, x, y)) + \\ &- K_1(s, x, y, s, u_2(s, x, y))] ds - \int_0^t \int_0^x [N(t, x, y, s, z, u_1(s, z, y)) - K_1(s, x, y, s, z, u_1(s, z, y)) - \\ &- N(t, x, y, s, z, u_2(s, z, y)) + N(s, x, y, s, z, u_2(s, z, y))] dz ds - \int_0^t \int_0^x \int_0^y [M(t, x, y, s, z, w, u_1(s, x, y)) - \\ &- M(s, x, y, s, z, w, u_1(s, z, w)) - M(t, x, y, s, z, w, u_2(s, z, w)) + M(s, x, y, s, z, w, u_2(s, z, w))] dw dz ds. \end{aligned}$$

В силу условий *a)-д)* отсюда имеем:

$$\begin{aligned} |u_1(0, x, y) - u_2(0, x, y)| \int_0^t K_0(s, x, y, s) ds &\leq \sup_{(s, x, y) \in G} |u_1(s, x, y) - u_1(0, x, y)| \int_0^t K_0(s, x, y, s) ds + \\ &+ \sup_{(s, x, y) \in G} |u_2(s, x, y) - u_2(0, x, y)| \int_0^t K_0(s, x, y, s) ds + \|u_1(t, x, y)\|_C \int_0^t \int_0^s K_0(\tau, x, y, \tau) d\tau + \\ &+ \|u_2(t, x, y)\|_C \int_0^t \int_0^s K_0(\tau, x, y, \tau) d\tau + \int_0^t \int_0^s K_0(\tau, x, y, \tau) d\tau |u_1(s, x, y) - u_2(s, x, y)| ds + \\ &+ \int_0^t \int_0^x \int_0^s K_0(\tau, x, y, \tau) d\tau |u_1(s, z, y) - u_2(s, z, y)| dz ds + \\ &+ \int_0^t \int_0^x \int_0^y \int_0^s K_0(\tau, x, y, \tau) d\tau |u_1(s, z, w) - u_2(s, z, w)| dw dz ds. \end{aligned}$$

Отсюда, применяя формулу Дирихле, затем заменив τ на s и в силу теоремы о среднем, получим:

$$\begin{aligned} & \|u_1(0, x, y) - u_2(0, x, y)\| \int_0^t K_0(s, x, y, s) ds \leq [\sup_{(s, x, y) \in G} |u_1(s, x, y) - u_1(0, x, y)| + \\ & + \sup_{(s, x, y) \in G} |u_2(s, x, y) - u_2(0, x, y)|] \int_0^t K_0(s, x, y, s) ds + [\|u_1(t, x, y)\|_C + \|u_2(t, x, y)\|_C] Ct \times \\ & \times \int_0^t K_0(s, x, y, s) ds + [\|u_1(t, x, y)\|_C + \|u_2(t, x, y)\|_C] Ctx \int_0^t K_0(s, x, y, s) ds + \\ & + [\|u_1(t, x, y)\|_C + \|u_2(t, x, y)\|_C] Ctxy \int_0^t K_0(s, x, y, s) ds. \end{aligned}$$

По условию $\int_0^t K_0(s, x, y, s) ds > 0$ при $(t, x, y) \in G$. Тогда деля обе части неравенства на

$\int_0^t K_0(s, x, y, s) ds > 0$ и переходя к пределу при $t \rightarrow 0$, получим $\|u_1(0, x, y) - u_2(0, x, y)\| = 0$ при $x \in [0; X], y \in [0; Y]$.

Далее, уравнение (2), которое является уравнением второго рода, имеет единственное решение $u(t, x, y, \varepsilon)$ в пространстве непрерывных функций на G , и в силу теоремы 1 его можно представить в виде (3). Положим $u(t, x, y, \varepsilon) = u_1(t, x, y) + \xi_1(t, x, y, \varepsilon)$ и $u(t, x, y, \varepsilon) = u_2(t, x, y) + \xi_2(t, x, y, \varepsilon)$ где $u_1(t, x, y), u_2(t, x, y)$ – два решения уравнения (1) при фиксированном $f(t, x, y)$; $\|\xi_1(t, x, y, \varepsilon)\| \rightarrow 0, \|\xi_2(t, x, y, \varepsilon)\| \rightarrow 0$, при $\varepsilon \rightarrow 0$

$|u_1(t, x, y) - u_2(t, x, y)| \leq |\xi_1(t, x, y, \varepsilon)| + |\xi_2(t, x, y, \varepsilon)|$ переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ в последнем имеем $u_1(t, x, y) = u_2(t, x, y)$. Теорема доказана.

Литература

1. Магницкий Н. А. Линейные интегральные уравнения Вольтерра первого и третьего рода // Вычисл. матем. и матем. физики, 1979, –Т. 19, №4 – С.970 – 988.
2. Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. Р. Некорректные задачи математической физики и анализ. – М: Наука 1980. С.286.
3. Денисов А. М. О приближенном решении уравнения Вольтерра первого рода, связанного с одной обратной задачей для уравнения теплопроводности // Вестн. Моск. ун-та, Сер.15. Вычисл. матем. и киберн. 1980. №3. –С. 49 – 52.
4. Иманалиев М. И., Асанов А. О решениях систем нелинейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода // Докл. АН СССР, 1989, Т. 309, №5, –С.1052 – 1055.
5. Иманалиев М. И., Асанов А. О решениях систем нелинейных двумерных интегральных уравнений Вольтерра первого рода // Докл. АН СССР, –1991. –Т. 317, №1. –С.22 – 35.