УДК.532. 546

О МЕТОДАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ВЛАГОПРОВОДНОСТИ С ГРАВИТАЦИЕЙ

ТУГАНБАЕВ У.М., БАЙТЕМИРОВА М.Б.
Кыргызский национальный аграрный университет им. К.И. Скрябина, г.Бишкек, Кыргызстан,
ulanbek-tuganbaev @ rambler.ru

TUGANBAEV U. M. , BAYTEMIROVA M.B.
Kyrgyzkiy national agrarian university of the name K.I. Skryabin, c. Bishkek. Kyrgyzstan
ulanbek-tuganbaev @ rambler.ru

Аннотация: В работе разработаны аналитические методы решения уравнения влагопроводности с гравитационными силами.

Известно, что почвенная влага при движении подчиняется общим физическим закономерностям ненасыщенной фильтрации в пористых средах. А эти законы движения воды в почвах весьма сложны, недостаточно изучены, и поэтому построение общей модели невозможно. Если происходит процесс впитывания воды в ненасыщенную почву, то удобнее описывать влажностное состояние почвы не компонентами средней скорости, а некоторой безразмерной величиной $W(x,t)-$ влагопереносом, складывающимся из суммарных переносов (капиллярного и гравитационного) и имеющим вид [1]

$$\frac{\partial W}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left[D(W)\frac{\partial W}{\partial x}\right]-\frac{\partial K(W)}{\partial x}\ , \qquad (1)$$

где $D(W),\ K(W)-$ коэффициенты диффузии и влагопроводности.

Начально - краевые условия данной задачи следующие:

$$W(x,0)=H_0,\ \text{ при }\ x\succ 0,\quad t=0. \qquad (2а)$$

$$W(0,t)=H_1,\quad \text{при}\quad x=0,\quad t\succ 0. \qquad (2б)$$

$$W(\ell,t)=H_2,\quad \text{при}\quad x=\ell,\quad t\succ 0. \qquad (2в)$$

Условия $(2a-2\hat{a})$ указывают на то, что начальная влажность постоянна, но в то же время на верней границе всегда существует заданный напор воды с неопределёнными границами фронта увлажнения почвы.

Разлагая коэффициенты переноса степенными рядами [2]

$$D(W)=D_0+D_1W+D_2W^2+\ldots \qquad K(W)=K_0+K_1W+K_2W^2+\ldots,$$

а решение ищем в виде $W=W_0+\varepsilon W_1+\varepsilon^2W_2+\ldots$,

тогда для нулевого приближения получим уравнение

$$\frac{\partial W_0}{\partial t}=D_0\frac{\partial^2 W_0}{\partial x_2}-K_1\frac{\partial W_0}{\partial x}, \qquad (3)$$

которое является основным уравнением для исследования.

Для решения уравнения (3) введем новую функцию

$$W_0(x,t)=\overline{\overline{W}}(x,t)e^{\alpha t+\rho\alpha}, \qquad (4)$$

тогда это уравнения запишется

$$\overline{W}_t = D_0\overline{W}_{xx} + D_1\overline{W}_x + D_2\overline{W}, \qquad (5)$$

где $\quad D = 2\beta\beta_0 - K_1, \qquad D_2 = \beta^2 D_0 - K_1\beta - \alpha$.

Частный случай, если величины $\alpha = -\dfrac{K_0^2}{4D_0}, \quad \beta = \dfrac{K_0}{2D_0}$, тогда уравнение (3) имеет вид

$$\overline{W}_t = D_0\overline{W}_{xx}. \qquad (6)$$

Ранее уравнение (6) нами было подробно исследовано.

I. Вначале решение уравнения (3) будет искать в форме

$$\overline{W}(x,t) = f_0(t)\cdot f_1(\xi) \qquad \xi = \frac{(ax^2 + bxt + ct^2)}{t}. \qquad (7)$$

Определим производные $\overline{W}_t$, $\overline{W}_x$, $\overline{W}_{xx}$ при $\xi_x = 2axt^{-1} + b$, $\xi_t = -ax^2t^{-2} + C$,

$$\overline{W}_t = f_0' f_1 + f_0 f_1'(-ax^2t^{-2} + c), \qquad \overline{W}_x = f_0 f_1'(2axt^{-1} + b),$$

$$\overline{W}_{xx} = f_0 f_1''(4a^2x^2t^{-2} + 4abxt^{-1} + b^2) + f_0 f_1' 2at^{-1}.$$

Подставляя их в уравнение (3), получим

$$\left(\frac{t^2 f_0'}{f_0}\right)f_1 + f_1'(-ax^2 + ct^2) = D_0\left[f_1''(4a^2x^2 + 4abxt + b^2t^2) + 2atf_1'\right] + D_1\left[2axt + bt^2\right]f_1' + D_2t^2f_1.$$

Собирая члены при одинаковых степенях t, t^2, xt, x^2, получим систему из четырех уравнений

$$\begin{array}{ll} \text{а.}\ 2aD_0f_1' - (tf_0'/f_0)f_1 = 0. & \text{б.}\ b^2D_0f_1'' + (bD_1 - c)f_1' + D_2f_1 = 0. \\ \text{в.}\ 2D_0bf_1'' + D_1f_1' = 0. & \text{г.}\ 4aD_0f_1'' + f_1' = 0. \end{array} \qquad (8)$$

Сравнивая 8а и 8г, определяем $b = 2aD_1$, а из 8а находим одно частное решение

$$f_1(\xi) = exp\lambda\xi \qquad \text{где} \quad \lambda = k/2aD_0.$$

Из уравнения 8в определим $k = -\dfrac{1}{2}$, а из 8б находим $C = a(D_1^2 + 4D_0D_2)$. Таким образом, решением уравнения (3) будет

$$\overline{W}(x,t) = At^{-1/2}.exp\lambda\xi, \qquad \xi = \frac{a\left[x^2 + 2D_1xt + (D_1^2 + 4D_0D_2)t^2\right]}{t}. \qquad (9)$$

Тогда с учетом (4) решение (3) запишется окончательно

$$W_0(x,t) = At^{-\frac{1}{2}}\exp(\alpha t + \beta x + \lambda\xi), \qquad \lambda\xi = -\frac{\left[x^2 + 2D_1xt + (D_1^2 + 4D_0D_2)t^2\right]}{4D_0t}. \qquad (10)$$

II. Пусть существует соотношение $\qquad \alpha = \beta^2D_0 - K_1\beta_1, \qquad (11)$

тогда уравнение (5) имеет вид $\quad \overline{W}_t = D_0\overline{W}_{xx} + D_1\overline{W}_x. \qquad (12)$

Если определять его решение в форме $\quad \overline{W}(x,t) = f_0(t)\cdot f_1(\xi), \quad \xi = \dfrac{(x - at)^2}{t}, \qquad (13)$

то, определяя все необходимые частные производные и подставляя в (12), имеет

$$t^2 f_0' f_1 + f_0 f_1'(-x^2t^2 + a^2) = D_0 f_0 f_1''(4x^2t^{-2} - 8axt^{-1} + 4a^2) + 2D_0 t^{-1} f_0 f_1' + D_1 f_0 f_1' \cdot \left(2xt^{-1} - 2a\right)$$

или после некоторых математических преобразований получим

$$\frac{t^2 f_0'}{f_0} f_1 + f_1'(-x^2 + a^2t^2) = D_0 f_1''\left(4x^2 - 8axt + 4a^2t^2\right) + 2D_0 t f_1' + D_1\left(2xt - 2at^2\right) f_1' = 0\,. \qquad (14)$$

Собирая члены при одинаковых степенях x^2, xt, t^2, t, имеем систему из четырех обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, соответственно

а. $4D_0 f_1'' + f_1' = 0.$ б. $4aD_0 f_1'' - 2D_1 f_1' = 0.$

в. $4aD_0 f_1'' - \left(2D_1 + a\right) f_1' = 0.$ г. $2D_0 f_1' - \dfrac{t f_0'}{f_0} f_1 = 0.$ (15)

Из уравнения (15г) находим, что $f_1(\xi)\exp \lambda x \xi \qquad \lambda = \dfrac{K}{2D_0}.$ (16а)

Сравнивая (15а) и (15б), находим $a = -D_1$, а из (15а) с учетом (16а) определяем $\lambda = -\dfrac{1}{4D_0}$,

а $K = -\dfrac{1}{2}$ из уравнения (15в).

Таким образом, решением уравнения (12) с учетом (13) будет

$$W(x,t) = \frac{C}{\sqrt{t}} \cdot \exp(\lambda\xi), \qquad \xi = -\frac{\left(x + D_1 t\right)^2}{4D_0 t}, \qquad (16)$$

которое является новым решением.

В этом случае еще одним окончательным решением уравнения (3) при условии (11) и (16) будет

$$W_0(x,t) = \frac{C}{\sqrt{t}} \cdot \exp(\alpha t + \beta x + \lambda\xi), \qquad \xi = -\frac{\left(x + D_1 t\right)^2}{4D_0 t}. \qquad (17)$$

III. Различного рода аппроксимации коэффициента, влагопроводности $D(W)$ встречаются у авторов, в частности

$$D(W) = D_0 x^k. \qquad (18)$$

В этом случае уравнение (1) запишется

$$W_{0t} = \left(D_0 W^k W_{0x}\right)x - K_1 W_{0x} \qquad (19)$$

или при $k = 1$ как

$$W_t = D_0 W_{xx} + D_1 W_x, \qquad D_1 = D_0 - K_1. \qquad (20)$$

Последнее уравнение с вводом новой функции

$$W_0(x,t) = \overline{W}(x,t) \cdot e^{\beta t} \qquad (21)$$

примет форму

$$\overline{W}_t = D_0 x \cdot \overline{W}_{xx} + D_1 \overline{W}_x + D_2 \overline{W}, \qquad D_2 = -\beta\,. \qquad (22)$$

Решение последнего уравнения выразим в форме

$$\overline{W}(x,t) = f_0(t) \cdot f_2(x) \cdot f_1(\xi), \qquad \xi = at + bxt^{-1}. \qquad (23)$$

Определяя частные производные $\xi_t = a - bxt^{-2}$, $\xi_x = bt^{-1}$,

$$\overline{W}_t = f_0' f_2 f_1 + f_0 f_2 \cdot f_1\left(a - \frac{bx}{t^2}\right), \qquad \overline{W}_x = f_0 f_2' f_1 + f_0 f_2 f_1' b t^{-1},$$

$$\overline{W}_{xx} = f_0 f_2'' f_1 + 2 f_0 f_2' f_1' \cdot \frac{b}{t} + f_0 f_2 f_1'' \cdot \frac{b^2}{t^2}$$

и подставляя в исследуемое уравнение после деления на $f_0 f_2$, получим

$$\frac{f_0'}{f_0} f_1 + f_1'\left(a - \frac{bx}{t^2}\right) = D_0\left[\frac{f_2'' x}{f_2} f_1 + \frac{2f_2'}{f_2} f_1' \frac{bx}{t} + \frac{b^2 x}{t^2} f_1''\right] + D_1\left[\frac{f_2'}{f_2} f_1 + \frac{b}{t} f_1'\right] + D_2 f_1. \quad (24)$$

Собирая члены при одинаковых степенях, x, xt, xt^2 имеем последовательно систему из четырех уравнений:

$$\text{а. } D_0 b f_1'' + f_1' = 0, \qquad \text{б. } (2D_0 n + D_1) b f_1' - k f_1 = 0, \quad \text{при} \quad f_2(x) = x^n, \quad f_0(t) = t^k$$
$$\text{в. } n[(n-1)D_0 + D_1]x^{-1} \cdot f_1 = 0 \qquad \text{г. } -a f_1' + D_2 f_1 = 0. \quad (25)$$

Из уравнения (25г) находим
$$f_1(\xi) = \exp\left(\frac{D_2}{a}\xi\right), \quad (26)$$

а из (25а, 25б, 25в) имеем $a = -D_0 D_2 b$, $k = \dfrac{D_1 - 2D_0}{D_0}$, $n = \dfrac{D_0 - D_1}{D_0}$ соответственно.

Отсюда решение уравнения (22) в форме (23) имеет вид

$$\overline{W}(x,t) = B t^k \cdot x^n \cdot \exp\left(\frac{D_2 \xi}{a}\right), \qquad \xi = a\left(t - \frac{x}{D_0 D_2 t}\right) \quad (27)$$

или
$$\overline{W}(x,t) = \frac{B}{t} \cdot \left(\frac{x}{t}\right)^{\frac{D_0 - D_1}{D_0}} \cdot \exp\left[D_2\left(t - \frac{x}{D_0 D_2 t}\right)\right], \quad (28)$$

А с учетом (21) решением уравнений (20) будет

$$W_0(x,t) = \frac{B}{t}\left(\frac{x}{t}\right)^{\frac{D_0 - D_1}{D_0}} \cdot \exp\left[D_2\left(2t - \frac{x}{D_0 D_2 t}\right)\right]. \quad (29)$$

Уравнение (29) можно переписать в виде

$$W_t = D_0 x \cdot W_{xx} + D_1 W_x, \quad \text{где} \quad D_1 = D_0 - K_1. \quad (30)$$

Решение данного уравнения будем искать в форме

$$W(x,t) = x^n \cdot f(\xi), \qquad \xi = \frac{at}{x}. \quad (31)$$

Зная, что $\xi_t = a x^{-1}$, $\xi_x = -a x^{-2} t = -\xi x^{-1}$, найдем

$$W_t = x^{n-1} \cdot f', \qquad W_x = (nf - \xi f')x^{n-1}, \qquad W_{xx} = [n(n-1)f - (2n-2)\,\xi f' + \xi^2 f'']x^{n-2}.$$

Подставляя в исходное уравнение, получим

$$af' = D_0[n(n-1)f - (2n - m - 1)\,\xi f' + \xi^2 f''] + D_1[(nf - \xi f']$$

или после некоторых преобразований имеем $\qquad \xi^2 f'' + [m_0 + a_0 \xi]f' + b_0 f = 0, \qquad (32)$

где $m_0=-a/D_0$, $a_0=-(2n-1\cdot m)$, $b_0=n(n-m)$, $m=k_1/D_0$.
Решение уравнения (32) ищем в виде [3]

$$f(\xi)=e^{-z}\cdot z^{\nu}\cdot P(z), \qquad \text{где} \qquad z=\xi^{-1}, \tag{33}$$

тогда получим следующее уравнение:

$$\begin{gathered} z^2\cdot P''(z)+\left[2\nu+2-a_0-(2+m_0)z\right]z\cdot P'(z)+ \\ \left\{\left[(1+m_0)z-2\nu-2+a_0-m_0\nu\right]z+\left[\nu^2+(1-a_0)\nu+b_0\right]\right\}P(z)=0. \end{gathered} \tag{34}$$

Положим, что $\nu^2+(1-a_0)\nu+b_0=0$, тогда $\nu_1=m-n$ $\nu_2=-n$.
С учетом этого последнее уравнение приводится к виду

$$zp''(z)+\left[2\nu+2-a_0-(2+m_0)z\right]P'(z)+\left[(1+m_0)z-(2\nu+2-a_0+m_0\nu)\right]P(z)=0. \tag{35}$$

Подставляя оба значения ν, имеем два уравнения

$$1.\ zp''(z)+\left[(m+1)-z\right]P'(z)-(n+1)P(z)=0 \tag{36}$$

$$2.\ zp''(z)+\left[(1-m)-z\right]P'(z)-\left[n-m+1\right]P(z)=0, \tag{37}$$

которые имеют решения в формах соответственно

$$1.\ P(z)=C_1F_1(n+1,m+1,z)+C_2z^{-m}F_2(n-m+1,1-m,z); \tag{38}$$

$$2.\ P(z)=C_3F_2(n-m+1,\ 1-m,z)+C_4z^{m}F_1(n+1,m+1,z). \tag{39}$$

Таким образом, функция $f(\xi)$ с учетом (33) также имеет два вида решения:

$$1.\ f(\xi)=e^{\xi}\cdot\xi^{n-m}\cdot\left[C_1F_1(n+1,m+1,\xi^{-1})+C_2\xi^{m}\cdot F_2(n-m+1,1-m,\xi^{-1})\right] \tag{40}$$

$$2.\ f(\xi)=e^{\xi}\cdot\xi^{n}\cdot\left[C_3F_2(n-m+1,1-m,\xi^{-1})+C_4\xi^{-m}\cdot F_1(n+1,m+1,\xi^{-1})\right]. \tag{41}$$

Теперь обращаясь к формуле (31), определим два класса решений исследуемого уравнения (30) при различных n и m

$$W(x,t)=x^m\cdot(D_0t)^{n-m}\cdot\exp\left(\frac{D_0t}{x}\right)\left[C_1F_1(n+1,m+1,\frac{x}{D_0t})+C_2F_2\left(\frac{D_0t}{x}\right)^m F_2(n-m+1,1-m,\frac{x}{D_0t})\right] \tag{42}$$

$$W(x,t)=(D_0t)^n\cdot\exp\left(\frac{D_0t}{x}\right)\cdot\left[C_3F_2(n-m+1,1-m,\frac{x}{D_0t})+C_4\left(\frac{x}{D_0t}\right)^m F_1(n+1,m+1,\frac{x}{D_0t})\right]. \quad 43)$$

Итак, уравнение (30) имеет классы решений вида (42)и (43) . Эти решения указывают на изменения влажности почвы с течением времени и глубины. Учет гравитационных сил указывает параметр m.

Литература

1. *Чудновский А.Ф.* Теплофизика почв. − М.: Стройиздат, 1969.464 с.
2. *Бийбосунов А.И.* Исследование оползневых процессов и селевых потоков методами гидродинамики. − Алматы, 2006.
3. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1976. 576 с.