

## РАСЧЕТ НАПРЯЖЕННО–ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ СИСТЕМ ЖЕСТКАЯ ОБОЛОЧКА–НАПОЛНИТЕЛЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ

**ОРМОНБЕКОВ Т.О.**

*Кыргызский государственный технический университет им. И.Раззакова, Бишкек,  
Кыргызстан*

**СОПУБЕКОВ Н.А.**

*Институт физико-технических проблем и материаловедения НАН КР, Бишкек,  
Кыргызстан*

[izvestiya@ktu.aknet.kg](mailto:izvestiya@ktu.aknet.kg)

*Ограничившись определенным числом членов ряда в общем решении, получено решение краевой задачи жесткая оболочка-наполнитель цилиндрической формы. Влияние оболочки на цилиндр, учитывается путем задания на контактной поверхности нулевых радиального и осевого перемещений. Числовые результаты получены для конструкций со следующими исходными данными:  $b/a=3$ ;  $l/b=2$ ;  $\nu=1/m=0.45$ ;  $G=76 \text{ кГ/см}^3$ .*

Рассмотрим задачу осесимметричной деформации короткого полого толстостенного цилиндра, скрепленного по боковой поверхности с абсолютно жесткой оболочкой. По торцам и по внутренней образующей цилиндр нагружен равномерным давлением  $\mathcal{P}$  (рис. 1).

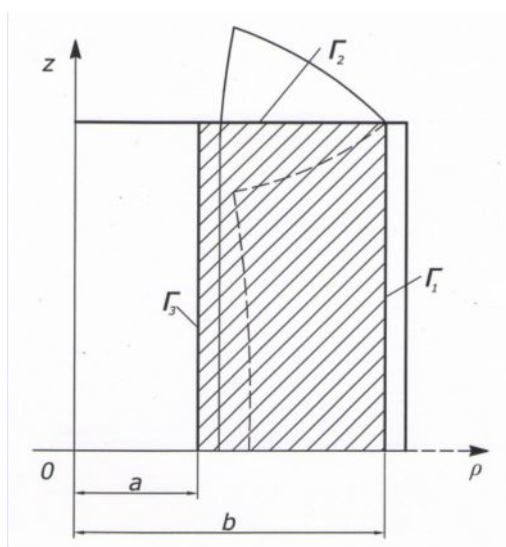


Рис. 1.

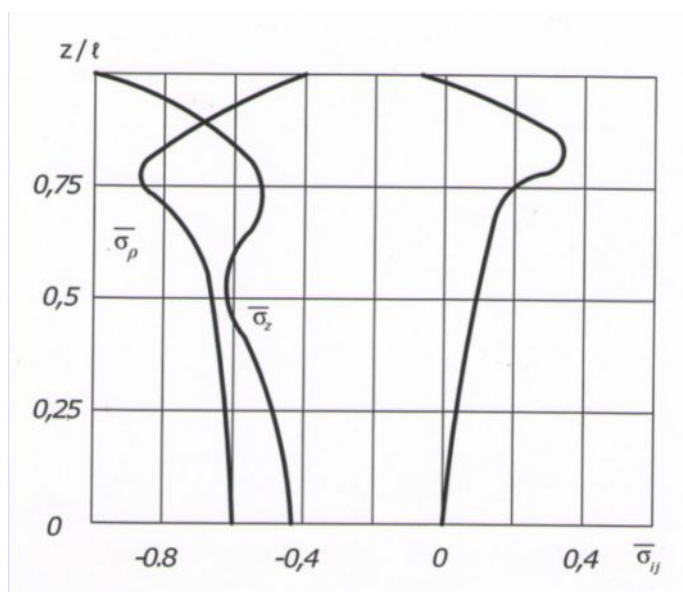


Рис. 2

Влияние оболочки на цилиндр можно учесть путем задания на контактной поверхности  $\Gamma_1$  нулевых радиального  $u_\rho$  и осевого  $u_z$  перемещений. Тогда граничные условия задачи принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} u_\rho / \Gamma_1 &= 0; & u_z / \Gamma_1 &= 0; & \sigma_z / \Gamma_2 &= -\mathcal{P}; \\ \tau_{\rho z} / \Gamma_2 &= 0; & \sigma_\rho / \Gamma_3 &= -\mathcal{P}; & \tau_{\rho z} / \Gamma_3 &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Из постановки задачи следует, что компоненты  $u_\rho$ ,  $\sigma_\rho$ ,  $\sigma_\varphi$ ,  $\sigma_z$  распределены в конструкции симметрично. Поэтому в выражениях (2) и (3) для радиального и осевого перемещений

$$u_\rho = \sum_{j=m_1}^{m_2} \left[ \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ a_{ji} \left[ I_1(\beta\rho) \frac{4(m-1)}{m} - I_0(\beta\rho) \rho\beta \right] + b_{ji} \left[ \frac{4(m-1)}{m} K_1(\beta\rho) + K_0(\beta\rho) \beta\rho - \right. \right. \right. \\ \left. \left. - c_{ji} I_1(\beta\rho) \beta + d_{ji} K_1(\beta\rho) \beta \right\} Z_j^{(1)}(z) + c_1 \rho z \frac{2(m-2)}{m} \right. \\ \left. + c_2 \frac{z}{\rho} \frac{4(m-1)}{m} + c_3 \rho \frac{2(m-1)}{m} + c_4 \frac{4(m-1)}{m\rho} + c_5 \frac{z}{\rho} \right. \\ \left. - c_7 \frac{1}{\rho} \right], \quad (2)$$

$$u_z = \sum_{j=m_1}^{m_2} \left[ \left\{ a_{ji} \rho I_1(\beta\rho) + b_{ji} \rho K_1(\beta\rho) + c_{ji} I_0(\beta\rho) + d_{ji} K_0(\beta\rho) \right\} Z_j^{(2)}(z) - c_1 c^2 + c_2 \right. \\ \left. - c_5 \ln \rho - c_6 \right],$$

$$\text{где } Z_1^{(1)} = \cos \beta z; \quad Z_2^{(1)} = \sin \beta z; \\ Z_1^{(2)} = \sin \beta z; \quad Z_2^{(2)} = -\cos \beta z.$$

$$\frac{\sigma_\rho}{2G} = \sum_{j=m_1}^{m_2} \left[ \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ a_{ji} \left[ I_0(\beta\rho) \beta \frac{3m-2}{m} - I(\beta\rho) \left( \beta^2 \rho + \frac{4(m-1)}{m\rho} \right) \right] + \right. \right. \\ \left. \left. + b_{ji} \left[ K_0(\beta\rho) \beta \frac{3m-2}{m} - K_1(\beta\rho) \left( \beta^2 \rho + \frac{4(m-1)}{m\rho} \right) \right] \right. \right. \\ \left. \left. + c_{ji} \left[ I_1(\beta\rho) \beta \frac{1}{\rho} - I_0(\beta\rho) \beta^2 \right] + d_{ji} \left[ -K_1(\beta\rho) \beta \frac{1}{\rho} - K_0(\beta\rho) \beta^2 \right] \right\} Z_j^{(1)}(z) \right. \\ \left. + 2c_1 z - c_2 \frac{4(m-1)}{m} \cdot \frac{z}{\rho^2} + 2c_3 - c_4 \frac{4(m-1)}{m\rho^2} + c_5 \frac{z}{\rho^2} \right. \\ \left. + c_7 \frac{1}{\rho^2} \right]. \quad (3)$$

$$\frac{\sigma_z}{2G} = \sum_{j=m_1}^{m_2} \left[ \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ a_{ji} \left[ I_1(\beta\rho) \rho \beta^2 + I_0(\beta\rho) \frac{2}{m} \beta \right] + b_{ji} \left[ K_1(\beta\rho) \rho \beta^2 - K_0(\beta\rho) \frac{2}{m} \beta \right] \right. \right. \\ \left. \left. + c_{ji} I_0(\beta\rho) \beta^2 + d_{ji} K_0(\beta\rho) \beta^2 \right\} Z_j^{(1)}(z) + c_1 \frac{4z}{m} + c_3 \frac{4}{m} \right]$$

$$\frac{\sigma_\varphi}{2G} = \sum_{j=m_1}^{m_2} \left[ \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ a_{ji} \left[ I_1(\beta\rho) \frac{4(m-1)}{m\rho} - I_0(\beta\rho) \frac{m-2}{m} \beta \right] \right. \right. \\ \left. \left. + b_{ji} \left[ K_1(\beta\rho) \frac{4(m-1)}{m\rho} + K_0(\beta\rho) \frac{m-2}{m} \beta \right] - c_{ji} I_1(\beta\rho) \beta \frac{1}{\rho} \right. \right. \\ \left. \left. + d_{ji} K_1(\beta\rho) \beta \frac{1}{\rho} \right\} \right] Z_j^{(1)}(z) + 2c_1 z + c_2 \frac{4(m-1)}{m\rho^2} + 2c_3 + c_4 \frac{4(m-1)}{m\rho^2} \\ - c_5 \frac{z}{\rho^2} - c_7 \frac{1}{\rho^2}, \quad (3)$$

$$\frac{\tau_{\rho z}}{2G} = \sum_{j=m_1}^{m_2} \left[ \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ a_{ji} \left[ I_0(\beta\rho) \beta \rho - I_1(\beta\rho) \frac{2(m-1)}{m} \right] \right. \right. \\ \left. \left. + b_{ji} \left[ -K_0(\beta\rho) \rho \beta - K_1(\beta\rho) \frac{2(m-1)}{m} \right] + c_{ji} I_1(\beta\rho) \beta \right. \right. \\ \left. \left. - d_{ji} K_1(\beta\rho) \beta \right\} \right] Z_j^{(2)}(z) - 2c_1 \frac{\rho}{m} + c_2 \frac{2(m-1)}{m\rho} - c_5 \frac{z}{\rho}.$$

Следует положить  $m_1 = m_2 = 1$ ,  $c_1 = c_5 = c_6 = 0$ .

При этом достаточно рассмотреть, например, верхнюю половину конструкции, т.е. для  $0 \leq z \leq \ell$ .

Функционал задачи имеет следующий вид:

$$\Phi = \int_{\Gamma_1} (u_\rho^2 + u_z^2) d\Gamma_1 + \int_{\Gamma_2} [(\sigma_z + \rho)^2 + \tau_{\rho z}^2] d\Gamma_2 + \int_{\Gamma_3} [(\sigma_\rho + \rho)^2 + \tau_{\rho z}^2] d\Gamma_3.$$

Ограничившись определенным числом членов ряда в общем решении (2), (3), получим решение краевых задач для тел вращения, приближенно удовлетворяющих граничным условиям. Метод наименьших квадратов приводит к решению систем алгебраических уравнений, коэффициенты, в правой части которых в общем случае вычисляются приближенно.

Численные результаты получены для конструкции со следующими исходными данными:

$$\frac{b}{a} = 3; \quad \frac{\ell}{b} = 2; \quad \nu = \frac{1}{m} = 0,45; \quad G = 76 \kappa \Gamma / \text{см}^2.$$

Порядок системы линейных алгебраических уравнений был равен 47. Оптимальное значение параметра регуляризации  $\alpha = 10^{-8}$ .

Результаты расчета напряженно-деформированного состояния представлены в виде графиков распределения напряжений  $\bar{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} / \mathcal{P}$  по контактной  $\Gamma_1$  (рис. 2) и внутренней  $\Gamma_2$  поверхностям цилиндра (рис. 3). Характер деформации конструкции показан пунктиром на рис.1.

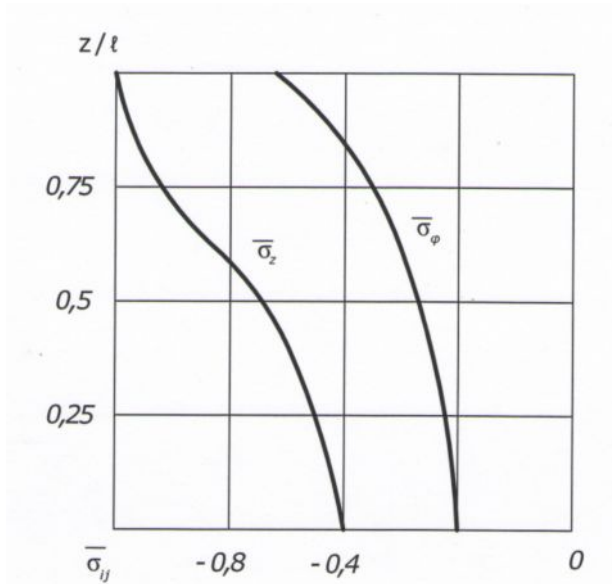


Рис.3

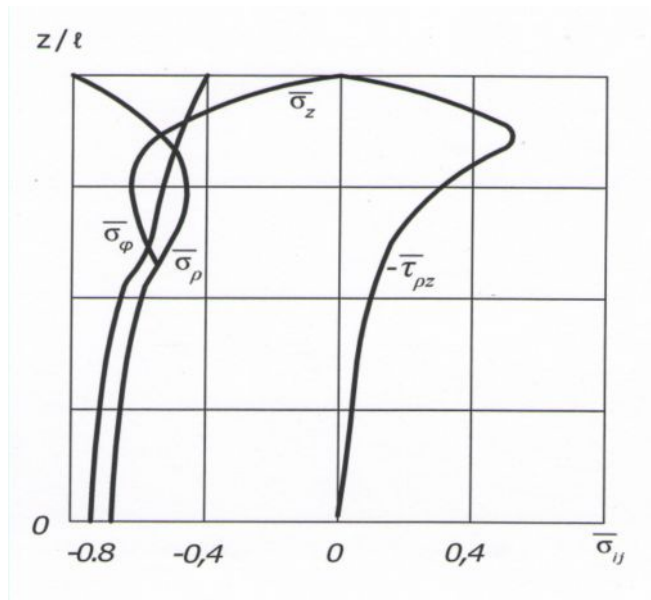


Рис.4

О точности полученного решения можно судить по точности выполнения граничных условий задачи (1), так как уравнения Ляме удовлетворены точно. Максимальное отклонение перемещений  $u_\rho/\mathcal{P}$  и  $u_z/\mathcal{P}$  от заданных нулевых на  $\Gamma_1$  составляет 0,0055 и 0,0142 соответственно. Максимальное отклонение напряжений  $\tau_{\rho z}/\mathcal{P}$  от заданных нулевых на  $\Gamma_2$  и  $\Gamma_3$  составляет 0,0051 и 0,0027. Максимальная погрешность удовлетворения граничного условия по  $\sigma_\rho/\mathcal{P}$  на  $\Gamma_2$  не превышает 0,45%, по  $u_\rho/\mathcal{P}$  на  $\Gamma_3$  не превышает 0,015%. Отсюда следует, что

задача решена с достаточно высокой точностью.

При значении коэффициента Пуассона  $\nu = 0,5$  граничные условия (1) удовлетворились с точностью до шестого знака. Реализован случай всестороннего равномерного сжатия.

Была рассчитана эта же конструкция из несжимаемого материала ( $\nu = 0,5$ ) при свободных от нагрузки торцах цилиндра, т.е. при следующих граничных условиях:

$$u_\rho/\Gamma_1 = u_z/\Gamma_1 = \tau_{\rho z}/\Gamma_2 = \tau_{\rho z}/\Gamma_3 = 0; \quad \sigma_\rho/\Gamma_3 = -\mathcal{P}. \quad (4)$$

Функционал задачи имеет следующий вид:

$$\Phi = \int_{\Gamma_1} (u_\rho^2 + u_z^2) d\Gamma_1 + \int_{\Gamma_2} (\sigma_z^2 + \tau_{\rho z}^2) d\Gamma_2 + \int_{\Gamma_3} [(\sigma_\rho + \rho)^2 + \tau_{\rho z}^2] d\Gamma_3.$$

Порядок системы линейных алгебраических уравнений был равен 47. Оптимальное значение параметра регуляризации  $\alpha = 10^{-7}$ . При этом максимальное отклонение от нуля граничных условий (4) не превышает 0,001. Максимальная погрешность удовлетворения граничного условия по  $\sigma_\rho$  не превышает 0,3%.

Результаты расчета напряженно-деформированного состояния конструкции представлены в виде кривых распределения напряжений  $\overline{\sigma_{ij}} = \sigma_{ij}/\mathcal{P}$  по контактной поверхности  $\Gamma_1$  (рис. 4). Характер деформации конструкции представлен на рис. 1 сплошной линией.

### Литература

1. Т.О. Ормонбеков. Деформирование контейнера в радиационном поле. //Материалы III международной научной конференции «Актуальные проблемы механики и машиностроения», Алматы, 17-19 июня 2009 г. Том I, с. 248-252.