УДК 532.546

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ НЕСТАЦИОНАРНОГО ПРОСТРАНСТВЕННОГО ТЕЧЕНИЯ ПОДЗЕМНЫХ ВОД

МУРЗАКМАТОВ М.У., СУЛТАНБАЕВ Э.А.
кафедра прикладной математики Иссык-Кульского госуниверситета им.К.Тыныстанова г.Каракол, Кыргызская Республика
eldos4@mail.ru

MATHEMATICAL MODEL OF NON-STATIONARY SPATIAL CURRENT OF UNDERGROUND WATERS

MURZAKMATOV M.U., SULTANBAEV E.A.
Kyrgyz Republic, Issyk-Kul states university by K.Tynystanov, faculty of applied mathematics
eldos4@mail.ru

Дана математическая модель пространственного течения подземных вод совместно с грунтовыми водами и разработан алгоритм реализации этой модели.

Для разработки теоретически обоснованных рекомендаций по осуществлению мер, связанных с рациональным и экономичным использованием запасов подземных вод, а также для прогнозирования их режима с учетом естественных и искусственных факторов необходимо изучать движение подземных и грунтовых вод в пространственной постановке.

Рассмотрим строение подземных пластов, состоящих из покровного слоя I и хорошо проницаемого напорного горизонта III, разделенных слабопроницаемой прослойкой II (рис. 1).

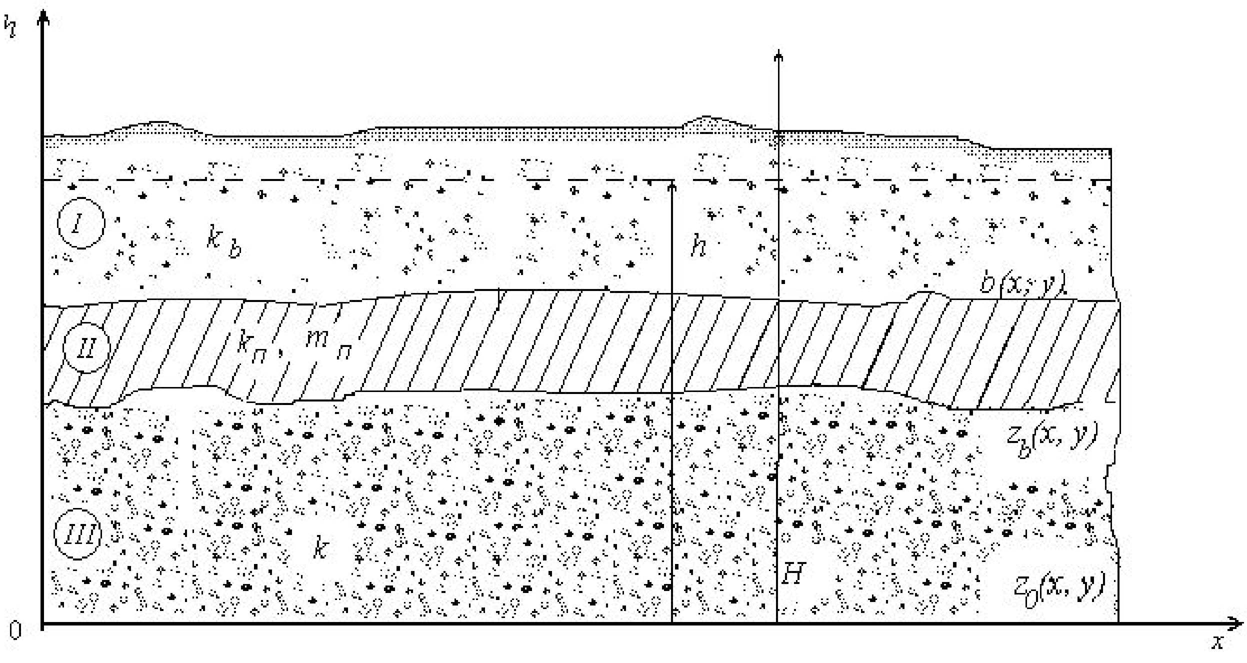

Рис.1. Строение водоносных пластов.

Выделим в этом напорном комплексе подземных вод область фильтрации, представляющую собой прямой цилиндр с основанием D и высотой, равной отметке поверхности земли, отсчитываемой от водоупора $z_0(x, y)$. Часть цилиндра, охватывающую основной водоносный напорный пласт III, обозначим V. Тогда движение подземных вод в выделенной области фильтрации описывается следующими уравнениями [1]:

в покровном слое I уравнением

$$\mu_b \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left[k_b(h-b)\frac{\partial h}{\partial x}\right] - \frac{\partial}{\partial y}\left[k_b(h-b)\frac{\partial h}{\partial y}\right] + k_П \frac{h-H}{m_П} = f_b \qquad (1)$$

с начальным

$$h(x,y,0) = h_0(x,y), \qquad (x,y) \in D \qquad (2)$$

и граничным

$$k_b(h-b)\frac{\partial h}{\partial n} + \beta_b h = \alpha_b, \qquad (x,y) \in S = \partial D, \quad t > 0 \qquad (3)$$

условиями;

в напорном водоносном горизонте III уравнением

$$\mu_{упр} \frac{\partial H}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial H}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial H}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial H}{\partial z}\right) = f \qquad (4)$$

с начальным условием

$$H(x,y,0) = H_0(x,y), \qquad (x,y,z) \in V \qquad (5)$$

и с граничными условиями:

на кровле напорного горизонта

$$k\frac{\partial H}{\partial z} = \frac{k_П}{m_П}(h-H), \qquad z = z_b(x,y), \quad (x,y) \in D, \quad t > 0, \qquad (6)$$

на нижнем основании цилиндра

$$\frac{\partial H}{\partial z} = 0, \qquad z = z_0(x,y), \quad (x,y) \in D, \quad t > 0, \qquad (7)$$

на боковой поверхности области V

$$k\frac{\partial H}{\partial n} + \beta_H H = \alpha_H, \qquad (x,y,z) \in \Sigma = \partial V, \quad t > 0. \qquad (8)$$

Граничные условия (6) − (8) можно написать в общем виде

$$k\frac{\partial H}{\partial n} + \beta H = \alpha, \qquad (x,y,z) \in \Sigma = \partial V, \quad t > 0. \qquad (9)$$

В уравнениях (1) − (8) приняты следующие обозначения:

h(x, y, t) и *H(x, y, t)* – уровни грунтовых вод в покровном слое и напоры в основном водоносном горизонте соответственно;

$k_b(x, y)$, $k_П$ и *k(x, y)* – коэффициенты фильтрации слоев I, II и III соответственно;

$m_П$ – мощность слабопроницаемой прослойки;

μ_b и $\mu_{упр}$ – коэффициенты водоотдачи и упругой водоотдачи покровного и водоносного слоев;

b(x, y) – отметки подошвы покровного слоя;

$f_b(x, y, t)$ и *f(x, y, t)* – функции источников и стоков в слоях I и III соответственно;

$h_0(x, y)$ и $H_0(x, y)$ – начальные уровни грунтовых и напорных вод;

α_b, β_b и α, β – известные функции;

$z_b(x, y)$ и $z_0(x, y)$ – координаты верхнего и нижнего оснований цилиндрического тела *V*;

$\frac{\partial}{\partial n}$ – производная по направлению внешней нормали к границе области;

D – плоская область в плане, $S = \partial D$ – ее граница;

V – цилиндрическое тело, $\Sigma = \partial V$ – поверхность этого тела.

Уравнения (1) и (4) слабо связаны: в уравнении (4) функции *h* нет, она присутствует только в граничном условии (6), а в уравнении (1) функция *H* присутствует. Поэтому эти уравнения решаются не совместно, а с помощью итерационной процедуры.

Займемся решением этих уравнений. Оба уравнения решаются методом конечных элементов [2, 3].

Введем обозначение

$$T = k_b(h-b) \tag{10}$$

и запишем уравнение (1) и граничное условие (3) в виде

$$\mu_b \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial h}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(T\frac{\partial h}{\partial y}\right) + Q_b h = F_b, \tag{11}$$

$$T\frac{\partial h}{\partial n} + \beta_b h = \alpha_b, \tag{12}$$

где

$$Q_b = \frac{k_П}{m_П}, \qquad F_b = f_b + Q_b H .$$

Разбиваем область D на m треугольных элементов и функцию $h(x, y, t)$ в элементе (e) представим в виде линейной комбинации ее значений в вершинах треугольника:

$$h^{(e)}(x, y, t) = h_i(t)N_i(x, y) + h_j(t)N_j(x, y) + h_k(t)N_k(x, y), \tag{13}$$

где i, j, k – вершины элемента (e);

$h_s(t) = h(x_s, y_s, t)$, $N_s(x, y) = a_s + b_s x + c_s y$ – линейные базисные функции; $s = i, j, k$.

Приближенное решение задачи (11), (12) ищем виде

$$h_n(x, y, t) = \sum_{e=1}^{m}\sum_{(e)} h^{(e)}(x, y, t) = \sum_{i=1}^{n} h_i(t)N_i(x, y). \tag{14}$$

Образуем временную сетку с шагом

$$\Delta t_s = t_s - t_{s-1}, \qquad s = 1, 2, \ldots$$

Подставим в задаче (11), (12) вместо $h(x, y, t)$ функцию $h_n(x, y, t)$ из формулы (14). Используя к этой задаче обобщенный принцип Галеркина и проведя интегрирование на отрезке (t_{s-1}, t_s), получаем:

$$\int_{t_{s-1}}^{t_s} dt \iint_D N_j(Lh_n - F_b)d\sigma = -\int_{t_{s-1}}^{t_s} dt \int_S N_j(lh_n - \alpha_b)ds, \qquad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{15}$$

где

$$L = \mu_b \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(T\frac{\partial}{\partial y}\right) + Q_b,$$

$$l = T\frac{\partial}{\partial n} + \beta_b.$$

Распишем формулу (15) подробно. В ее левой части производные по времени и по x и y рассмотрим по отдельности. Имеем:

$$\int_{t_{s-1}}^{t_s} dt \iint_D N_i \mu_b \frac{\partial h_n}{\partial t} d\sigma = \sum_{i=1}^{n} \iint_D \mu_b N_j \int_{t_{s-1}}^{t_s} \frac{\partial}{\partial t}\left[h_i(t)N_i(x, y)\right]dt d\sigma =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \iint_D \mu_b N_j(x, y)N_i(x, y)d\sigma \int_{t_{s-1}}^{t_s} \frac{\partial h_i(t)}{\partial t}dt = \sum_{i=1}^{n} M_{ij}h_i^{(s)} - \sum_{i=1}^{n} M_{ij}h_i^{(s-1)}, \tag{16}$$

где

$$M_{ij} = \iint_D \mu_b N_i(x, y)N_j(x, y)d\sigma,$$

$$h_i^{(s)} = h_i(t_S), \quad h_i^{(s-1)} = h_i(t_{S-1}).$$

К следующим слагаемым применим формулу Грина:

$$-\int_{t_{s-1}}^{t_s} dt \iint_D N_j\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial h_n}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(T\frac{\partial h_n}{\partial y}\right)-Q_b h_n\right]d\sigma = -\sum_{i=1}^{n}\int_{t_{s-1}}^{t_s} h_i(t)dt\iint_D N_j *$$

$$*\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial h_n}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(T\frac{\partial h_n}{\partial y}\right)-Q_b h_n\right]d\sigma = \sum_{i=1}^{n}\left[\gamma h_i^{(s)}+(1-\gamma)h_i^{(s-1)}\right]\Delta t_s *$$

$$*\iint_D\left[T\left(\frac{\partial N_j}{\partial x}\frac{\partial N_i}{\partial x}+\frac{\partial N_j}{\partial y}\frac{\partial N_i}{\partial y}\right)+QN_iN_j\right]d\sigma-\int_{t_{s-1}}^{t_s}dt\int_S N_jT\frac{\partial h_n}{\partial n}ds=$$

$$=\gamma\sum_{i=1}^{n}h_i^{(s)}A_{ij}\Delta t_s+(1-\gamma)\sum_{i=1}^{n}h_i^{(s-1)}A_{ij}\Delta t_s-\int_{t_{s-1}}^{t_s}B_j dt\,. \qquad (17)$$

Здесь

$$A_{ij}=\iint_D T\left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial x}+\frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial y}\right)d\sigma+\iint_D N_iN_jQ_b d\sigma\,,$$

$$B_j=\int_S N_jT\frac{\partial h_n}{\partial n}ds\,.$$

Далее преобразуем правую часть формулы (15):

$$-\int_{t_{s-1}}^{t_s}dt\int_S N_j(lh_n-\alpha_b)ds=-\int_{t_{s-1}}^{t_s}\int_S N_j\left(T\frac{\partial h_n}{\partial n}+\beta_b h_n-\alpha_b\right)dsdt=$$

$$=-B_j+\sum_{i=1}^{n}\int_{t_{s-1}}^{t_s}N_j(N_i\beta_b h_n+\alpha_b)dsdt\,. \qquad (18)$$

Подставляя выражения (16), (17), (18) в формулу (15), получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно $h_i^{(s)}$:

$$\sum_{i=1}^{n}R_{ij}^{(\gamma)}h_i^{(s)}=F_j,\qquad j=1,2,\dots,n\,, \qquad (19)$$

где

$$R_{ij}^{(\gamma)}=M_{ij}+\gamma\left(A_{ij}-B_{ij}\right)\Delta t_s,\qquad 0<\gamma\le 1\,,$$

$$F_j=\int_{t_{s-1}}^{t_s}\iint_D N_jF_b d\sigma dt+\int_{t_{s-1}}^{t_s}\int_S N_j\alpha_b dsdt+\sum_{i=1}^{n}R_{ij}^{(1-\gamma)}h_i^{(s-1)}\,,$$

$$B_{ij}=\int_S N_jN_i\beta_b ds\,.$$

Задача (11), (12) решается простой итерацией. Подставляя полученные значения функции h_n в формулу (10), снова решаем систему (19), находим новое приближение этой функции. Итерационный процесс продолжим до выполнения условия

$$\max_i\left|h_i^{(\nu)}-h_i^{(\nu-1)}\right|\le\varepsilon\,, \qquad (20)$$

где ν – номер итерации; $\varepsilon>0$ – заданное малое число.

Теперь приступим к решению задачи (4) − (8). Подставим полученные значения функции $h_n(x, y, t_s)$ в граничное условие (6) и применяем к задаче (4), (9) вышеописанную процедуру.

В отличие от плоской задачи (11), (12) для пространственной задачи элементами будут тетраэдры с вершинами *i*, *j*, *k*, *l*, а базисами – линейные функции вида

$N_s(x, y, z) = a_s + b_s x + c_s y + d_s z, \qquad s = i, j, k, l.$

В итоге получаем систему уравнений вида (19):

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} H_j^{(s)} = b_j, \qquad j = 1, 2, ..., n, \qquad (21)$$

где

$$a_{ij} = M_{ij} + \left(N_{ij}^{(s)} - \gamma B_{ij}^{(s)}\right)\Delta t_s,$$

$$b_j = \left[\gamma f_j^{(s)} + (1-\gamma) f_j^{(s-1)}\right]\Delta t_s + \sum_{i=1}^{n} \left\{\left[M_{ij} - (1-\gamma) B_{ij}^{(s-1)} \Delta t_s\right] H_i^{(s-1)} + \right.$$
$$\left. + \left[\gamma A_i^{(s)} + (1-\gamma) A_i^{(s-1)}\right]\Delta t_s\right\},$$

$$f_j^{(s)} = \iiint_V N_j(x, y, z) f(x, y, z, t_s) dv,$$

$$M_{ij} = \iiint_V \mu_{упр}(x, y, z) N_i(x, y, z) N_j(x, y, z) dv,$$

$$N_{ij} = \iiint_V k(x, y, z) \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right) dv,$$

$$A_i^{(s)} = \iint_\Sigma N_i(x, y, z) \alpha(x, y, z, t_s) d\sigma,$$

$$B_{ij}^{(s)} = \iint_\Sigma N_i(x, y, z) N_j(x, y, z) \beta(x, y, z, t_s) d\sigma.$$

Системы уравнений (19) и (21) решаются шаг за шагом при значениях s = 1, 2,… На каждом временном слое матрицы систем являются симметричными с диагональным преобладанием, поэтому они решаются без проблем.

Литература

1. *Полубаринова-Кочина П.Я.*Теория движения грунтовых вод. – М.: Наука, 1977. – 664 с.
2. *Сегерлинд Л.* Применение метода конечных элементов. – М.: Мир, 1979. 392 с.
3. *Джаныбеков Ч.Дж., Мурзакматов М.У.* Методы идентификации гидрогеофизических параметров и прогнозирования процессов загрязнения подземных вод. – Бишкек: Илим, 2005. 180 с.