УДК 532.546 + 518.5

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ПОДЗЕМНЫХ ВОД В ДВУХСЛОЙНЫХ ПЛАСТАХ

МАДАНБЕКОВА Э.Э.
кафедра прикладной математики Иссык-Кульского госуниверситета им. К. Тыныстанова,г.Каракол, Кыргызская Республика
eldos4@mail.ru

THE NUMERICAL DECISION OF A PROBLEM OF A NON-STATIONARY FILTRATION OF UNDERGROUND WATERS IN THE TWO-LAYER AQUIFERS

MADANBEKOVA E.E.
Kyrgyz Republic, Issyk-Kul states university by K.Tynystanov, faculty of applied mathematics
eldos4@mail.ru

Разрабатывается алгоритм численного решения задачи нестационарной фильтрации подземных вод в двухслойной пористой среде методом конечных элементов.

В данной статье разработан алгоритм численного решения задач фильтрации подземных вод в двухслойной пористой среде методом конечных элементов (МКЭ). Рассмотрим неустановившееся движение подземных вод в двухслойном пласте, состоящем из основного хорошо проницаемого напорного горизонта, покрытого малопроницаемой покровной толщей и подстилаемого снизу слабопроницаемой прослойкой, через которую происходит связь с нижележащим водоносным горизонтом в жестком режиме. При расчетах фильтрации в слоистых водоносных системах обычно используются общие предпосылки перетекания, в которых предполагается, что движение через раздельные относительно малопроницаемые слои происходит только по вертикали, а в хорошо проницаемых слоях − только по горизонтали.

В общем случае режим фильтрации является неустановившимся, поскольку элементы фильтрационного потока непрерывно изменяются во времени.

Движение грунтовых вод в двухслойной среде описывается следующей системой дифференциальных уравнений [1 − 3]:

$$\begin{cases} \mu_b \dfrac{\partial h}{\partial t} + k_b \dfrac{h-H}{m_b} = f, & (1) \\ \mu_{упр} \dfrac{\partial H}{\partial t} - \dfrac{\partial}{\partial x}\left(T\dfrac{\partial H}{\partial x}\right) - \dfrac{\partial}{\partial y}\left(T\dfrac{\partial H}{\partial y}\right) - k_b \dfrac{h-H}{m_b} + \dfrac{k_n}{m_n}(H-Z) = W, \quad (x,y)\in D, \quad t>0 & (2) \end{cases}$$

с начальными

$$\begin{aligned} &h(x,y,0) = h_0(x,y), \\ &H(x,y,0) = H_0(x,y), \quad (x,y)\in D \end{aligned} \qquad (3)$$

и граничными

$$T\frac{\partial H}{\partial n} + \beta H = \alpha, \quad (x,y)\in S = \partial D, \quad t>0 \qquad (4)$$

условиями.

В формулах (1) – (4) приняты следующие обозначения: $h(x,y,t)$, $H(x,y,t)$, $Z(x,y)$ – отметки уровня грунтовых вод (УГВ) в верхнем слое и напоров в основном и нижележащем напорных пластах соответственно; $T(x,y) = k\, m$ – водопроводимость основного водоносного горизонта; $k_b(x,y)$, $k(x,y)$, $k_n=const$, $m_b(x,y,t)=h(x,y,t)-b(x,y)$, $m(x,y)$, $m_n=const$ – коэффициенты фильтрации и мощности верхнего, основного водоносного слоев и слабопроницаемой прослойки; $\mu_b(x,y)$ и $\mu_{упр}(x,y)$ – коэффициенты водоотдачи и упругоемкости верхнего и первого напорного слоев; $f(x, y,t)$ − функция источников и стоков грунтовых вод; $W(x,y,t)$ − функция, учитывающая работу эксплуатационных скважин, отбирающих воду основного водоносного горизонта ; $b(x,y)$ – поверхность раздела покровного и основного напорного слоев; $h_0(x,y)$ и $H_0(x,y)$ –начальные распределения УГВ и напоров в основном напорном горизонте; $\beta_b(x,y,t), \beta(x,y,t), \alpha_b(x,y,t)$ и $\alpha(x,y,t)$ – заданные функции; D – область фильтрации в плане; $S=\partial D$ − ее граница; $\vec{n} = (cos(n,x), cos(n,y))$ – внешняя нормаль к границе области; $\partial/\partial n$ – производная по этой нормали.

В задаче (1) –(4) перейдем к безразмерным переменным по формулам:

$$x^* = \frac{x}{l}, \quad y^* = \frac{y}{l}, \quad h^* = \frac{h}{H_{хар}}, \quad H^* = \frac{H}{H_{хар}}, \quad Z^* = \frac{Z}{H_{хар}}, \quad T^* = \frac{T}{T_{хар}},$$

$$m_H^* = \frac{m_H}{H_{хар}}, \quad b^* = \frac{b}{H_{хар}}, \quad k_b^* = \frac{l^2}{T_{хар} H_{хар}} k_b, \quad k_H^* = \frac{l^2}{T_{хар} H_{хар}} k_H,$$

$$f^* = \frac{l^2}{T_{хар} H_{хар}} f, \quad W^* = \frac{l^2}{T_{хар} H_{хар}} W, \quad \alpha_b^* = \frac{l}{T_{хар} H_{хар}} \alpha_b, \quad \beta_b^* = \frac{l}{T_{хар}} \beta_b,$$

$$\alpha^* = \frac{l}{T_{хар} H_{хар}} \alpha, \quad \beta^* = \frac{l}{T_{хар}} \beta.$$

Здесь l – диаметр области; $H_{хар}$,$T_{хар}$ – некоторые характерные значения напоров и водопроводимости.

Задачу (1) − (4) решаем численно с помощью метода конечных элементов [4,5]. Для этого область фильтрации D произвольным образом разбиваем на m треугольных элементов и для каждого элемента (треугольника) (e) введем линейные базисные функции

$$N_s^{(e)}(x,y) = a_s + b_s x + c_s y, \qquad s = i, j, k,$$

где i , j , k – номера вершин элемента,

$$a_i = (x_j y_k - x_k y_j)/\Delta_e, \quad b_i = (y_j - y_k)/\Delta_e, \quad c_i = (x_k - x_j)/\Delta_e$$

и т. д. Остальные коэффициенты получаются с помощью круговой подстановки индексов i , j , k ;

$$\Delta_e = \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix}$$ − удвоенная площадь треугольника (e).

Искомые функции $h(x, y, t)$ и $H(x,y,t)$ внутри элемента (e) аппроксимируем функциями [6]

$$h^{(e)}(x,y,t) = h_i(t)N_i^{(e)}(x,y) + h_j(t)N_j^{(e)}(x,y) + h_k(t)N_k^{(e)}(x,y),$$
$$H^{(e)}(x,y,t) = H_i(t)N_i^{(e)}(x,y) + H_j(t)N_j^{(e)}(x,y) + H_k(t)N_k^{(e)}(x,y). \qquad (5)$$

Здесь $h_s(t) = h(x_s, y_s, t), \quad H_s(t) = H_s(x_s, y_s, t), \quad s = i, j, k.$

Суммируя равенства (5) по всем элементам, получаем аппроксимации искомых функций по всей области D:

$$h_n(x,y,t) = \sum_{e=1}^{m} h^{(e)}(x,y,t) = \sum_{j=1}^{n} h_j(t) N_j(x,y), \qquad (6)$$

$$H_n(x,y,t) = \sum_{e=1}^{m} H^{(e)}(x,y,t) = \sum_{j=1}^{n} H_j(t) N_j(x,y). \qquad (7)$$

Образуем временную сетку с шагом $\Delta t_s = t_s - t_{s-1}, \quad s = 1,2,\ldots$ и перепишем уравнения (2) и (4) в виде

$$L_H H = F_H, \qquad l_H H = \alpha, \qquad (8)$$

где

$$L_H = \mu_{упр}\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(T\frac{\partial}{\partial y}\right) + Q,$$
$$l_H = T\frac{\partial}{\partial n} + \beta, \qquad Q_b = \frac{k_b}{m_b}, \qquad (9)$$
$$Q = Q_b + \frac{k_n}{m_n}, \quad F_{\text{Н}} = W(x,y,t) + Q_b h(x,y,t) + \frac{k_n}{m_n} Z(x,y).$$

В уравнении (8) вместо функций $H(x, y, t)$ подставим функции $H_n(x, y, t)$ из формулы (7). Применяя к уравнению (8) обобщенный принцип Галеркина и интегрируя полученные равенства на отрезке $[t_{s-1}, t_s]$, имеем:

$$\int_{t_{s-1}}^{t_s}\iint_D N_i(L_H H_n - F_H)\,d\sigma\,dt = -\int_{t_{s-1}}^{t_s}\int_S N_i(l_H H_n - \alpha)\,ds\,dt = 0, \qquad (10)$$
$$i = 1,2,\ldots,n.$$

Первое слагаемое в левой части равенства (10) преобразуем следующим образом:

$$\int_{t_{s-1}}^{t_s}\iint_D N_i \mu_{упр}\frac{\partial H_n}{\partial t}\,d\sigma\,dt = \sum_{j=1}^{n}\iint_D \mu_{упр} N_i \int_{t_{s-1}}^{t_s}\frac{\partial}{\partial t}\left[H_j(t)N_j\right]dt\,d\sigma = \sum_{j=1}^{n}\int_{t_{s-1}}^{t_s}\frac{\partial}{\partial t}H_j(t)\,dt\iint_D N_i N_j \mu_{упр}\,d\sigma =$$
$$= \sum_{j=1}^{n} M_{ij}^{(H)} H_j^{(s)} - \sum_{j=1}^{n} M_{ij}^{(H)} H_j^{(s-1)}, \qquad (11)$$

где

$$M_{ij}^{(H)} = \iint_D N_i(x,y) N_j(x,y) \mu_{упр}(x,y)\,d\sigma,$$
$$H_j^{(s)} = H(x_j, y_j, t_s), \qquad i = 1,2,\ldots,n.$$

К следующему слагаемому двойного интеграла применяем первую формулу Грина.

Имеем:

$$
\begin{aligned}
&-\int_{t_{s-1}}^{t_s}\iint_D N_i\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial H_n}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(T\frac{\partial H_n}{\partial y}\right)\right]d\sigma\, dt = \\
&=-\int_{t_{s-1}}^{t_s}\left\{\int_s N_i T\frac{\partial H_n}{\partial n}ds-\iint_D T\left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial H_n}{\partial x}+\frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial H_n}{\partial y}\right)d\sigma\right\}dt = \\
&=-\int_{t_{s-1}}^{t_s}\left\{\int_s N_i T\frac{\partial H_n}{\partial n}ds-\sum_{j=1}^{n}H_i(t)\iint_D T\left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial x}+\frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial y}\right)ds\right\}dt = \\
&=-\int_{t_{s-1}}^{t_s}\int_s N_i T\frac{\partial H_n}{\partial n}dsdt+\Delta t_s\sum_{j=1}^{n}T_{ij}(H)\left(\gamma H_j^{(s)}+(1-\gamma)H_j^{(s-1)}\right).
\end{aligned}
\tag{12}
$$

В формуле (12):

$$T_{ij}^{(H)}=\iint_D T(x,y)\left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial x}+\frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial y}\right)d\sigma$$

$\gamma -$ числовой параметр ($0<\gamma\le 1$).

Остальные слагаемые в левой части равенства (10) примут вид:

$$\int_{t_{s-1}}^{t_i}\iint_D N_i(QH_n-F_H)d\sigma\, dt=\Delta t_s\sum_{j=1}^{n}\left(\gamma H_j^{(s)}+(1-\gamma)H_j^{(s-1)}\right)Q_{ij}^{(H)}-\Delta t_s F_i^{(H)}, \tag{13}$$

где

$$Q_{ij}^{(H)}=\iint_D N_i(x,y)N_j(x,y)Q(x,y)d\sigma,$$

$$F_i^{(H)}=\iint_D N_i(x,y)\left[\gamma F_H^{(s)}+(1-\gamma)F_H^{(s-1)}\right]d\sigma .$$

Правая часть равенства (11) запишется как

$$\int_{t_{s-1}}^{t_s}\int_S N_i(l_H H_n-\alpha)dsdt=\int_{t_{s-1}}^{t_s}\int_S N_i T\frac{\partial H_n}{\partial n}dsdt+\Delta t_s\sum_{j=1}^{n}\left(\gamma H_j^{(s)}+(1-\gamma)H_j^{(s-1)}\right)B_{ij}^{(H)}-\Delta t_s A_i^{(H)}. \tag{14}$$

Здесь

$$B_{ij}^{(H)}=\int_S N_i(x,y)N_j(x,y)\left(\gamma\beta^{(s)}+(1-\gamma)\beta_b^{(1-s)}\right)ds,$$

$$A_i^{(H)}=\int_S N_i(x,y)\left(\gamma\alpha^{(s)}+(1-\gamma)\alpha^{(1-s)}\right)ds.$$

Подставляя формулы (11), (12), (13), (14) в равенство (10), получаем систему уравнений

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^{(H)}H_j^{(s)}=b_i^{(H)},\qquad i=1,2,\ldots,n;\quad s=1,2,\ldots, \tag{15}$$

где

$$a_{ij}^{(H)}=\frac{1}{\Delta t_s}M_{ij}^{(H)}+\gamma\left(T_{ij}^{(H)}+Q_{ij}^{(H)}+B_{ij}^{(H)}\right),$$

$$b_i^{(H)} = \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{1}{\Delta t_s} M_{ij}^{(H)} - (1-\gamma)\left(T_{ij}^{(H)} + Q_{ij}^{(H)} + B_{ij}^{(H)}\right) \right] H_j^{(s-1)} + F_i^{(H)} + A_i^{(H)}.$$

В уравнении (1) находим

$$\frac{\mu_b}{\Delta t}(h - \hat{h}) + Q_b(h - H) = f,$$

$$\left(\frac{\mu_b}{\Delta t} + Q_b\right)h = \frac{\mu_b}{\Delta t}\hat{h} + Q_b H + f,$$

$$h = \frac{\frac{\mu_b}{\Delta t}\hat{h} + Q_b H + f}{\frac{\mu_b}{\Delta t} + Q_b}. \qquad (16)$$

Здесь $\hat{h}$ – известное значение h, найденное в предыдущем временном слое. Подставляем в уравнение (2) вместо функции $h(x,y,t)$ полученное выражение (16) и решаем систему (15).

Система (15) хорошо обусловленная с диагональным преобладанием. Она решается последовательно с применением итераций. Используя начальные условия (3) в качестве нулевого приближения, решаем (16) и получаем первое приближение $h^{(1)}(x,y,t_s)$. Используя полученные значения h_i, решаем систему (15), находим следующее приближение $H^{(\nu)}$ и т.д. Процедура продолжается до выполнения условия вида

$$\max_i \left| h_i^{(\nu)} - h_i^{(\nu-1)} \right| < \varepsilon,$$

где ν − номер итерации, $\varepsilon > 0$ − заданное малое число.

Литература

1. *Полубаринова-Кочина П.Я., Пряжинская В.Г., Эмих В.Н.* Математические методы в вопросах орошения. –М.: Наука, 1969. 414 с.
2. *Абуталиев Ф.Б., Абуталиев Э.Б.* Методы решения задач подземной гидромеханики на ЭВМ.−Ташкент: ФАН, 1968. 143 с.
3. *Джаныбеков Ч.Дж.* Математическое моделирование движения грунтовых вод в многослойных средах.− Фрунзе: Илим, 1982. 288с.
4. *Джаныбеков Ч.Дж.* Моделирование гидрогеодинамических процессов с применением ЭВМ.− Фрунзе: Илим, 1989. 184с.
5. *Сегерлинд Л.* Применение метода конечных элементов.− М.:Мир, 1979. 392 с.
6. *Мурзакматов М.У., Маданбекова Э.Э.* Применение метода конечных элементов к решению задач установившейся фильтрации в многослойных задачах //Вестник ЫГУ. №15. 2005. С.73 − 77.