МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ПЛОСКИХ ДВУХМЕРНЫХ ВОЛН СИЛЬНЫХ РАЗРЫВОВ

КЫБЫРАЕВ А.О.
Ошский государственный университет
akybyraev@rambler.ru

Аннотация
В работе рассматриваются вопросы распространения плоских волн сильных разрывов в двухмерной нелинейно-упругой среде. Приводятся математические модели и конструкции для исследования волн сильных разрывов для различных видов диаграмм « сжатия-сдвига» при наличии нескольких точек перегибов.

Уравнения плоского движения сплошной среды при малых деформациях (без учета массовых сил) имеют вид:

$$\rho\frac{\partial^2 \mathrm{u}_1}{\partial t^2}=\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial y}, \qquad \rho\frac{\partial^2 \mathrm{u}_1}{\partial \mathrm{t}^2}=\frac{\partial\sigma_{21}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial y}. \tag{1}$$

Здесь x, y, t –лагранжевы переменные; $u_i=u_i(x, y,t)$ и $\sigma_{ij}=\sigma_{ij}(x,y,t)$ − компоненты вектора перемещения и тензора напряжения (i,j=1,2); ρ − плотность среды в ее естественном состоянии.

Связь между компонентами тензора напряжений и компонентами тензора малой деформациийи примем в форме (деформационная теория Ильюшина-Генки):

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{11}&=\lambda\left(\frac{\partial \mathrm{u}_1}{\partial \mathrm{x}}+\frac{\partial u_2}{\partial y}\right)+2G\frac{\partial u_1}{\partial x}\\ \sigma_{22}&=\lambda\left(\frac{\partial \mathrm{u}_1}{\partial \mathrm{x}}+\frac{\partial u_2}{\partial y}\right)+2G\frac{\partial u_2}{\partial x}\\ \sigma_{12}&=\sigma_{21}=G\left(\frac{\partial \mathrm{u}_1}{\partial y}+\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)\end{aligned}\right\}, \tag{2}$$

где $\lambda=k-\frac{2}{3}G;$ k и G – обобщенные модули всестороннего сжатия (расширения) и сдвига соответственно.

В дальнейшем предполагается, что среднее гидростатическое давление σ является заданной функцией относительного объемного сжатия (расширения)

$$\theta=\frac{\partial \mathrm{u}_1}{\partial \mathrm{x}}+\frac{\partial u_2}{\partial y},$$

а интенсивность касательных напряжений

$$\tau=\frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2+(\sigma_{22}-\sigma_{33})^2+(\sigma_{33}-\sigma_{11})^2+\sigma\sigma_{12}^2}$$

− заданной функцией интенсивности деформаций сдвига

$$\gamma=\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{(\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22})^2+\varepsilon^2{}_{11}+\varepsilon_{22}^2+\frac{3}{2}\varepsilon_{12}^2}$$

причем

$$\sigma=k(\theta)\theta, \quad \tau=G(\gamma)\gamma. \tag{3}$$

Примем за основные искомые функции компоненты вектора скорости

$$u=\frac{\partial u_1}{\partial t}, \qquad \upsilon=\frac{\partial u_2}{\partial t},$$

относительное объемное сжатие (расширение) θ и компоненту ротора вектора перемещения

$$\omega = \frac{\partial u_1}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial x}.$$

Перейдя к подвижной системе координат с помощью преобразования $\xi = x + V_0 t$, $\eta = Y$, $t = t'$, движущейся со сверхзвуковой скоростью V_0 ($V_0 > a_0$, a_0 − скорость распространения продольных волн) в противоположном направлении оси x и считая движение в новой системе координат установившимся, систему уравнений (1) на основании соотношений (2) и выше принятых предположений можно привести к следующему виду [2]:

$$\left.\begin{aligned} a_1\frac{\partial u}{\partial \xi} + a_2\frac{\partial u}{\partial \eta} + a_3\frac{\partial \upsilon}{\partial \xi} + a_4\frac{\partial \upsilon}{\partial \eta} = A_1\frac{\partial \theta}{\partial \xi} + A_2\frac{\partial \theta}{\partial \eta} + A_4\frac{\partial \omega}{\partial \eta} \\ b_2\frac{\partial u}{\partial \eta} + b_3\frac{\partial \upsilon}{\partial \xi} + b_4\frac{\partial \upsilon}{\partial \eta} = B_1\frac{\partial \theta}{\partial \xi} + B_2\frac{\partial \theta}{\partial \eta} + B_3\frac{\partial \omega}{\partial \xi} + B_4\frac{\partial \omega}{\partial \eta} \end{aligned}\right\}, \tag{4}$$

где коэффициенты при частных производных − известные функции от искомых величин и от лагранжевых скоростей, введенные в работах [1,2], которые характеризуют скорости распространения упругопластических волн расширения (сжатия) и поперечных волн сдвига-поворота:

$$a(\theta) = \sqrt{\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\theta}}, \qquad b(\gamma) = \sqrt{\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}\lambda}} \qquad c(\gamma) = \sqrt{\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\tau}{\gamma}}. \tag{5}$$

Для замыкания динамических уравнений движения (4) используем кинематические уравнения:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \xi} + \frac{\partial \upsilon}{\partial \eta} = V_0\frac{\partial \theta}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{\partial \upsilon}{\partial \xi} = V_0\frac{\partial \omega}{\partial \xi} \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Анализ коэффициентов показывает, что решение системы (4) и (6) существенным образом зависит от вида зависимостей σ = σ(θ) и τ = τ(γ). Именно зависимость τ = τ(γ) вносит значительные упрощения при построении решений. В общем случае указанных зависимостей решения строятся численно при заданных краевых условиях конкретной задачи. Из анализа коэффициентов следует, что именно условие b = c,

т.е. когда

$$\sqrt{\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}\lambda}} = \sqrt{\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\tau}{\gamma}}, \tag{7}$$

сильно упрощает задачу интегрирования системы (4) и (6).

При выполнении условия (7) система уравнений (4) и (6) примет вид:

$$\left.\begin{aligned} zu' - za_0^2(\theta)\theta' + b^2\omega' = 0, \\ z\upsilon' + a_0^2(\theta)\theta' + b^2 z\omega' = 0, \\ zu' - \upsilon' - z\theta' = 0, \quad u' + z\upsilon' + z\omega' = 0, \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

а характеристическим уравнением ее будет

$$k_0 z^4 + k_2 z^2 + k_4 = 0, \tag{9}$$

где

$k_0 = (1 - a_0^2(\theta))(1-b^2)$, $k_2 = a_0^2(\theta)(b^2-1)+b^2(a_0^2(\theta)-1)$, $k_4 = a_0^2(\theta)b^2$,

$$a_0(\theta) = \sqrt{a^2(\theta) + \frac{4}{3}b^2}, \quad b = \sqrt{\frac{G_0}{\rho}} = const.$$

Характеристическое уравнение (9) имеет четыре различных действительных корня:

$$\left.\begin{aligned} z_{1,2} &= \pm\frac{a_0(\theta)}{\sqrt{1-a_0^2(\theta)}}, \\ z_{3,4} &= \pm\frac{b}{\sqrt{1-b^2}} \end{aligned}\right\}. \tag{10}$$

Согласно условиям, на характеристиках имеем два типа решений:

1) при

$$z = \pm\frac{a_0(\theta)}{\sqrt{1-a_0^2(\theta)}}, \quad u - \varphi(\theta) = const$$

$$\upsilon \pm \psi(\theta) = const, \ \omega = const \tag{11}$$

– две продольные простые центрированные волны расширения (сжатия), распространяющиеся в противоположных направлениях со скоростью

$$a_0(\theta) = \pm\sqrt{a^2(\theta) + \frac{4}{3}b^2};$$

2) при

$$z = \pm\frac{b}{\sqrt{1-b^2}}, \quad \pm\frac{b}{\sqrt{1-b^2}}u - \upsilon = const$$

$$\upsilon + b^2\omega = const, \ \theta = const \tag{12}$$

– две поперечные волны сдвига-поворота, распространяющиеся тоже в противоположных направлениях со скоростью $b = \pm(1/V_0)\sqrt{G_0/\rho}$, которые являются волнами сильного разрыва. Здесь φ и ψ функции вида

$$\varphi(\theta) = \int_0^\theta a_0^2(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon, \quad \psi(\theta) = \int_0^\theta a_0(\varepsilon)\sqrt{1-a_0^2(\varepsilon)}d\varepsilon. \tag{13}$$

При переходе через каждый фронт волны сильного разрыва инварианты Римана, указанные в (12) – (13), сохраняют свои значения. Постоянные интегрирования определяются из краевых условий конкретной задачи, а также из условий кинематической и динамической совместности на разрывах.

Динамические уравнения плоского движения (нелинейно-упругой) сплошной среды (1) при выполнении условия (7) (b=c) можно также привести к следующему виду:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= a_0^2(\theta)\frac{\partial\theta}{\partial x} + b^2\frac{\partial\omega}{\partial y}, \\ \frac{\partial\upsilon}{\partial t} &= a_0^2(\theta)\frac{\partial u}{\partial y} - b^2\frac{\partial\omega}{\partial x}, \end{aligned} \tag{14}$$

$$a_0(\theta)=\sqrt{\frac{1}{\rho}\cdot\frac{d\sigma}{d\theta}+\frac{4}{3}\cdot\frac{G_0}{\rho}},\quad b=\sqrt{\frac{G_0}{\rho}}=const$$ где

− те же лагранжевы скорости, как и выше, распространения продольных и поперечных волн.

Замыкая динамические уравнения (14) кинематическими:

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial\upsilon}{\partial y},\ \frac{\partial\omega}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial\upsilon}{\partial x},\qquad (15)$$

получаем систему дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка (14)-(15) для определения искомых величин u,υ,θ,ω.

Предположим, что все эти величины являются функциями только $\varphi(x,y,t)= Y/(x+v_0t)$ (фаза волны). Здесь υ_0 − скорость, превышающая скорости продольных волн ($v_0>a_0$). Частные производные по x,y и t будем вычислять по формуле

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}&=-\frac{v_0}{y}\cdot\varphi^2\frac{d}{d\varphi}\\ \frac{\partial}{\partial x}&=-\frac{\varphi^2}{y}\cdot\frac{d}{d\varphi}\\ \frac{\partial}{\partial y}&=-\frac{\varphi^2}{y}\cdot\frac{d}{d\varphi}\end{aligned}\right\}.\qquad (16)$$

Воспользуясь формулами (16), систему уравнений (14) − (15) приводим к следующему виду:

$$\left.\begin{aligned}-\frac{v_0}{y}\varphi^2u'&=-a_0^2(\theta)\frac{\varphi^2}{y}\theta'+b^2\frac{\varphi}{y}\omega'\\ -\frac{v_0}{y}\varphi^2\upsilon'&=-a_0^2(\theta)\frac{\varphi}{y}\theta'+b^2\frac{\varphi^2}{y}\omega'\\ -\frac{v_0}{y}\varphi^2\theta'&=-\frac{\varphi^2}{y}u'+\frac{\varphi}{y}\upsilon'\\ -\frac{v_0}{y}\varphi^2\omega'&=\frac{\varphi}{y}u'+\frac{\varphi^2}{y}\upsilon'\end{aligned}\right\},\qquad (17)$$

где штрихи обозначают производные по φ.

Разделив обе части уравнений (17) на $v_0^2\varphi/y$ и вводя безразмерные величины

$$\hat{u}=\frac{u}{v_0},\ \hat{\upsilon}=\frac{\upsilon}{v_0},\ \hat{\theta}=\theta,\ \hat{\omega}=\omega$$

и соответственно безразмерные лагранжевы скорости распространения продольных и поперечных волн

$$\hat{a}_0=\frac{a_0}{v_0},\ \hat{b}=\frac{b}{v_0},$$

получаем

$$\left.\begin{aligned}&\varphi u' - \varphi a^2_0(\theta)\theta'+b^2\omega' =0,\\ &\varphi v'+a^2_0(\theta)\theta' + \varphi b^2\omega' =0,\\ &\varphi u'- \varphi\theta'- v' = 0,\end{aligned}\right\}\qquad (18)$$

$$u'+\varphi v' +\varphi\omega' = 0$$

где знаки «^» над безразмерными величинами опущены.

Система уравнений (18) и (8) идентичны. Решения (11) и (12) позволяют получить :

при
$$\varphi = \pm\sqrt{\frac{a_0(\theta)}{1-a_0^{\ 2}(\theta)}} = \pm tg\alpha(\theta)$$

$$[u] = [\varphi(\theta)] ,\quad [v] = +- [\psi(\theta)] ,\quad [\omega]=0, \qquad (19)$$

$$\varphi = \pm\frac{b}{\sqrt{1-b^2}} = \pm \mathrm{tg}\beta,$$

и при

$$\pm\ \mathrm{tg}\beta[u] = [v] ,\quad [v] = - \sin^2\beta[\omega],\ [\theta] = 0 . \qquad (20)$$

Здесь [..] – скачки заключенных в них величин.

Применяя условия на скачках (19) и (20), можно решить целый класс задач в двумерной постановке.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Анциферов В.С., Рахматулин Х.А.* Распространение сжимающе-сдвигающих возмущений в нелинейно-упругой среде. ПММ. 1964. Т. 28. Вып.3. С.572 − 578.

2. *Павленко А.Л., Кыбыраев А.О.* К теории двухмерных установившихся упругопластических волн //Вестн. Моск.ун-та.Сер.1. Матем. 1989. № 1. С.50 − 54.