УДК 517.946.9

ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА БЕГУЩИХ РЕШЕНИЙ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

КУТУНАЕВ Ж.Н.
Ошский технологический университет им.акад. М.М.Адышева
izvestiya@ktu.aknet.kg

Рассматривается более общее уравнение гиперболического типа, частные случаи которого встречаются в литературе, а также приведено численное моделирование решений гиперболического уравнения.

Введение. Развивается метод обобщенных функций для решения краевых задач для одного класса стационарных бегущих решений волнового уравнения в N-мерных цилиндрических областях. В системах математического моделирования и автоматического управления исследование колебательных процессов занимает особое положение.

Задачи математического моделирования процессов такого типа включают в себя построение явного вида решений модели. В данной работе найдено уравнение колебаний, для которого общее решение типа бегущей волны в явном виде.

Постановка задачи. Найти решение модели:

$$u_{tt}=u_{xx}+(\beta_1-\beta_2)u_x+(\beta_1+\beta_2)u_t-\beta_1\beta_2u,\quad 0<x<l,\quad 0<t<+\infty, \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned} a_1\left(u_{tt}-(\beta_1+\beta_2)u_t\right)+a_2u_x+a_3u=0,\quad x=0,\\ b_1\left(u_{tt}-(\beta_1+\beta_2)u_t\right)+b_2u_x+b_3u=0,\quad x=l,\end{aligned}\right\}\quad 0<t<+\infty, \tag{2}$$

$$u(x,0)=0,\quad u_t(x,0)=f(x),\quad 0<x<l, \tag{3}$$

где $\beta_1,\beta_2,a_i,b_i(i=\overline{1,3})$ – постоянные числа, $f(x)$ –заданная функция.

Можно доказать, что общее решение уравнения (1) имеет вид:

$$u(x,t)=e^{\beta_1t}\varphi(x+t)+e^{\beta_2t}\psi(x-t),$$

где φ,ψ – произвольные функции своих аргументов, начальное условие $u(x,0)=0$ позволяет искать частное решение уравнения (1) в виде:

$$u(x,t)=e^{\beta_1t}\varphi(x+t)-e^{\beta_2t}\psi(x-t)\,. \tag{4}$$

Подставляя функцию (4) в (2), получим:

$$\left.\begin{aligned} &a_1\varphi''(t)+\left(a_1(\beta_1-\beta_2)+a_2\right)\varphi'(t)+(a_3-a_1\beta_1\beta_2)\varphi(t)-\\ &-e^{(\beta_2-\beta_1)t}\left\{a_1\varphi''(-t)+\left(a_1(\beta_1-\beta_2)+a_2\right)\varphi'(-t)+(a_3-a_1\beta_1\beta_2)\varphi(-t)\right\}=0,\\ &b_1\varphi''(l+t)+\left(b_1(\beta_1-\beta_2)+b_2\right)\varphi'(l+t)+(b_3-b_1\beta_1\beta_2)\varphi(l+t)-\\ &-e^{(\beta_2-\beta_1)t}\left\{b_1\varphi''(l-t)+\left(b_1(\beta_1-\beta_2)+b_2\right)\varphi'(l-t)+(b_3-b_1\beta_1\beta_2)\varphi(l-t)\right\}=0.\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Функцию $\varphi(z)$, удовлетворяющую функционально-дифференциальным уравнениям (5), будем искать в виде:

$$\varphi(z)=e^{mz}+ke^{nz}\,\textbf{.} \tag{6}$$

Подставляя (6) в (5) и положив $m+n=\beta_2-\beta_1$, получим относительно m,n,k [3]:

$$\left.\begin{aligned} &m+n=\beta_2-\beta_1,\\ &a_1m^2+\left(a_1(b_2-b_1)+a_2\right)m+(a_3-a_1\beta_1\beta_2)=\\ &=k\left\{a_1n^2+\left(a_1(\beta_1-\beta_2)+a_2\right)n+(a_3-a_1\beta_2\beta_1)\right\},\\ &e^{(m-n)l}\left\{b_1m^2+\left(b_1(\beta_1-\beta_2)+b_2\right)n+(b_3-b_1\beta_1\beta_2)\right\}=\\ &=k\left\{b_1n^2+\left(b_1(\beta_1-\beta_2)+b_2\right)n+(b_3-b_1\beta_1\beta_2)\right\},\end{aligned}\right\}$$

или

$$\left.\begin{aligned}
&m+n=\beta_2-\beta_1,\\
&k=\frac{a_1m^2+\left(a_1(\beta_1-\beta_2)+a_2\right)m+(a_3-a_1\beta_1\beta_2)}{a_1n^2+\left(a_1(\beta_1-\beta_2)+a_2\right)n+(a_3-a_1\beta_1\beta_2)},\\
&e^{(m-n)l}=\frac{a_1m^2+\left(a_1(\beta_1-\beta_2)+a_2\right)m+(a_3-a_1\beta_1\beta_2)}{a_1n^2+\left(a_1(\beta_1-\beta_2)+a_2\right)n+(a_3-a_1\beta_1\beta_2)}\times\\
&\times\frac{b_1n^2+\left(b_1(\beta_1-\beta_2)+b_2\right)n+(b_3-b_1\beta_1\beta_2)}{b_1m^2+\left(b_1(\beta_1-\beta_2)+b_2\right)m+(b_3-b_1\beta_1\beta_2)}.
\end{aligned}\right\}. \tag{7}$$

Итак решение задачи (1)-(2) сводится к решению системы трансцендентных уравнений (7). Для решения задачи (1)-(3) нам необходимо иметь бесконечное количество частных решений задачи (1)-(2).С этой целью решение системы (7) будем искать во множестве комплексных чисел [3].

Положим в (7):

$$m=\frac{1}{2}(\beta_2-\beta_1)+\frac{\lambda i}{2},\quad n=\frac{1}{2}(\beta_2-\beta_1)-\frac{\lambda i}{2},$$

где λ – вещественное число. Тогда, после некоторых простых вычислений, получаем:

$$\left.\begin{aligned}
&m+n=\beta_2-\beta_1,\\
&k=\frac{p_\lambda+a_3\lambda i}{p_\lambda-a_2\lambda i},\\
&e^{i\lambda l}=\frac{(q_\lambda-\lambda b_2 i)(p_\lambda+\lambda a_2 i)}{(q_\lambda+\lambda b_2 i)(p_\lambda-\lambda a_2 i)},
\end{aligned}\right\}$$

или

$$\left.\begin{aligned}
&m+n=\beta_2-\beta_1,\\
&k=e^{i\theta_\lambda},\\
&\cos\lambda l+i\sin\lambda l=\frac{\left(p_\lambda q_\lambda+\lambda^2a_2b_2\right)^2-\lambda^2\left(a_2q_\lambda-b_2p_\lambda\right)^2}{\left(p_\lambda q_\lambda+\lambda^2a_2b_2\right)^2+\lambda^2\left(a_2q_\lambda-b_2p_\lambda\right)^2}+\\
&+2i\lambda\frac{\left(p_\lambda q_\lambda+\lambda^2a_2b_2\right)\left(a_2q_\lambda-b_2p_\lambda\right)}{\left(p_\lambda q_\lambda+\lambda^2a_2b_2\right)^2+\lambda^2\left(a_2q_\lambda-b_2p_\lambda\right)^2},
\end{aligned}\right\},$$

где θ_λ определяется из системы уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
&\cos\theta_\lambda=\frac{p_\lambda^2-\lambda^2a_2^2}{p_\lambda^2+\lambda^2a_2^2},\\
&\sin\theta_\lambda=\frac{2\lambda a_2p_\lambda}{p_\lambda^2+\lambda^2a_2^2}.
\end{aligned}\right\},$$

а p_λ и q_λ определяется по формулами:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}p_\lambda=-\frac{a_1}{4}\left(\lambda^2+(\beta_1+\beta_2)^2\right)+\frac{\beta_2-\beta_1}{2}a_2+a_3,\\
&\frac{1}{2}q_\lambda=-\frac{b_1}{4}\left(\lambda^2+(\beta_1+\beta_2)^2\right)+\frac{\beta_2-\beta_1}{2}b_2+b_3.
\end{aligned}$$

Два комплексных чисел равны, когда равны их действительные части и коэффициенты мнимых частей, так что:

$$\cos\lambda l=\frac{\left(p_\lambda q_\lambda+\lambda^2a_2b_2\right)^2-\lambda^2\left(a_2q_\lambda-b_2p_\lambda\right)^2}{\left(p_\lambda q_\lambda+\lambda^2a_2b_2\right)^2+\lambda^2\left(a_2q_\lambda-b_2p_\lambda\right)^2},$$

$$\sin\lambda l = \frac{\left(p_\lambda q_\lambda + \lambda^2 a_2 b_2\right)\left(a_2 q_\lambda - b_2 p_\lambda\right)}{\left(p_\lambda q_\lambda + \lambda^2 a_2 b_2\right)^2 + \lambda^2\left(a_2 q_\lambda - b_2 p_\lambda\right)^2}$$

и, следовательно,

$$tg\lambda l = 2\lambda\frac{\left(p_\lambda q_\lambda + \lambda^2 a_2 b_2\right)\left(a_2 q_\lambda - b_2 p_\lambda\right)}{\left(p_\lambda q_\lambda + \lambda^2 a_2 b_2\right)^2 - \lambda^2\left(a_2 q_\lambda - b_2 p_\lambda\right)^2}. \tag{8}$$

Трансцендентные уравнения (8) имеют бесконечное множество решений. Так как λ в формулах p_λ и q_λ содержится только в четной степени, то в левой и правой частях равенства (8) стоят нечетые функции от λ. Поэтому если λ_s – корень уравнения (8), то $(-\lambda_s)$ также является корнем этого же уравнения. Обозначим положительные корни (8) через:

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s, \dots .$$

Этим корням соответствуют функции $\varphi_{\lambda_s}(z)$, которые определяются по формуле (6):

$$\varphi_{\lambda_s}(z) = e^{m_{\lambda_s} z} + k_{\lambda_s} e^{n_{\lambda_s} z} = e^{\frac{1}{2}(\beta_2-\beta_1)z}\left(e^{\frac{1}{2}\lambda_s z} + e^{\left(\theta_{\lambda_s} - \frac{\lambda_s}{2}t\right)i}\right) =$$

$$= e^{\frac{1}{2}(\beta_2-\beta_1)z}\left\{\cos\left(\frac{1}{2}\lambda_s z\right) + \cos\left(\theta_{\lambda_s} - \frac{1}{2}\lambda_s z\right) + i\left(\sin\left(\frac{1}{2}\lambda_s z\right) + \sin\left(\theta_{\lambda_s} - \frac{1}{2}\lambda_s z\right)\right)\right\} =$$

$$= 2e^{\frac{i}{2}\theta_{\lambda_s}} e^{\frac{i}{2}(\beta_2-\beta_1)z}\cos\left(\frac{1}{2}(\lambda_s z - \theta_{\lambda_s})\right),$$

где $e^{\frac{i}{2}\theta_{\lambda_s}}$ – выражение, не зависящее от z. Согласно (8), построим теперь частное решение $u_{\lambda_s}(x,t)$ задачи (1)-(2):

$$u_{\lambda_s}(x,t) = e^{\beta_1 t}\varphi_{\lambda_s}(x+t) - e^{\beta_2 t}\psi_{\lambda_s}(x-t) =$$

$$= e^{\beta_1 t}e^{\frac{1}{2}(\beta_2-\beta_1)(x+t)}\cos\left(\frac{1}{2}\left(\lambda_s(x+t) - \theta_{\lambda_s}\right)\right) - e^{\beta_2 t}e^{\frac{1}{2}(\beta_2-\beta_1)(x-t)}\cos\left(\frac{1}{2}\left(\lambda_s(x-t) - \theta_{\lambda_s}\right)\right) =$$

$$= -2e^{\frac{1}{2}[(\beta_2-\beta_1)x + (\beta_1+\beta_2)t]}\sin\left(\frac{1}{2}\lambda_s t\right)\sin\left(\frac{1}{2}\left(\lambda_s x - \theta_{\lambda_s}\right)\right).$$

Таким образом , функции:

$$u_{\lambda_s}(x,t) = e^{\frac{1}{2}[(\beta_2-\beta_1)x + (\beta_1+\beta_2)t]}\sin\left(\frac{1}{2}\lambda_s t\right)\sin\left(\frac{1}{2}\left(\lambda_s x - \theta_{\lambda_s}\right)\right)$$

удовлетворяет уравнению (1), граничным условием (2) и начальному условию $u_{\lambda_s}(x,0) = 0$. Отметим, что функции, входящие в бесконечную систему функций:

$$\sin\left(\frac{1}{2}(\lambda_1 x - \theta_{\lambda_1}\right), \sin\left(\frac{1}{2}(\lambda_2 x - \theta_{\lambda_2}\right), \dots \tag{9}$$

определены и непрерывны в промежутке $[0,l]$, но не будут, вообще говоря, ортогональны в $[0,l]$. В таких случаях применяется метод ортогонализации, который осуществляет следующим образом. Построим систему функций:

$$\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_s(x), \dots \tag{10}$$

ортогональныхся и нормированных, притом такую, что каждая функция системы (10) представляет некоторую линейную комбинацию функций системы (9), точнее, $\psi_s(x)$ имеет вид:

$$\psi_s(x) = \mu_1(s)\sin\left(\frac{1}{2}(\lambda_1 x - \theta_{\lambda_1}\right) + \mu_2(s)\sin\left(\frac{1}{2}(\lambda_2 x - \theta_{\lambda_2}\right) + \dots + \mu_s(s)\sin\left(\frac{1}{2}(\lambda_s x - \theta_{\lambda_s}\right).$$

После того как построена ортогональная система, составим функции:

$$\bar{u}_{\lambda_s}(x,t) = A_s e^{\frac{1}{2}[(\beta_2-\beta_1)x+(\beta_1+\beta_2)t]} \sin\left(\frac{1}{2}\lambda_s t\right)\psi_s(x),$$

которые являются частными решениями уравнения (1), удовлетворяющими краевым условиям (2) и начальному условию $\bar{u}_{\lambda_s}(x,0) = 0$ при любых произвольных постоянных A_s. В силу линейности и однородности уравнения (1) сумма частных решений:

$$u(x,t) = e^{\frac{1}{2}[(\beta_2-\beta_1)x+(\beta_1+\beta_2)t]} \sum_{s=1}^{\infty} A_s \sin\left(\frac{1}{2}\lambda_s t\right)\psi_s(x) \tag{11}$$

также удовлетворяет этому уравнению, краевым условиям (2) и начальному условию $u(x,0) = 0$.Потребуем теперь, чтобы функция (11) удовлетворяла начальному условию $u_t(x,0) = 0$, которые дает:

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{\lambda_s}{2} A_s \psi_s(x) = e^{\frac{1}{2}(\beta_2-\beta_1)x} f(x).$$

Если функция $e^{\frac{1}{2}(\beta_2-\beta_1)x} f(x)$ удовлетворяет условиям разложения в ряд Фурье по функциям $\{\psi_s(x)\}$, то:

$$A_s = \frac{2}{\lambda_s}\int_0^l e^{\frac{1}{2}(\beta_1-\beta_2)x} f(x)\psi_s(x)dx.$$

Построенная функция (11) удовлетворяет всем условиям задачи (1)-(3) и представляет действительное решение этой задачи.

Пример. Найти решение модели:

$$\left.\begin{array}{l} u_{tt} = u_{xx}, \quad 0 < x,t < \infty, \\ \textit{при заданных граничных условиях} \\ u_{tt} - u_t + 3u_x + \dfrac{15}{4}u = 2\sin 5t, \quad x = 0, \quad 0 < t < \infty, \\ u(0,0) = 0, \quad u_t(0,0) = 3. \end{array}\right\}. \tag{12}$$

Решение. Задача (12) приводит к задаче Коши для неоднородного функционально-дифференциального уравнения:

$$\varphi''(z) + 2\varphi'(z) + \frac{15}{4}\varphi(z) - 2\varphi''(-z) - 8\varphi'(-z) - \frac{15}{2}\varphi(-z) = 2\sin 5z$$

при начальных условиях $\varphi(0) = 0, \quad \varphi'(0) = 1$. Частными решениями однородного уравнения будут:

$$\varphi_1(z) = e^{\frac{1}{2}\sqrt{5}z} + 6.8544e^{-\frac{1}{2}\sqrt{5}z}, \quad \varphi_2(z) = e^{\frac{3}{2}\sqrt{5}z} + 6.8544e^{-\frac{3}{2}\sqrt{5}z}.$$

Частное решение неоднородного уравнения имеет в виде:

$$\Phi(z) = -0.021\cos 5z - 0.0148\sin 5z.$$

Решая задачу Коши, получаем:

$$\varphi(z) = 0{,}086\left(e^{\frac{\pi}{2}\sqrt{5}} + 6.8544e^{-\frac{\pi}{2}\sqrt{5}}\right) -$$

$$-0.0833\left(e^{\frac{3}{2}\sqrt{5}z} + 6.8544e^{-\frac{3}{2}\sqrt{5}z}\right) - 0.021\cos 5z - 0.0148\sin 5z.$$

Решение исходной задачи (12) имеет вид:

$$u(x,t) = 0.086\left(e^{\frac{1}{2}\sqrt{5}(x+t)} + 6.8544e^{-\frac{1}{2}\sqrt{5}(x+t)}\right) - 0.0833\left(e^{\frac{3}{2}\sqrt{5}(x+t)} + 6.8544e^{-\frac{3}{2}\sqrt{5}(x+t)}\right) -$$

$$-0.021\cos 5(x+t) - 0.0148\sin 5(x+t) + 0.1721\left(e^{\frac{1}{2}\sqrt{5}(x-t)} + 6.8544e^{-\frac{1}{2}\sqrt{5}(x-t)}\right) -$$

$$-0.1668\left(e^{\frac{3}{2}\sqrt{5}(x-t)}+6.8544e^{-\frac{3}{2}\sqrt{5}(x-t)}\right)-0.0414\cos 5(x-t)+0.0297\sin 5(x-t)\,.$$

Вывод. Разработан способ решения более обшей гранично-начальной задачи о колебаниях ограниченной струны методом функционально-дифференциальных уравнений. Приведен пример, в котором решение получено в явном виде.

Литература

1. *К.Б.Сабитов.* Функциональные, дифференциальные и интегральные уравнения. –М: "Высшая школа", 2005г.

2. *Я.Ацел, Ж.Домбр.* Функциональные уравнения с несколькими переменными. –М.: Физматлит, 2003г.

3. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1966г.

4. *Шаршеналиев Ж.Ш., Турумбеков А.Т., Кутунаев Ж.Н.* Смешанная задача о колебании полуограниченной прямой. // Математический журнал. – Алматы, 2005, №4.–С,86 − 96.

5. *Дженалиев М.Т.* Краевые задачи для нагруженных параболического и гиперболического уравнений с производными по времени в граничных условиях // Дифференциальные уравнения. – 1992. – Т.28, №4.– С.661 – 666.