ПРИМЕНЕНИЕ ГРУППОВОГО АНАЛИЗА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ К ТРЕХМЕРНОЙ МОДЕЛИ ПРОЦЕССА ФИЛЬТРАЦИИ

КЕРИМКУЛОВА Г.К.
izvestiya@ktu.aknet.kg

Институт автоматики и информационных технологий НАН КР, Бишкек, Кыргызстан

Рассматривается математическая модель процесса фильтрации, которая сформулирована некорректно. С помощью аппарата группового анализа дифференциальных уравнений снимается некорректность. Неизвестный коэффициент фильтрации представляется в параметрической форме.

Рассмотрим случай, когда водопроводимость водоносного пласта изменяется от точки к точке в области, где исследуется процесс фильтрации. Это означает, что коэффициент фильтрации является функцией от координаты точек. С помощью измерений, полученных только от опытно-фильтрационных работ (ОФР), зная значения коэффициента фильтрации на отдельных опорных точках в области течения? нельзя удовлетворительно аппроксимировать эту функцию. Для относительно удовлетворительного описания ее требовалось бы знать нужные значения на достаточно многочисленных точках, что требует больших материальных затрат и много временных ресурсов.

От перечисленных неудобств исследователя освобождает только математическое моделирование. В работе мы изложим метод идентификации модели к объекту в случае, когда искомый коэффициент фильтрации зависит от координаты точек.

Итак, рассматривается математическая модель процесса, описываемая уравнениями [1]: уравнением неразрывности

$$\overset{1}{v}_x+\overset{2}{v}_y+\overset{3}{v}_z=F(x,y,z) \qquad (1)$$

и динамическими уравнениями

$$\overset{1}{v}=-kh_x,\quad \overset{2}{v}=-kh_y,\quad \overset{3}{v}=-kh_z\ , \qquad (2)$$

которые называются обобщенным законом Дарси. Здесь (x,y,z) – прямоугольные координаты, h(x,y,z) – гидравлический напор, k(x,y,z) – неизвестный коэффициент фильтрации, $k\neq 0$, $\vec{v}=(\overset{1}{v},\overset{2}{v},\overset{3}{v})$ − вектор плотности потока, а функция F(x,y,z) учитывает влияние работы вертикальных дрен или воздействия инфильтрации и испарения, которая также считается неизвестной.

Неизвестный коэффициент фильтрации k ищем в следующем виде:

$$k=k(x,y,z). \qquad (3)$$

Применим групповой анализ дифференциальных уравнений к системе (1), (2). Инфинитезимальным оператором для системы (1), (2) будет следующий оператор [2]:

$$X=\overset{1}{\xi}\frac{\partial}{\partial x}+\overset{2}{\xi}\frac{\partial}{\partial y}+\overset{3}{\xi}\frac{\partial}{\partial z}+\overset{0}{g}\frac{\partial}{\partial h}+\overset{1}{g}\frac{\partial}{\partial \overset{1}{v}}+\overset{2}{g}\frac{\partial}{\partial \overset{2}{v}}+\overset{3}{g}\frac{\partial}{\partial \overset{3}{v}}, \qquad (4)$$

где $\overset{1}{\xi},\overset{2}{\xi},\overset{3}{\xi},\ldots,\overset{3}{g}$ − координаты инфинитезимального оператора X, и они зависят только от $x,y,z,h,\overset{1}{v},\overset{2}{v},\overset{3}{v}$.

Первым продолжением оператора X будет оператор

$$\overset{1}{X}=X+\overset{1}{\sigma}\frac{\partial}{\partial h_x}+\overset{2}{\sigma}\frac{\partial}{\partial h_y}+\overset{3}{\sigma}\frac{\partial}{\partial h_z}+\overset{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial \overset{1}{v}_x}+\overset{2}{\mu}\frac{\partial}{\partial \overset{2}{v}_y}+\overset{3}{\mu}\frac{\partial}{\partial \overset{3}{v}_z}. \qquad (5)$$

Согласно теории группового анализа, из (5) $\overset{i}{\sigma},\overset{i}{\mu}$ $(i=1,2,3\ldots)$ определяются по следующим формулам:

$$\overset{1}{\sigma} = D_x\left(\overset{0}{g}\right) - h_x D_x\left(\overset{1}{\xi}\right) - h_y D_x\left(\overset{2}{\xi}\right) - h_z D_x\left(\overset{3}{\xi}\right).$$

$$\overset{1}{\mu} = D_x\left(\overset{1}{g}\right) - \overset{1}{v}_x D_x\left(\overset{1}{\xi}\right) - \overset{1}{v}_y D_x\left(\overset{2}{\xi}\right) - \overset{1}{v}_z D_x\left(\overset{3}{\xi}\right),$$

………………………………………………

Здесь $D_x\left(\overset{0}{g}\right)$, $D_x\left(\overset{1}{g}\right)$, ... определяются следующими формулами:

$$D_x\left(\overset{0}{g}\right) = \overset{0}{g}_x + \overset{0}{g}_h h_x + \overset{0}{g}_{\overset{1}{v}} \overset{1}{v}_x + \overset{0}{g}_{\overset{2}{v}} \overset{2}{v}_x + \overset{0}{g}_{\overset{3}{v}} \overset{3}{v}_x \text{ и т.д.}$$

Воздействуя оператором $\overset{1}{X}$ на (1), (2), приходим к системе:

$$\overset{1}{\mu} + \overset{2}{\mu} + \overset{3}{\mu} = XF, \tag{6}$$

$$\overset{1}{g} = -k\overset{1}{\sigma} - Xk \cdot h_x, \qquad \overset{2}{g} = -k\overset{2}{\sigma} - Xk \cdot h_y, \qquad \overset{3}{g} = -k\overset{3}{\sigma} - Xk \cdot h_z. \tag{7}$$

Подставляя известные значения операторов $\overset{1}{\sigma}, \overset{2}{\sigma}, \overset{3}{\sigma}, \overset{1}{\mu}, \overset{2}{\mu}, \overset{3}{\mu}$ в уравнения (6), (7), учитывая (1), (2) и делая некоторые необходимые выкладки и расщепления, получим следующие определяющие уравнения:

$$\overset{1}{\xi}_h = \overset{1}{\xi}_{\overset{1}{v}} = \overset{1}{\xi}_{\overset{2}{v}} = \overset{1}{\xi}_{\overset{3}{v}} = 0, \quad \overset{2}{\xi}_h = \overset{2}{\xi}_{\overset{1}{v}} = \overset{2}{\xi}_{\overset{2}{v}} = \overset{2}{\xi}_{\overset{3}{v}} = 0,$$

$$\overset{3}{\xi}_h = \overset{3}{\xi}_{\overset{1}{v}} = \overset{3}{\xi}_{\overset{2}{v}} = \overset{3}{\xi}_{\overset{3}{v}} = 0, \quad \overset{0}{g}_{\overset{1}{v}} = \overset{0}{g}_{\overset{2}{v}} = \overset{0}{g}_{\overset{3}{v}} = 0, \tag{8}$$

$$\overset{1}{\xi}_x = \overset{2}{\xi}_y = \overset{3}{\xi}_z. \quad \overset{2}{\xi}_x + \overset{1}{\xi}_y = 0, \quad \overset{1}{\xi}_z + \overset{3}{\xi}_x = 0, \quad \overset{3}{\xi}_y + \overset{2}{\xi}_z = 0. \tag{9}$$

С учетом (8), (9) из (7) имеем уравнения

$$\overset{1}{g} = \left(\frac{Xk}{k} + \overset{0}{g}_h - \overset{1}{\xi}_x\right)\overset{1}{v} - \overset{2}{\xi}_x \overset{2}{v} - \overset{3}{\xi}_x \overset{3}{v} - \overset{0}{g}_x k,$$

$$\overset{2}{g} = -\overset{1}{\xi}_y \overset{2}{v} + \left(\frac{Xk}{k} + \overset{0}{g}_h - \overset{2}{\xi}_y\right)\overset{2}{v} - \overset{3}{\xi}_y \overset{3}{v} - \overset{0}{g}_y k,$$

$$\overset{3}{g} = -\overset{1}{\xi}_z \overset{1}{v} - \overset{2}{\xi}_z \overset{2}{v} + \left(\frac{Xk}{k} + \overset{0}{g}_h - \overset{3}{\xi}_z\right)\overset{3}{v} - \overset{0}{g}_z k. \tag{10}$$

Решениями системы (9) будут функции [3]:

$$\overset{1}{\xi} = A_1\left(x^2 - y^2 - z^2\right) + 2x\left(A_2 y + A_3 z\right) + B_1 x + B_2 y + B_3 z + B_5,$$

$$\overset{2}{\xi} = A_2\left(y^2 - x^2 - z^2\right) + 2y\left(A_1 x + A_3 z\right) - B_2 x + B_1 y + B_4 z + B_6,$$

$$\overset{3}{\xi} = A_3\left(z^2 - x^2 - y^2\right) + 2z\left(A_1 x + A_2 y\right) - B_3 x - B_4 y + B_1 z + B_7. \tag{11}$$

Здесь A_i, B_j $(i = 1,2,3;\ j = 1,2,3,4,5,6,7)$ − произвольные постоянные.

Из (6), учитывая уравнения (1), (2), (8), (10) и используя метод неопределенных коэффициентов, из полученного уравнения приходим к системе следующих определяющих уравнений:

$$-\left[\left(\overset{0}{g}_x k\right)_x + \left(\overset{0}{g}_y k\right)_y + \left(\overset{0}{g}_z k\right)_z\right] + \left(\overset{0}{g}_h + \frac{Xk}{k} - 2\overset{3}{\xi}_z\right)F = XF, \tag{12}$$

$$\frac{Xk}{k} + 2\overset{0}{g}_h + \overset{1}{\xi}_x = C = \mathrm{const}, \tag{13}$$

$$\overset{0}{g}_{hh} = 0. \tag{14}$$

Из (14) имеем, что

$$\overset{0}{g} = M(x,y,z)\cdot h + N(x,y,z), \tag{15}$$

где M, N – пока неизвестные функции от перечисленных аргументов.
Для простоты допустим, что

$$A_1 = A_2 = A_3 = C = N = 0, \quad M = -B_1, \quad B_1 = 1. \tag{16}$$

Тогда из (11) остается линейная часть

$$\overset{1}{\xi} = B_1x + B_2y + B_3z + B_5,$$
$$\overset{2}{\xi} = -B_2x + B_1y + B_4z + B_6,$$
$$\overset{3}{\xi} = -B_3x - B_4y + B_1z + B_7. \tag{16}$$

С учетом (16), из (15) имеем, что

$$\overset{0}{g} = -h. \tag{17}$$

Далее, учитывая (16) подставляем (17) в (13) и получим

$$\frac{Xk}{k} = 1. \tag{18}$$

Откуда имеем

$$Xk = k. \tag{19}$$

Согласно теории группового анализа, в случае когда B_1=1 и B_i=0 $(i \neq 0)$, имеем

$$\overset{1}{\xi} = x, \overset{2}{\xi} = y, \overset{3}{\xi} = z. \tag{20}$$

С учетом (20) из (17) приходим к уравнению

$$xk_x + yk_y + zk_z = k, \tag{21}$$

общим решением которого является функция

$$k = y\bar{k}\left(\frac{x}{y}, \frac{z}{y}\right), \tag{22}$$

где $\bar{k}\left(\frac{x}{y}, \frac{z}{y}\right)$ − произвольная функция, которая определяется с помощью данных, полученных ОФР.

Учитывая (17), (18) и (20), из (12) имеем

$$-2\cdot F = XF, \tag{23}$$

также из (10) получим

$$\overset{1}{g} = -B_1\overset{1}{v} + B_2\overset{2}{v} + B_3\overset{3}{v},$$
$$\overset{2}{g} = -B_2\overset{1}{v} - B_1\overset{2}{v} + B_4\overset{3}{v},$$
$$\overset{3}{g} = -B_3\overset{1}{v} - B_4\overset{2}{v} - B_1\overset{3}{v}. \tag{24}$$

Нетрудно убедиться, что решением уравнения (23) будет функция

$$F = \frac{1}{y^2}\bar{F}\left(\frac{x}{y}, \frac{z}{y}\right). \tag{25}$$

В этом случае базисными операторами будут

$$X_1 = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} - h\frac{\partial}{\partial h} - \overset{1}{v}\frac{\partial}{\partial \overset{1}{v}} - \overset{2}{v}\frac{\partial}{\partial \overset{2}{v}} - \overset{3}{v}\frac{\partial}{\partial \overset{3}{v}},$$

$$X_2 = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y} + \overset{2}{v}\frac{\partial}{\partial \overset{1}{v}} - \overset{1}{v}\frac{\partial}{\partial \overset{2}{v}},$$

$$X_3 = z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z} + \overset{3}{v}\frac{\partial}{\partial \overset{1}{v}} - \overset{1}{v}\frac{\partial}{\partial \overset{3}{v}},$$

$$X_4 = z\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial z} + \overset{3}{v}\frac{\partial}{\partial \overset{2}{v}} - \overset{2}{v}\frac{\partial}{\partial \overset{3}{v}},$$

$$X_5=\frac{\partial}{\partial x},\ X_6=\frac{\partial}{\partial y},\ X_7=\frac{\partial}{\partial z}. \tag{26}$$

Находим все инварианты оператора X_1

$$J_1=\frac{x}{y},\ J_2=\frac{z}{y},\ J_3=y\cdot h,\ J_4=y\cdot\overset{1}{v},\ J_5=y\cdot\overset{2}{v},\ J_6=y\cdot\overset{3}{v}. \tag{27}$$

Используя преобразования

$$\frac{x}{y}=\xi,\quad \frac{z}{y}=\eta$$

и переходя к новым переменным, имеем

$$h(x,y,z)=\frac{1}{y}\bar{h}(\xi,\eta),\qquad \overset{1}{v}(x,y,z)=\frac{1}{y}\overset{1}{\bar{v}}(\xi,\eta),$$

$$\overset{2}{v}(x,y,z)=\frac{1}{y}\overset{2}{\bar{v}}(\xi,\eta),\qquad \overset{3}{v}(x,y,z)=\frac{1}{y}\overset{3}{\bar{v}}(\xi,\eta). \tag{28}$$

Подставляя (28) в уравнения (1) и (2), с учетом

$$k(x,y,z)=y\cdot\bar{k}(\xi,\eta)$$

приходим к равенствам

$$\overset{1}{\bar{v}}=-\bar{k}\cdot\bar{h}_\xi,\ \overset{2}{\bar{v}}=\bar{k}\cdot\left[\bar{h}+\xi\bar{h}_\xi+\eta\bar{h}_\eta\right],\ \overset{3}{\bar{v}}=-\bar{k}\cdot\bar{h}_\eta, \tag{29}$$

$$\overset{1}{\bar{v}}_\xi-\overset{2}{\bar{v}}-\xi\overset{2}{\bar{v}}_\xi-\overset{2}{\eta}v_\eta+\overset{3}{\bar{v}}_\eta=\bar{F}(\xi,\eta). \tag{30}$$

Подставляя (29) в (30), окончательно приходим к уравнению

$$-\bar{k}\left[(1+\xi^2)\bar{h}_{\xi\xi}+2\xi\eta\bar{h}_{\xi\eta}+(1+\eta^2)\bar{h}_{\eta\eta}\right]-$$

$$-\left(\bar{k}_\xi+3\xi\bar{k}+\xi^2\bar{k}_\xi+\xi\eta\bar{k}_\eta\right)\bar{h}_\xi-\left(\bar{k}_\eta+3\eta\bar{k}+\eta^2\bar{k}_\eta+\xi\eta\bar{k}_\xi\right)\bar{h}_\eta-$$

$$-\left(\bar{k}+\xi\bar{k}_\xi+\eta\bar{k}_\eta\right)\bar{h}=\bar{F}.$$

Поскольку $\bar{k}\neq 0$, то последнее уравнение переходит к следующему уравнению:

$$(1+\xi^2)\bar{h}_{\xi\xi}+2\xi\eta\bar{h}_{\xi\eta}+(1+\eta^2)\bar{h}_{\eta\eta}+$$

$$+\frac{1}{\bar{k}}\left(\bar{k}_\xi+3\xi\bar{k}+\xi^2\bar{k}_\xi+\xi\eta\bar{k}_\eta\right)\bar{h}_\xi+\frac{1}{\bar{k}}\left(\bar{k}_\eta+3\eta\bar{k}+\eta^2\bar{k}_\eta+\xi\eta\bar{k}_\xi\right)\bar{h}_\eta+$$

$$+\frac{1}{\bar{k}}\left(\bar{k}+\xi\bar{k}_\xi+\eta\bar{k}_\eta\right)\bar{h}=\frac{1}{\bar{k}}\bar{F}. \tag{31}$$

Квазилинейное уравнение (31) неудобно для приближенного анализа. Поэтому его приведем к дивергентной форме. Решая соответствующее дифференциашльное уравнение, получим

$$\bar{h}_{\tau\tau}+\bar{h}_{\delta\delta}+R(\tau,\delta)\cdot\bar{h}_\tau+P(\tau,\delta)\cdot\bar{h}_\sigma+W(\tau,\delta)\cdot\bar{h}=V(\tau,\delta), \tag{32}$$

где

$$R(\tau,\delta)=\frac{\bar{k}_\tau}{\bar{k}}+\mathrm{tg}\tau,\ P(\tau,\delta)=\frac{\bar{k}_\delta}{k}+\mathrm{th}\delta,\ V(\tau,\delta)=\frac{1}{\bar{k}}\frac{\bar{F}}{\cos^2\tau},$$

$$W(\tau,\delta)=\frac{1}{\cos^2\tau}\left(1+\frac{\bar{k}_\tau}{\bar{k}}\cdot\sin\tau\cdot\cos\tau-\frac{\bar{k}_\tau}{\bar{k}}\mathrm{th}\delta\left(\mathrm{tg}^2\tau-1\right)\right).$$

Полученное уравнение представлено в градиентной форме, которая удобна для применения метода конечных элементов. Обратный переход к старым переменным осуществляется с помощью следующего преобразования:

$$\tau=\mathrm{arctg}\frac{x}{y},\quad \delta=\ln\frac{z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Итак, в результате группового анализа дифференциальных уравнений недоопределенная модель приведена к замкнутому уравнению. Коэффициент фильтрации представлен в явной

параметрической форме.
Приводим тестовый пример.

Пусть дана краевая задача фильтрации, рассматриваемая в области

$$D = \{(x, y, z) \in R^3 / 0 \le x \le 1, 1 \le y \le 2, 0 \le z \le 1\}.$$

Задача описывается дифференциальным уравнением

$$-\frac{\partial}{\partial\tau}\left(K\frac{\partial h}{\partial\tau}\right) - \frac{\partial}{\partial\delta}\left(K\frac{\partial h}{\partial\delta}\right) + \widetilde{W}h = \widetilde{F} \qquad (33)$$

с граничным условием

$$h(\tau,\delta)\big|_{\partial D} = \left(2\cdot(\tau^2 + \sin\tau) + \cos^2\delta\right)\Big|_{\partial D}. \qquad (34)$$

Здесь

$$K(\tau,\delta) = (\tau+\delta)\left(\frac{1}{\cos\tau} + \mathrm{ch}\,\delta\right),$$

$$\widetilde{W} = -K\cdot W(\tau,\delta), \quad \widetilde{F} = -K\cdot V(\tau,\delta).$$

Данная краевая задача имеет точное решение, удовлетворяющее уравнению (33) и граничное условие (34)

$$h(\tau,\delta) = 2\cdot(\tau^2 + \sin\tau) + \cos^2\delta. \qquad (35)$$

В области D рассмотрим сечения

$$1 = y_0 < y_1 < \ldots < y_n = 2.$$

Задача решена методом конечных элементов. Полученные результаты сравнивались с точным решением (35), которые приведены табл.
Для краткости записи ограничились с сечением, когда y=1.5.
Таблица
Значения точного и приближенного решения задачи (33) − (35).

N узлов	h (точн. зн.)	h (приб.зн.)	N узлов	h (точн. зн.)	h (приб.зн.)
57	2.584	2.649	67	2.388	2.421
58	1.999	2.090	68	1.775	1.830
59	1.433	1.437	69	1.189	1.251

ЛИТЕРАТУРА

1. *П.Я. Полубаринова-Кочина.* Теория движения грунтовых вод. – М.:Наука, 1977. 644 с.
2. *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. − М.: Наука, 1978. 400 с.
3. Исследования по интегродифференциальным уравнениям. − Бишкек: Илим, 2008. №38.