УДК 532.54

КОЭФФИЦИЕТН ПРИСОЕДИНЁННОЙ МАССЫ РАСПАДАЮЩЕЙСЯ СФЕРЫ

КАНЦЫРЕВ Б.Л
Институт океанологии им П.П.Ширшова РАН, Москва, Россия,
boris.kantsyrev@mail.ru

Аннотация. Представлен анализ процесса распада сферы, моделирующий дробление пузырька при его потенциальном обтекании потоком жидкости.

Постановка задачи для одиночной распадающейся сферы Рассмотрим обтекание сферического пузырька потоком идеальной несжимаемой жидкости. Предположим, что жидкость «на бесконечности» покоится, а пузырек движется со скоростью $\mathbf{V_ч}$ и в начальный момент времени начинает делиться на два сферических пузырька. В процессе деления возникают два шаровых сегмента радиуса R, имеющие общее основание. Их центры расходятся с постоянной скоростью $\mathbf{V_y}$. Суммарный объем сегментов постоянен и равен объему первоначального пузырька. При этом, очевидно, для каждого из них $\mathbf{dR/dt < 0}$. Требуется определить силу, действующую на каждый сегмент в направлении, параллельном оси X во время данного нестационарного процесса. Рассмотрим сначала задачу в плоскости. При этом удобно воспользоваться осевой симметрией данной задачи, рассмотреть движение кругового сегмента около границы полуплоскости, как показано на рис.1.

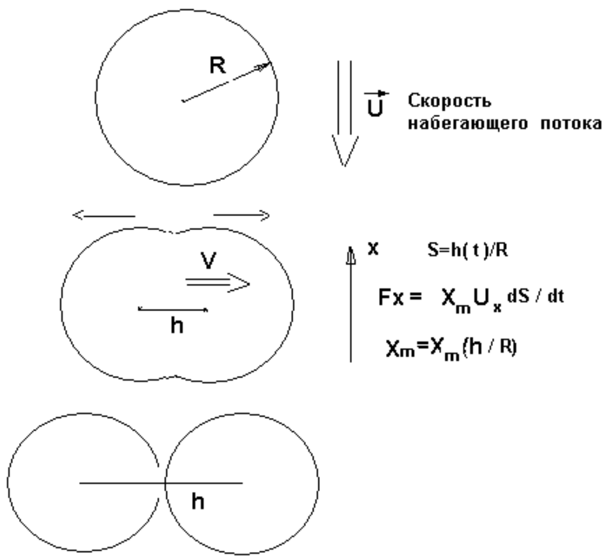

Рис 1.

Решение уравнения Лапласа для потенциала скорости φ:

$$\Delta \varphi = 0 \qquad (1)$$

в полярных координатах будем искать φ в виде:

$$\varphi = f - V\ n\, R^2 / r. \qquad (2)$$

Тогда во внутренних точках расчетной области

$$\Delta f = 0. \qquad (3)$$

На плоской части границы из условия непротекания $\partial\tilde{\varphi}/\partial x = 0$

следует:

$$\partial\tilde{f}/\partial x = -\cos^2(\beta)/\cos^2(\beta_0)(V_x \cos(2\beta) + V_y \sin(2\beta)), \qquad (4)$$

где β − угол между осью x и направлением вектора из центра первоначального круга к границе расчётной области.

На границе кругового сегмента из $\partial\tilde{\varphi}/\partial r = dR/dt + \bar{V}\,\bar{n}$

следует:

$$\partial\tilde{f}/\partial r = dR/dt. \qquad (5)$$

Задача (3) − (5) решалась методом разделения переменных, при этом

искомая функция f представлялась в виде ряда:

$$f = \Sigma(A_k \sin(k\beta) + B_k \cos(k\beta))/r^k\ . \qquad (6)$$

Базисные функции в (6) хотя и образуют полную систему, но не ортогональны на окружности. В данном случае требуется ортогональность на границе сегмента, который образован частью окружности и вертикальным отрезком прямой (частью оси симметрии X). Для получения требуемой ортогональной системы она строилась из линейных комбинаций векторов (6), т.е. проводилась процедура их ортогонализации, описанная в [2].

После разложения искомой функции по новому ортогональному базису и определения коэффициентов этого разложения (удерживались первые 10 членов ряда) , по ним находились коэффициенты $\mathbf{A_k}$ и $\mathbf{B_k}$. Затем определялись функция f и потенциал скорости φ. Распределение давления по границе сегмента и вычисление искомой силы по его среднему значению проводились с использованием интеграла Коши-Лагранжа. В результате для силы присоединенных масс получено выражение

$$F_x = -\chi M V_x V_y\,, \qquad (7)$$

где M – масса жидкости, соответствующая объему сегмента.

Аналогичный результат был получен при решении задачи для сферы. Отличие сводится к величине коэффициента присоединённой массы χ. Для плоской геометрии в начальный момент получено $\chi=1$, для сферической $\chi=1./2$.

Результат расчета

Зависимость χ от расстояния h между центрами сегментов для сферической геометрии показана на рис.2.

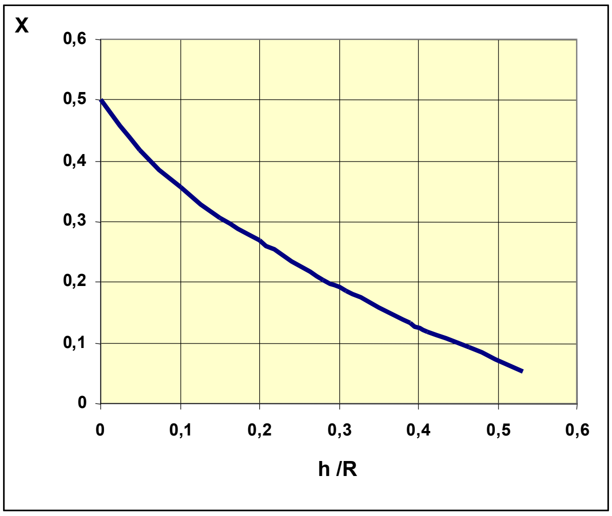

Рис. 2

При делении сферы сила присоединенных масс направлена против вектора скорости сферы (тормозящая сила). При слиянии двух пузырьков в один, наоборот, действует ускоряющая сила. Таким образом, сила присоединённых масс при делении направлена против движения пузырька, а при слиянии – в направлении движения.

Как видно, представленная выше задача рассматривает упрощённую модель потенциального обтекания делящегося пузырька. Далее рассмотрен более общий случай в рамках модели монодисперсного гетерогенного пузырькового потока [1].

Сила присоединённых масс в пузырьковом потоке

В осредненных уравнениях двухжидкостной модели дисперсного потока учитывается влияние мелкомасштабных возмущений несущей компоненты, вносимых движением дисперсных частиц. При этом получаются дополнительные пульсационные слагаемые, которые аналогичны рейнольдсовым напряжениям при моделировании турбулентного движения жидкости. Кинетическая энергия мелкомасштабных движений и пульсационная составляющая тензора напряжений для одномерного уравнения движения жидкой фазы представлены соответственно в виде

$$\mathbf{K_1 = \alpha_2 \chi U^2/2,} \qquad \mathbf{(8)}$$

$$\mathbf{\Pi_1 = -\alpha_2 \psi U^2,} \qquad \mathbf{(9)}$$

где χ и ψ − функции объемного газосодержания α_2. По аналогии с работой [3] запишем осредненные уравнения баланса полного импульса и энергии для потока в целом с учетом пульсационных слагаемых (8),(9):

$$\square\square_1\square_1 V_1 + \square\square\, V_2)/\square t \; +$$

$$+ \square\square_1 P_1 \square\, P_2 \square_1\square_1 V_1^{\,2} + \square\square V_2^{\,2} - \square_1 \Pi_1 \tilde{)} \square z \qquad = \square g. \qquad (10)$$

$$\square\,\square_1\square_1 E_1 + V_1^2/2 + K_1) + \square\square E_2 V_2^2/2))/\square t \; +$$

$+ \square\, [\square_1 \square_1 V_1 E_1 + V_1^2/2 + K_1) + \square_2 \square_2 V_2 E_2 V_2^2/2) - C_1 \tilde{)} \square_2 \square\, z = \square g\, V$

В дальнейшем приняты обозначения: $\square_1 + \square_2 = 1$, $P = \square_1 P_1\, \square_2 P_2$ – давление в потоке в соответствии со «схемой Рахматуллина», $\Lambda = ¼\,(1 - \square_2/\square_1)$,

$P_1 - P_2 = \Lambda\, \square_1 u^2$ – соответственно разность между осредненными величинами давления в первой фазе и на поверхности пузырька [1, гл.3],

$C_1 = -\, \square_1 P_1 V_1 \tilde{}\; \square_2 P_2 V_2 + V_2\, \square_1 \Pi_1$ – работа поверхностных сил [1, гл. 3] с учетом пульсационных составляющих.

Преобразуем 2 уравнения (10) так, чтобы получить 2 уравнения, включающие в себя ускорения каждой из компонент. Если при этом учесть уравнения неразрывности для компонент потока

$$\square\square_1\square_1)/\square t + \square\square_1\square_1 V_1\tilde{)}\square z = 0, \qquad (11)$$

$$\square\square_2\square_2)/\square t + \square\square_2\square_2 V_2\tilde{)}\square z = 0, \qquad (12)$$

, а также уравнение баланса числа пузырьков в единице объёма **n**

$$\square\, n)/\square t + \square n V_2\tilde{)}\, \square\, z = J_n,$$

где J_n – интенсивность процесса дробления или слияния частиц, то можно получить уравнения импульса для каждой компоненты:

$$\square\, \square_1\square_1 V_1)/\square t + \square\square_1\square_1 V_1^2 + \square_1 P + \square_1\square_1\square_2 U^2 \Lambda\tilde{)}\, \square\, z = -\, P^*\, \square\square_2\tilde{}\square\, z\, - \qquad (13)$$

$$-\, F_m - \delta^* U \square \tilde{U} \square z + F_1;$$

$$\square\, \square_2\square_2 V_2)/\square t + \square\square_2\square_2 V_2^2 + \square_2 P + \square_1\square_2 U^2(\psi - \square_1\Lambda)\tilde{)}\, \square\, z = P^*\, \square\square_2\tilde{}\square\, z +$$

$$+ F_m + \delta^* U \square \tilde{U} \square z + F_2;$$

F_1, F_2 в правой части **(3),(4)** представляют внешние объемные силы

$$F_1 = \square_1\square_1 g_z, \quad F_2 = \square_2\square_2 g_z,$$

$$P^* = P + \square_1 U^2 \square_1 [\, ½\, \square_1 d(\square_2\chi\tilde{)} d\square_2) - \chi] + \square_1 U^2 \square_2 [\psi - \square_1 \chi] + \chi \square_1 \square_1 U^2$$

$$\delta^* = \square_1\square_1\square_2 [\, \Lambda - \psi + \square_1(\chi + ½\; d(\square_2\chi\tilde{)} d\square_2)]\,,$$

$$F_m = \chi\, \square_1\square_1\square_2\, [d_1 V_1/dt - d_2 V_2/dt - U(\,3/R_b\, d_2 \tilde{R}_b dt + J_n/n)]. \qquad (14)$$

Как видно из **(14)**, F_m представляет собой соотношение для силы присоединённых масс с учётом процессов исчезновения и рождения пузырьков в результате дроблений и слияний. Соответствующее дополнительное слагаемое имеет вид

$$-U\, J_n / n\, \chi\, \square_1\square_1\square_2\;. \qquad (15)$$

В случае дробления, когда $J_n > 0$, на пузырьковую компоненту действует тормозящая сила, пропорциональная относительной скорости несущей и дисперсной компонент, а также интенсивности процесса дробления. Если $J_n < 0$, направление силы меняется на противоположное.

Заключение. Рассмотренная задача о распаде сферы, движущейся в потоке жидкости, позволяет правильно интепретировать соотношение, полученное в [3] для силы присоединённых масс в пузырьковом монодисперсном потоке. Влияние слагаемого (15)
обусловлено силой нестационарного взаимодействия распадающегося пузырька с обтекающим потоком.

Литература

1 Нигматулин Р.И. Основы механики гетерогенных сред. –М.: Наука, 1978. 336 с.
2 Арсенин В.Я. Методы математической физики и специальные функции. М.: Наука, 1974. 383 с.
3 B.L. Kantsyrev. Modification of Godunov Computation Method for Modeling Non-Stationary Gas-Liquid Flow.// Proceedings of ICAPP'07. Paper 7061. Nice Acropolis. France. May 13-18. 2007.