УДК.517.928.977.

РЕШЕНИЕ СИНГУЛЯРНО-ВОЗМУЩЕННОЙ ЗАДАЧИ МЕТОДОМ ИНТЕГРАЛЬНЫХ МНОГООБРАЗИЙ

ИМАНАЛИЕВ З.К., БАРАКОВА Ж.Т.
Кыргызский государственный технический университет им. И. Раззакова, Бишкек, Кыргызстан,
Janna05_05@mail.ru

В данной работе исследуется линейная задача Майера с ограничениями на область управления. Задача нахождения оптимального управления сводится к исследованию поведения вспомогательной функции.

Задача состоит из системы

$$\dot{x} = A_1 x + A_2 z + B_1 u, \tag{1}$$

$$\mu \dot{z} = A_3 x + A_4 z + B_2 u,$$

с начальными условиями

$$x(0,\mu) = x^0,\ z(0,\mu) = z^0, \tag{2}$$

функционал который подлежит минимизации

$$J = d^* x(T,\mu) + C^* z(T,\mu), \tag{3}$$

где $x \in R^n, z \in R^m, u \in R^r, A, B -$ постоянные матрицы с соответствующими размерностями. На управляющие величины наложены следующие ограничения:

$$|u_i| \le 1, \qquad i = \overline{1,r}\,. \tag{4}$$

Оптимальное управление будем искать, используя принцип максимума для задачи (1) – (4). Принцип максимума для линейной задачи Майера является не только необходимым, но и достаточным условием оптимальности [3].

В этом случае гамильтониан принимает форму

$$H = p^*(A_1 x + A_2 z + B_1 u) + q^*(A_3 x + A_4 z + B_2 u), \tag{5}$$

где векторы p и q являются решением сопряженной системы

$$\dot{p} = -A_1^* p - A_3^* q, \tag{6}$$

$$\mu \dot{q} = -A_2^* p - A_4^* q$$

и удовлетворяют конечному условию

$$p(T,\mu) = -d, \quad q(T,\mu) = -\frac{c}{\mu}. \tag{7}$$

Заметим, что $\max_{u \in V} H$ достигается вместе с $\max_{u \in V} [(p^* B_1 + q^* B_2) u]$ при

$$u_i(t,\mu) = sign\Phi_i(t,\mu), (i = \overline{1,r}), \tag{8}$$

где $\Phi_i(t,\mu) = \langle b_i^{(1)}, p \rangle + \langle b_i^{(2)}, q \rangle$, $b_i^{(1)}, b_i^{(2)} - n, m$ – мерные векторы, координатами которых являются элементы i –х столбцов матриц B_1 и B_2 соответственно, V – параллелепипед: $|u_i| \leq 1,\ i = \overline{1,r}$. Моменты переключения (точки разрыва) управления $u_i(t,\mu)$ совпадают с точками, при переходе через которые функции $\Phi_i(t,\mu)$ меняют знак. Для определенности будем считать, что управление в точках разрыва непрерывным справа. Тогда, если только ни на одном из сегментов, содержащихся внутри сегмента [0,T]

$$\Phi_i(t,\mu) \neq 0 \quad (i = \overline{1,r})$$

соотношение (8) однозначно определяет некоторое управление $u(t,\mu)$, которое (в силу того, что принцип максимума является для задачи (1) – (4) и достаточным условием оптимальности) будет оптимальным.

Таким образом, задача нахождения оптимального управления сводится к исследованию поведения функций $\Phi_i(t,\mu)\ \ (i = \overline{1,r})$.

Предположим, что для задачи (1) – (4) следующие условия выполнены

1. $$rank\left\{b_i^{(0)}, A_0 b_i^{(0)}, \dots, A_i^{(n-1)} b_i^{(0)}\right\} = n,$$
$$rank\left\{b_i^{(2)}, A_4 b_i^{(2)}, \dots, A_4^{(m-1)} b_i^{(2)}\right\} = m,$$

где $A_0 = A_1 - A_2 A_4^{-1} A_3$, $b_i^{(0)}$, $b_i^{(2)}$ -i – е столбцы матриц $B_0 = B_1 - A_2 A_4^{-1} B_2$, B_2 соответственно.

2. Все корни характеристического уравнения матрицы A_4 имеют отрицательные действительные части. Тогда система (1) имеет пограничный слой [1]. В этом случае система (6) имеет локальное интегральное многообразие

$$q = h(\mu) p, \tag{9}$$

где $h(\mu) -$ матрица порядка $m \times n$, элементы которой регулярно зависят от μ и удовлетворяют матричному уравнению

$$\mu h(A_1^* + A_3^* h) = A_2^* + A_4^* h, \tag{10}$$

Используя теорему о неявной функции, можно показать, что уравнение (10) имеет решение, представимое в виде сходящегося степенного ряда

$$h(\mu) = h_0 + \mu h_1 + \mu^2 h_2 + \cdots \tag{11}$$

Матрицы h_i (i=0,1,2) однозначно вычисляются путем приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях μ в равенстве (10), т.е.

$$h_0 = -A_4^{*-1} A_2^*,\ \ h_1 = A_4^{*-1} h_0 (A_1^* + A_3^* h_0), \dots, \tag{12}$$

$$h_i = A_4^{*-1}\left[h_{i-1} A_i^* + \sum_{j=0}^{i-1} h_j A_3^* h_{j-1+i}\right], \dots, \qquad i = 1,2, \dots$$

Для системы (6) при помощи матрицы $h(\mu)$ можно произвести разделение движений. Пусть $h(\mu)$ является решением матричного уравнения (10). Тогда замена $q = \eta + hp$ приводит систему (6) к виду

$$\dot{p} = -(A_1^* + A_3^* h) p - A_3^* \eta, \quad p(T,\mu) = -d, \tag{13}$$
$$\mu \dot{\eta} = -(A_4^* - \mu h A_3^*)\eta, \quad \eta(T,\mu) = -\frac{c}{\mu} + h(\mu) d.$$

Решение последнего уравнения запишем в виде

$$\eta(t) = e^{-(A_4^* - \mu h A_3^*)\frac{t-T}{\mu}} \left(-\frac{c}{\mu} + hd\right). \tag{14}$$

Теперь заменяя $\eta(t)$ в правой части первого уравнения (13), получаем

$$p(t) = -e^{-(A_1^* + A_3^* h)(t-T)} d + \int_t^T e^{-(A_1^* + A_3^* h)(t-s)} A_3^* e^{-(A_4^* - \mu h A_3^*)\frac{s-T}{\mu}} ds \eta_0, \tag{15}$$

где $\eta_0 = -\dfrac{C}{\mu} + hd$.

Так как корни характеристического уравнения матрицы A_4 имеют отрицательные действительные части, то интеграл

$$\int_{-\infty}^{T} e^{-(A_1^* + A_3^* h)(T-s)} A_3^* e^{-(A_4^* - \mu h A_3^*)\frac{s-T}{\mu}} \eta_0 \mathrm{ds} = \Delta \mathrm{p}_0 \qquad (16)$$

конечен. Из равенства

$$\int_{-\infty}^{T} F(t,s)ds - \int_{-\infty}^{t} F(t,s)ds = \int_{t}^{T} F(t,s)ds.$$

следует, что

$$p(t) = e^{-(A_1^* + A_3^* h)(t-T)}(-d + \Delta p_0) - \int_{-\infty}^{t} e^{-(A_1^* + A_3^* h)(t-s)} A_3^* e^{-(A_1^* + \mu h A_3^*)\frac{s-T}{\mu}} \eta_0 ds.$$

Тогда решение системы с конечными условиями

$$p(T,\mu) = p_0 = -d, \quad q(T,\mu) = q_0 = -\frac{C}{\mu}$$

можно записать в виде

$$p(t) = \overline{p}(t) + m_1(\tau), \quad q(t) = h(\mu)\overline{p}(t) + m_2(\tau), \qquad (17)$$

где $\tau = \dfrac{t-T}{\mu}$, $\overline{p} = e^{-(A_1^* + A_3^* h)(t-T)}(-d + \Delta p_0)$ − решение системы

$$\dot{\overline{p}} = -(A_1^* + A_3^* h)\overline{p}, \quad \overline{p}(T) = \overline{p}_0 = -d + \Delta p_0,$$

$$m_1 = -\mu \int_{-\infty}^{\tau} e^{(A_1^* + A_3^* h)(\tau-\sigma)\mu} A_3^* e^{-(A_4^* - \mu h A_3^*)\sigma} \eta_0 d\sigma = \mu A_3^* (A_4^* - \mu h A_3^*)^{-1} e^{-(A_4^* - \mu h A_3^*)\tau} \eta_0 + O(\mu^2 e^{\zeta\tau})$$

$$m_2 = e^{-(A_4^* - \mu h A_3^*)(\frac{t-T}{\mu})} \eta_{0,} \quad \eta_0 = -\frac{C}{\mu} + hd.$$

Очевидно, что для функции $m_1(\tau)$, $m_2(\tau)$ будут справедливы следующие оценки:

$$\|m_1\| \le \mu C_1 \|\eta_0\| e^{\gamma\tau}, \quad \|m_2\| \le C_2 \|\eta_0\| e^{\gamma\tau},$$

где $C_{1,} C_2, \gamma > 0$ -const, $\tau \le 0$. Если выбрать начальную точку $(p_0, q_0) = (-\dfrac{C}{\mu}, -d)$ принадлежащую многообразию $q = h(\mu)p$, то очевидно, что $\eta = 0$, $m_1 \equiv 0$, $m_2 \equiv 0$. Тогда $p(t) = \overline{p}(t)$, $q(t) = h(\mu)\overline{p}(t)$ − решение системы, траектория которого лежит на этом многообразии. Таким образом, можно сделать следующий вывод:

Теорема. Для любой начальной точки (p_0, q_0) можно определить такую точку $\left(p_0 + \Delta p_0, \quad h(p_0 + \Delta p_0)\right)$, лежащую на поверхности $q = h(\mu)p$, что решение системы (6), выходящее из точки (p_0, q_0) при $t = T$, неограниченно приближается при $\tau \to -\infty$ к решению $p = \overline{p}(t), \quad q = h(\mu)\overline{p}(t), \quad \overline{p}(T) = \overline{p}_{0,}$ лежащему на этой поверхности.

Учитывая выражения для функции $m_1(\tau)$, $m_2(\tau)$ из (17), вектор-функцию $\Phi(t,\mu) = B_1^* p + B_2^* q$ записываем как

$$\Phi(t,\mu) = \overline{B}_1^* e^{-\overline{A}_0^*(t-T)}\alpha_1 + \frac{1}{\mu}\overline{B_2^*} e^{-\overline{A}_4^*\tau}\alpha_2, \tag{18}$$

где $\overline{B}_1^* = B_1^* + B_2^* h, \quad \overline{B}_2^* = B_2^* + \mu B_1^* A_3^*(A_4^* - \mu h A_3^*)^{-1} + O(\mu^2 e^{\xi\tau}),$

$$\alpha_1 = \alpha_1(\mu) = -d + \Delta p_0, \; \alpha_2 = -C + \mu h d, \quad \overline{A}_0^* = A_1^* + A_3^* h, \tag{19}$$

$$\overline{A}_4^* = A_4^* - \mu h A_3^*,$$

при $\mu \to 0$ из (19) будем иметь следующие предельные соотношения:

$$\lim_{\mu\to 0}\overline{B}_1 = B_0 = B_1 - A_2 A_4^{-1} B_{2,} \quad \lim_{\mu\to 0}\overline{B}_2 = B_2, \quad \lim_{\mu\to 0}\overline{A}_0 = A_0 = A_1 - A_2 A_4^{-1} A_3,$$

$$\lim_{\mu\to 0}\overline{A}_4^* = A_4^*, \; \lim_{\mu\to 0}\alpha_1 = -d + A_3 * A_4^{-1} * C, \; \lim_{\mu\to 0}\alpha_2 = -C.$$

Теперь функция $\Phi_i(t,\mu)$ может быть написано как

$$\Phi_i(t,\mu) = <\overline{b}_i^{(1)}, e^{-\overline{A}_0(t-T)}\alpha_1> + <\overline{b}_i^{(2)}, \frac{1}{\mu} e^{-\overline{A}_4\tau}\alpha_2>, \tag{20}$$

где $\overline{b}_i^{(1)}, b_i^{(2)}$ - n, m – мерные векторы, координаты которых являются элементами i-го столбца матрицы $\overline{B}_1$ и $\overline{B}_2$ соответственно.

Приступим к исследованию функции $\Phi_i(t,\mu)$ $(i = \overline{1,r})$. Мы будем рассматривать два случая.

1. Допустим, что начальная точка $(-\frac{C}{\mu}, -d)$ системы (6) лежит на поверхности $q = hp$.

   Тогда функция $\Phi_i(t,\mu)$ будет иметь вид

$$\Phi_i = \overline{\Phi}_i(t,\mu) = <\overline{b}_i^{(0)}, e^{-\overline{A}_0^*(t-T)}\alpha_1>. \tag{21}$$

Функция $\overline{\Phi}_i(t,\mu)$ за короткий промежуток времени убывает, так как система (1) устойчива [4]. Тогда функция $\overline{\Phi}_i$ может быть представлена в форме [3]

$$\overline{\Phi}_i(t,\mu) = \sum_j^k \rho_{ji}(t) e^{-\lambda_i(\mu)(t-T)}, \tag{22}$$

где $\lambda_j(\mu)-$ $(j=\overline{1,k})$ попарно различные корни характеристического уравнения матрицы $\overline{A}_0$, каждое из них имеет кратности r_i $(\sum_{j=1}^{k} r_j = n)$, ρ_{ji} – многочлены, степень каждого из которых не превосходит $r_j - 1$.

На основе леммы, доказанной в [3], функция $\overline{\Phi_i}(t,\mu)$ имеет не более чем n-1 нулей. Таким образом, если начальная точка системы лежит на поверхности $q = hp$ и условие 1 выполнено, тогда максимальное количество моментов переключений не превышает $n-1$. Другими словами, число переключений управления

$$\overline{u}_i(t) = sign\{(\overline{b}_i^{(1)}, e^{-\overline{A}_0^*(t-T)}\alpha_1)\} \tag{23}$$

не превышает $n-1$.

2. Теперь рассмотрим другой случай, когда начальная точка системы (6) не лежит на поверхности *q=hp*. Оценим количество нулей функции $\Phi_i(t,\mu)$ в сегменте $[T-\alpha\mu\cdot|\ln\mu|, T]$, где α >0 достаточно большое, но фиксированное для $\mu\to 0$. С этой целью в формуле (20) введем новую переменную $\tau = \dfrac{t-T}{\mu}$:

$$\Phi_i(t,\mu) = <\overline{b}_i^{(1)}, \alpha_1> + <\overline{b}_i^{(2)}, \frac{1}{\mu}e^{-\overline{A}_4^*\tau}\alpha_2> + O(\tau\mu)\,. \tag{24}$$

Чтобы определить числа нулей, расположенные в малой окрестности точки $t = T$ интервала времени, рассмотрим функцию

$$\widetilde{\Phi}_i(t,\mu) = <\overline{b}_i^{(1)}, \alpha_1> + <\overline{b}_i^{(2)}, \frac{1}{\mu}e^{-\overline{A}_4^*\tau}\alpha_2>\,. \tag{25}$$

Предположим, что характеристические числа матрицы A_4^* имеют действительные отрицательные части, тогда при достаточно малых μ характеристические числа матрицы $\mathrm{A}_4^* = \mathrm{A}_4^* - \mu\mathrm{A}_3^* h$ будут близкими к характеристическим числам матрицы A_4^*. Аналогично (22) функция (25) может быть записана как

$$\widetilde{\Phi}_i = \widetilde{\Phi}_i^{(1)} + \frac{1}{\mu}\sum_{j=1}^{s} f_{ji}(\tau)e^{-\nu_j(\mu)\tau}, \quad \left(i=\overline{1,r}\right), \tag{26}$$

где $\widetilde{\Phi}_i^{(1)} = <\overline{b}_i^{(1)}, \alpha_1>$, $\qquad f_{ji}(\tau) = \sum_{k=1}^{m}\overline{b}_{ki}^{(2)} q_{jk}(\tau)$,

$\nu_j(\mu)$ – характеристические числа матрицы A_4 имеют кратности ω_i $(\sum_{j=1}^{s}\omega_i = m)$;

q_{jk} – многочлен, степень каждого не превышает $\omega_j - 1$.

Допустим $\widetilde{\Phi}_i^{(1)} \neq 0$. Функция (26) имеет не более чем *m* действительных корней, если предположить, что число $\nu_{s+1} = 0$ не появляется среди корней, то формула может быть записана следующим образом:

$$\widetilde{\Phi}_i = \widetilde{\Phi}_i^{(1)} e^{-\nu_{s+1}\tau} + \frac{1}{\mu}\sum_{j=1}^{s} f_{ji}(\tau) e^{-\nu_j \tau} \qquad \left(i=\overline{1,r}\right). \qquad (27)$$

Тогда в соответствии с вышеупомянутой леммой в [3] количество действительных корней (27) не превышает число

$$(\omega_1 - 1) + (\omega_2 - 1) + \ldots + (\omega_s - 1) + s = \omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_s = m.$$

Положим $\widetilde{\Phi}_i^{(1)}=0$, тогда функция $\widetilde{\Phi}_i(t,\mu)$ имеет не более чем $m-1$ действительных корней.

Таким образом, в общем случае функция $\widetilde{\Phi}_i(t,\mu)$ имеет не более чем m действительных корней на сегменте $[T-\alpha\mu\,|\ln\mu\,|, T]$. Следовательно, число нулей функции $\widetilde{\Phi}_i(t,\mu)$ в сегменте $[0,T]$ не превышает $n+m-1$. Предложенный способ разделения переменных состояния сопряженной системы позволяет:

- получить упрощенный алгоритм оптимального управления;
- сократить объем вычислительных процедур;
- выявить дополнительные моменты переключения управления вблизи правой границы промежутка времени переходного процесса.

Литература:

1. В.В. Стрыгин, В.А. Соболев. Разделение движений методом интегральных многообразий. М.:Наука, 1988.
2. М.Г. Дмитриев. О непрерывности решения задачи Майера по сингулярным возмущениям. Ж. Вычислит. мат. и мат. физ., 1972, 12, №3, 788-791 (в РЖМат, 1972, 95486).
3. И.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, В.Ф. Мищенко. Математическая теория оптимального процесса. М.: Наука, 1969.
4. Н.Н. Красовский. Теория управления движением. М.: Наука, 1968.