НЕУСТОЙЧИВОСТЬ СВЕРХОТРАЖЕНИЯ В ДВУХМЕРНЫХ ТЕЧЕНИЯХ ГАЗА СО СКАЧКОМ СКОРОСТИ

ФРИДМАН А.М., ТОРГАШИН Ю. М., ТУРДУЕВ М. У.
Московский физико-технический институт (Государственный университет)
Москва, Российская Федерация
mftimir@mail.ru

Мы будем рассматривать течение в вертикальной плоскости (x, z). Движение описывается Уравнение Эйлера.

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}P + \vec{g} \qquad (1)$$

Уравнение непрерывности.

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\left(\nabla\vec{V}\right) = 0 \qquad (2)$$

Уравнение адиабатичности.

$$\delta Q = 0\,;\ \partial Q = T\partial S = 0 \qquad (3)$$

Идеальный газ.

$$P = \frac{\rho}{\gamma}c_{s0}^2 \qquad (4)$$

Производный энтропии.

$$\frac{dS}{dt} = 0 \qquad (5)$$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{dP}{dt} - c_s^2\frac{d\rho}{dt} = 0 \qquad (5a)$$

Рассмотрим двухмерную задачу.

$$V_{0x}(z)\,;\ \rho_0(z);\ P_{0x}(z);\ c_s^2(z);$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + V_x\frac{\partial}{\partial x} + V_z\frac{\partial}{\partial z};$$

Тогда из уравнений Эйлера получаем (6.1) и (6.2), из уравнений (2) получаем (6.3), из уравнений (5a) получаем (6.4), из уравнений (4) получаем (6.5).

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial V_x}{\partial t}+V_x\dfrac{\partial V_x}{\partial x}+V_z\dfrac{\partial V_x}{\partial z} \quad -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial x} & (1)\\
\dfrac{\partial V_z}{\partial t}+V_x\dfrac{\partial V_z}{\partial x}+V_z\dfrac{\partial V_z}{\partial z}= \quad -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial z}-g_0 & (2)\\
\dfrac{\partial \rho}{\partial t}+V_x\dfrac{\partial \rho}{\partial x}+V_z\dfrac{\partial \rho}{\partial z}+\rho\left(\dfrac{\partial V_x}{\partial x}+\dfrac{\partial V_z}{\partial z}\right)=0 & (3)\\
\dfrac{\partial P}{\partial t}+V_x\dfrac{\partial P}{\partial x}+V_z\dfrac{\partial P}{\partial z}=c_{s0}^2\left(\dfrac{\partial \rho}{\partial t}+V_x\dfrac{\partial \rho}{\partial x}+V_z\dfrac{\partial \rho}{\partial z}\right) & (4)\\
P=\dfrac{1}{\gamma}c_{s0}^2\rho & (5)
\end{cases} \tag{6}
$$

В нашем случае $\{g=0,\gamma=1\}$

из граничных условии при $z=-L$ из системы (6) получаем.

$$
\left.
\begin{aligned}
(6.1) &\Rightarrow \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P_0}{\partial x}=0\\
(6.2) &\Rightarrow \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P_0}{\partial z}=0
\end{aligned}
\right\} \Rightarrow P_0=const
$$

$$
(6.3)\Rightarrow V_{0x}(z)\frac{\partial \rho_0}{\partial x} \quad 0 \Rightarrow \frac{\partial \rho_0}{\partial x}= \quad 0 \Rightarrow \rho_0=\rho_0(z);
$$

$$
(6.4)\Rightarrow (npu)\, c_{s0}^2 \quad const \Rightarrow \rho_0(z)=const;
$$

Линеаризация задачи.

$$
f(x,z,t)=f_0(z)+f_0(x,z,t);
$$

Тогда:

$$
\begin{cases}
V_x=V_{0x}(z)+V_{1x}(x,z,t)\\
V_z=V_{0z}(z)+V_{1z}(x,z,t)\\
P=P_0(z)+P_1(x,z,t)\\
\rho=\rho_0(z)+\rho_1(x,z,t)\\
c_{s0}^2=c_{s0}^2(z)+c_{s1}^2(x,z,t)
\end{cases} \tag{7}
$$

$$\begin{cases} (npu)z = -L \quad V_z(x, z \quad -L, t) \quad 0. \Rightarrow V_{1z}(x, z \quad -L, t) \quad 0 \\ (npu)z \to \infty \qquad\qquad \left| \vec{f}(x,z,t)\Big|_{z\to\infty} \right| \le A < \infty \end{cases}$$

Систему (7), используя в системе (6) и выбрасывая квадратичные и высокие члены и оставляя только линейные части, получим;

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V_{1x}}{\partial t} + V_{0x}\dfrac{\partial V_{1x}}{\partial x} + V_{1z}\dfrac{\partial V_{1x}}{\partial z} \quad -\dfrac{1}{\rho_0}\dfrac{\partial P_1}{\partial x} \\ \dfrac{\partial V_{1z}}{\partial t} + V_{0x}\dfrac{\partial V_{1z}}{\partial x} \quad -\dfrac{1}{\rho_0}\dfrac{\partial P_1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial \rho_1}{\partial t} + V_{0x}\dfrac{\partial \rho_1}{\partial x} + V_{1z}\dfrac{d\rho_0}{dz} + \rho_0\left(\dfrac{\partial V_{1x}}{\partial x} + \dfrac{\partial V_{1z}}{\partial z}\right) = 0 \\ \dfrac{\partial P_1}{\partial t} + V_{0x}\dfrac{\partial P_1}{\partial x} + V_{1z}\dfrac{dP_0}{dz} = c_{s0}^2\left(\dfrac{\partial \rho_1}{\partial t} + V_{0x}\dfrac{\partial \rho_1}{\partial x} + V_{1z}\dfrac{d\rho_0}{dz}\right) \end{cases} \tag{8}$$

Так как

$$\vec{f}_1(x,z,t) = \int d\omega \int dk_x \tilde{\vec{f}}^{k\omega}(t) \exp(i(k_x x - \omega t));$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \vec{f}_1}{\partial t} &= -i\omega \int d\omega \int dk_x \tilde{\vec{f}}^{k\omega}(t) \exp(i(k_x x - \omega t)) \\ \frac{\partial \vec{f}_1}{\partial x} &= ik_x \int d\omega \int dk_x \tilde{\vec{f}}^{k\omega}(t) \exp(i(k_x x - \omega t)) \end{aligned}\right\} \quad (9),$$

используя (9) в системе (8), получим.

$$\begin{cases} -ikc\tilde{V}_{1x} + ikV_{0x}\tilde{V}_{1x} + \tilde{V}_{1z}\dfrac{\partial V_{1x}}{\partial z} \quad -\dfrac{ik}{\rho_0}\tilde{P}_1 \\ -ikc\tilde{V}_{1z} + ikV_{0x}\tilde{V}_{1z} \quad -\dfrac{1}{\rho_0}\dfrac{\partial P_1}{\partial z} \\ -ikc\tilde{\rho}_1 + ikV_{0x}\tilde{\rho}_1 + \tilde{V}_{1z}\dfrac{d\rho_0}{dz} + \rho_0\left(ik\tilde{V}_{1x} + \dfrac{d\tilde{V}_{1z}}{dz}\right) = 0 \\ -ikc\tilde{P}_1 + ikV_{0x}\tilde{P}_1 + \tilde{V}_{1z}\dfrac{dP_0}{dz} = c_{s0}^2\left(-ikc\tilde{\rho}_1 + ikV_{0x}\tilde{\rho}_1 + \tilde{V}_{1z}\dfrac{d\rho_0}{dz}\right) \end{cases} \tag{10}$$

Введя обозначение $\tilde{c}(z) = c - V_{0x}(z)$, упростим (10):

$$
\begin{cases}
-ik_x\tilde{c}\tilde{V}_{1x} + \tilde{V}_{1z}\dfrac{\partial \tilde{V}_{1x}}{\partial z} \quad -\dfrac{ik_x}{\rho_0}\tilde{P}_1 \\
-ik_x\tilde{c}\tilde{V}_{1z} \quad -\dfrac{1}{\rho_0}\dfrac{\partial \tilde{P}_1}{\partial z} \\
-ik_x\tilde{c}\tilde{\rho}_1 + \tilde{V}_{1z}\dfrac{d\rho_0}{dz} + \rho_0\left(ik_x\tilde{V}_{1x} + \dfrac{\partial \tilde{V}_{1z}}{\partial z}\right) = 0 \\
-ik_x\tilde{c}\tilde{P}_1 + \tilde{V}_{1z}\dfrac{dP_0}{dz} = c_{s0}^2\left(-ik_x\tilde{c}\tilde{\rho}_1 + \tilde{V}_{1z}\dfrac{d\rho_0}{dz}\right)
\end{cases}
$$

(10a)

Введем Логранжовое смещение ξ вдоль z

$$V_{1z} = \frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial \xi}{\partial t} + V_x\frac{\partial \xi}{\partial x} + V_z\frac{\partial \xi}{\partial z}$$

(11)

так как $V_x = V_{0x} + V_{1x}$, $V_z = 0 + V_{1z}$, поставляя в (11), получим

$$V_{1z} = \frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial \xi}{\partial t} + V_{0x}\frac{\partial \xi}{\partial x}$$

(11a)

$\xi = \tilde{\xi}(z)\exp(i(k_x x - \omega t))$ и выражение (9), использовав в (11a), получим.

$$V_{1z} = -ik_x\tilde{c}\tilde{\xi}(z)$$

(12)

найденное (12) теперь поставим в систему (10a)

$$
\begin{cases}
-ik_x\tilde{c}\tilde{V}_{1x} - ik_x\tilde{c}\tilde{\xi}\dfrac{\partial V_{1x}}{\partial z} \quad -\dfrac{ik_x}{\rho_0}\tilde{P}_1 \\
-k_x^2\tilde{c}^2\tilde{\xi} \quad -\dfrac{1}{\rho_0}\dfrac{\partial \tilde{P}_1}{\partial z} \\
-ik_x\tilde{c}\tilde{\rho}_1 - ik_x\tilde{c}\tilde{\xi}\dfrac{d\rho_0}{dz} + \rho_0\left(ik_x\tilde{V}_{1x} - ik_x\tilde{c}\dfrac{d\tilde{\xi}}{dz}\right) = 0 \\
-ik_x\tilde{c}\tilde{P}_1 - ik_x\tilde{c}\tilde{\xi}\dfrac{dP_0}{dz} = c_{s0}^2\left(-ik_x\tilde{c}\tilde{\rho}_1 - ik_x\tilde{c}\tilde{\xi}\dfrac{d\rho_0}{dz}\right)
\end{cases}
$$

(13) =>

$$(14)\ \begin{cases} V_{1x} = \dfrac{\tilde{P}_1}{\rho_0 \tilde{c}} \\ \dfrac{\partial \tilde{P}_1}{\partial z} = \rho_0\, k_x^2\, \tilde{c}^2\, \tilde{\xi} \\ \dfrac{d\tilde{\xi}}{\partial z} = \dfrac{V_{1x}}{\tilde{c}} - \dfrac{\tilde{P}_1}{P_0} - \tilde{\xi}\, \dfrac{dLn(P_0)}{\partial z} \end{cases} \qquad =>$$

так как $P_0 = const \Rightarrow \dfrac{dLn(P_0)}{dz} = 0$,

$$(15)\ \begin{cases} \dfrac{\partial \tilde{P}_1}{\partial z} = \rho_0 k_x^2\, \tilde{c}^2\, \tilde{\xi} \\ \dfrac{\partial \tilde{\xi}}{\partial z} = \tilde{P}_1 \left(\dfrac{1}{\rho_0 \tilde{c}^2} - \dfrac{1}{\rho_0 c_{s0}^2} \right) \end{cases}$$

из уравнений (15.1) найдем $\tilde{\xi}$, и найденное $\tilde{\xi}$ подставим в (15.2) и отсюда получим окончательное уравнение:

$$\tilde{P}_1'' + \frac{2V_{0x}'(z)}{\left(c - V_{0x}(z)\right)} \tilde{P}_1' + \left(\frac{\left(c - V_{0x}(z)\right)^2 k_x^2}{c_{s0}^2} - k_x^2 \right) \tilde{P}_1 = 0 \qquad (16)$$

3. Вывод дисперсионного уравнения.

Условие

$$V_{0x} = \begin{cases} 0 & ; -L < z < -\delta & I - обл \\ V_0 \quad \cancel{const} & ; z > \delta & II - обл \\ \dfrac{V_0}{2}\left(1 + \dfrac{z}{\delta}\right) & ; |z| < \delta & III - обл \end{cases}$$

I-область.

$V_{0x} = 0$ тогда уравнение (16) принимает вид.

$$\tilde{P}_1'' + \left(\frac{c^2 k_x^2}{c_{s0}^2} - k_x^2 \right) \tilde{P}_1 = 0 \qquad (17)$$

Решение ищем в виде:

$$\tilde{P}_1 = C_1 \exp(ik_1 z) + C_2 \exp(-ik_1 z);$$

где: $$k_1{}^2 = k_x^2 \left(\frac{c^2}{c_{s0}^2} - 1 \right);$$

II − область.

$V_{0x} = V_0$, и уравнение (16) принимает вид.

$$\tilde{P}_1'' + \left(\frac{(c - V_0)^2 k_x^2}{c_{s0}^2} - k_x^2 \right) \tilde{P}_1 = 0; \qquad (18)$$

Решение ищем в виде:

$$\tilde{P}_2 = C_3 \exp(ik_2 z) + C_4 \exp(-ik_2 z);$$

где: $$k_2{}^2 = k_x^2 \left(\frac{(c - V_0)^2}{c_{s0}^2} - 1 \right);$$

III − область.

$$V_{0x} = \frac{V_0}{2} \left(1 + \frac{z}{\delta} \right);$$

$$V_{0x}'(z) = \frac{V_0}{2\delta}$$

Тогда урав.(16) примет вид:

$$\tilde{P}_1'' + \frac{\frac{V_0}{\delta}}{\left(c - \frac{V_0}{2}\left(1 + \frac{z}{\delta} \right) \right)} \tilde{P}_1' + \left(\frac{\left(c - \frac{V_0}{2}\left(1 + \frac{z}{\delta} \right) \right)^2 k_x^2}{c_{s0}^2} - k_x^2 \right) \tilde{P}_1 = 0 \quad ; \quad (19)$$

Т.к $c = \dfrac{\omega}{k_x}$, то из ур. (19) получим.

$$\tilde{P}_1'' - \frac{2k_xV_0}{\delta\left(\left(1+\frac{z}{\delta}\right)V_0k_x-2\omega\right)}\tilde{P}_1' - \left(k_x^2 - \frac{\left(\left(1+\frac{z}{\delta}\right)V_0k_x-2\omega\right)^2}{4c_{s0}^2}\right)\tilde{P}_1 = 0$$

(22a)

Аналитическое решение такого уравнения является непростой задачей. Тем не менее его удается решить следующим образом:

с помощью замены

$$t = \left(1+\frac{z}{\delta}\right)V_0k_x - 2\omega$$

$$\tilde{P}_1'(z) = \frac{V_0k_x}{\delta}\tilde{P}_t';$$

$$\tilde{P}_1''(z) = \left(\frac{V_0k_x}{\delta}\right)^2\tilde{P}_{tt}''$$

Получим

$$\tilde{P}_{tt}'' - \frac{2}{t}\tilde{P}_t' - \left(\frac{\delta}{k_xV_0}\right)^2\left(k_x^2 - \frac{t^2}{4c_{s0}^2}\right)\tilde{P} = 0 \qquad (20)$$

Зануляя в ур.(20) различные члены, можно с помощью программы Mathematica найти еще одну замену. $t^2 = q$: в результате уравнение (20) принимает вид:

$$4q\tilde{P}_{qq}'' - 2\tilde{P}_{qq}'' - \left(\frac{\delta}{k_xV_0}\right)^2\left(k_x^2 - \frac{q}{4c_{s0}^2}\right)\tilde{P} = 0 \qquad (20a)$$

С помощью замен $u = \left(\frac{i\delta q}{2k_xV_0c_{s0}}\right); P(u)\quad u^{\frac{3}{2}}\exp\left(-\frac{u}{2}\right)f(u)$ оно сводится к уравнению Куммера.

$$uf_{uu}'' + \left(\frac{5}{2}-u\right)f_u' - \left(\frac{5}{4} - i\frac{c_{s0}k_x\delta}{2V_0}\right)f = 0 \qquad (21)$$

Его решение выражается через вырожденные гипергеометрические функции M:

$$f\left(u\right)=C_5M\left(a;b;u\right)+C_6u^{1-b}M\left(1+a-b;2-b;u\right); \qquad (22)$$

где в данном случае $b=\frac{5}{2};a \quad \frac{5}{4}-i\frac{c_{s0}k_x\delta}{2V_0};$

Таким образом, решение уравнения (20а) имеет следующий вид:

$$\tilde{P}_3=C_5u^{\frac{3}{2}}\exp\left(-\frac{u}{2}\right)M\left(a;b;u\right)+C_6u^{\frac{5}{2}-b}\exp\left(-\frac{u}{2}\right)M\left(1+a-b;2-b;u\right) \qquad (23)$$

где $u=\frac{i\delta}{2kV_0c_{s0}}\left(\left(1+\frac{z}{\delta}\right)V_0k-2\omega\right)^2;$

Условие сшивки.

$$\begin{cases}\tilde{\xi}_1\left(z=-\delta\right)=\tilde{\xi}_3\left(z \quad -\delta\right)\\ \tilde{P}_1\left(z=-\delta\right)=\tilde{P}_3\left(z \quad -\delta\right)\\ \tilde{\xi}_2\left(z=\delta\right) \quad \tilde{\xi}_3\left(z \quad \delta\right)\\ \tilde{P}_2\left(z=\delta\right) \quad \tilde{P}_3\left(z \quad \delta\right)\\ \tilde{\xi}_1\left(z=-L\right)=0\\ C_4(k_i>0,z->\infty)=0\end{cases} \qquad (24)$$

$$\begin{cases}\tilde{P}_1=C_1\exp(ik_1z)+C_2\exp(-ik_1z)\\ \tilde{P}_2=C_3\exp(ik_2z)+C_4\exp(-ik_2z)\\ \tilde{P}_3=C_5u^{\frac{3}{2}}\exp\left(-\frac{u}{2}\right)M_1+C_6u^{\frac{5}{2}-b}\exp\left(-\frac{u}{2}\right)M_2\\ \tilde{\xi}=\frac{\tilde{P}_1}{\rho_0k_x^2\tilde{c}^2}\end{cases}$$

$$\tilde{\xi}_1 = \frac{ik_1}{\rho_0 k_2 \tilde{c}^2}\left(C_1 \exp(ik_1 z) - C_2 \exp(-ik_1 z)\right)$$

$$\tilde{\xi}_2 = \frac{ik_2}{\rho_0 k_2 \tilde{c}^2}\left(C_3 \exp(ik_2 z) - C_4 \exp(-ik_2 z)\right)$$

$$\tilde{\xi}_3 = \frac{1}{\rho_0 k^2 \tilde{c}^2}\left(C_5 \exp\left(-\frac{u}{2}\right) u^{\frac{1}{2}}\left(\frac{3}{2}M_1 - \frac{1}{2}u_1 M_1 + u_1 M_1\right) + C_6 \exp\left(-\frac{u}{2}\right)\left(M_2^{'} - \frac{1}{2}M_2\right)\right) u_z^{'}$$

$$где: u_z^{'} = \frac{\left(1+\dfrac{z}{\delta}\right)V_0 k_x - 2\omega}{c_{s0}} i$$

$$\tilde{\xi}_1\left(z=-\delta\right) = \tilde{\xi}_3\left(z \quad -\delta\right) \quad (25)$$

$$C_1 = C_2 \exp(2ik_1\delta) - \left(\frac{2\omega}{k_1 c_{s0}}\right)\begin{bmatrix} C_5 u_1^{\frac{1}{2}} \exp(-\frac{u_1}{2})(\frac{3}{2}M_{11} - \frac{u_1}{2}M_{11} + u_1 M_{11}^{'}) + \\ +C_6 \exp(-\frac{u_1}{2})(M_{12}^{'} - \frac{1}{2}M_{12}) \end{bmatrix}\exp(ik_1\delta)$$

$$\tilde{P}_1\left(z=-\delta\right) = \tilde{P}_3\left(z \quad -\delta\right) \quad (26)$$

$$C_1 = -C_2 \exp(2ik_1\delta) + \left[C_5 u_1^{\frac{3}{2}} \exp(-\frac{u_1}{2})M_{11} + C_6 \exp(-\frac{u_1}{2})M_{12})\right]\exp(ik_1\delta)$$

$$\tilde{\xi}_2\left(z=\delta\right) \quad \tilde{\xi}_3\left(z \quad \delta\right) \quad (27)$$

$$C_3 = -\exp(-ik_2\delta)\left(\frac{2\omega}{k_2 c_{s0}}\right)\left[C_5 u_2^{\frac{1}{2}} \exp(-\frac{u_2}{2})(\frac{3}{2}M_{21} - \frac{u_2}{2}M_{21} + u_2 M_{21}^{'}) + C_6 \exp(-\frac{u_2}{2})(M_{22}^{'} - \frac{1}{2}M_{22})\right]$$

$$\tilde{P}_2\left(z=\delta\right) \quad \tilde{P}_3\left(z \quad \delta\right) \quad (28)$$

$$C_3 = \exp(-ik_2\delta)\left[C_5 u_2^{\frac{3}{2}} \exp(-\frac{u_2}{2})M_{21} + C_6 \exp(-\frac{u_2}{2})M_{22})\right]$$

$$\tilde{\xi}_1\left(z=-L\right) = 0 \quad (29)$$

$$C_1 = C_2 \exp(2ik_1 L)$$

$$C_1 = C_1$$

$$\begin{cases} 2C_2 \exp(2ik_1\delta) = A \\ C_2(\exp(2ik_1L) - \exp(2ik_1\delta)) = B \\ C_2(\exp(2ik_1L) + \exp(2ik_1\delta)) = D \end{cases}$$

$$\begin{cases} A\frac{1}{2}\exp(-2ik_1\delta) = \dfrac{B}{\exp(2ik_1L) - \exp(2ik_1\delta)} \\ A\frac{1}{2}\exp(-2ik_1\delta) = \dfrac{D}{\exp(2ik_1L) + \exp(2ik_1\delta)} \end{cases}$$

$$\frac{D}{\exp(2ik_1L) + \exp(2ik_1\delta)} = \frac{B}{\exp(2ik_1L) - \exp(2ik_1\delta)} \quad (30)$$

где:

$$D = \exp(ik_1\delta)(C_5u_1^{\frac{3}{2}}\exp(-\frac{u_1}{2})M_{11} + C_6\exp(-\frac{u_1}{2})M_{12})$$

$$B = -(\frac{2\omega}{k_1c_{s0}})\left[C_5u_1^{\frac{1}{2}}\exp(-\frac{u_1}{2})(\frac{3}{2}M_{11} - \frac{u_1}{2}M_{11} + u_1M_{11}^{'}) + C_6\exp(-\frac{u_1}{2})(M_{12}^{'} - \frac{1}{2}M_{12})\right]\exp(ik_1\delta)$$

Используя эти выражения, получим:

$$\begin{cases} C_5u_1^{\frac{3}{2}}\exp(-\frac{u_1}{2})M_{11} + C_6\exp(-\frac{u_1}{2})M_{12} = -\dfrac{\exp(2ik_1L) + \exp(2ik_1\delta)}{\exp(2ik_1L) - \exp(2ik_1\delta)}(\dfrac{2\omega}{k_1c_{s0}})* \\ *\begin{bmatrix} C_5u_1^{\frac{1}{2}}\exp(-\frac{u_1}{2})(\frac{3}{2}M_{11} - \frac{u_1}{2}M_{11} + u_1M_{11}^{'}) + \\ C_6\exp(-\frac{u_1}{2})(M_{12}^{'} - \frac{1}{2}M_{12}) \end{bmatrix} \\ C_5u_2^{\frac{3}{2}}\exp(-\frac{u_2}{2})M_{21} + C_6\exp(-\frac{u_2}{2})M_{22}) = -(\dfrac{2\omega}{k_2c_{s0}})\begin{bmatrix} C_5u_2^{\frac{1}{2}}\exp(-\frac{u_2}{2})(\frac{3}{2}M_{21} - \frac{u_2}{2}M_{21} + u_2M_{21}^{'}) + \\ C_6\exp(-\frac{u_2}{2})(M_{22}^{'} - \frac{1}{2}M_{22}) \end{bmatrix} \end{cases}$$

обозначим $\dfrac{\exp(2ik_1L) + \exp(2ik_1\delta)}{\exp(2ik_1L) - \exp(2ik_1\delta)} = Exp()$.

Тогда

$$\begin{cases} C_5(u_1^{\frac{3}{2}}\dfrac{k_1c_{s0}Exp()}{2\omega}M_{11} + u_1^{\frac{1}{2}}(\frac{3}{2}M_{11} - \frac{u_1}{2}M_{11} + u_1M_{11}^{'})) = C_6(\frac{1}{2}M_{12} - M_{12}^{'} - \dfrac{k_1c_{s0}Exp()}{2\omega}M_{12}) \\ C_5(u_2^{\frac{3}{2}}M_{21} + (\dfrac{2\omega}{k_2c_{s0}})u_2^{\frac{1}{2}}(\frac{3}{2}M_{21} - \frac{u_2}{2}M_{21} + u_2M_{21}^{'})) = C_6((\frac{1}{2}M_{22} - M_{22}^{'})\dfrac{2\omega}{k_2c_{s0}} - M_{22}) \end{cases}$$

Отсюда находим.

$$C_6=\frac{(u_2^{\frac{3}{2}}M_{21}+(\frac{2\omega}{k_2c_{s0}})u_2^{\frac{1}{2}}(\frac{3}{2}M_{21}-\frac{u_2}{2}M_{21}+u_2M_{21}^{'}))}{(\frac{1}{2}M_{12}-M_{12}^{'}-\frac{k_1c_{s0}Exp()}{2\omega}M_{12})}C_5$$

$$C_6=\frac{(u_2^{\frac{3}{2}}M_{21}+(\frac{2\omega}{k_2c_{s0}})u_2^{\frac{1}{2}}(\frac{3}{2}M_{21}-\frac{u_2}{2}M_{21}+u_2M_{21}^{'}))}{((\frac{1}{2}M_{22}-M_{22}^{'})\frac{2\omega}{k_2c_{s0}}-M_{22})}C_5$$

Приравнивая $C_6=C_6$, получим уравнение дисперсии. (24)

$$\frac{(u_2^{\frac{3}{2}}M_{21}+(\frac{2\omega}{k_2c_{s0}})u_2^{\frac{1}{2}}(\frac{3}{2}M_{21}-\frac{u_2}{2}M_{21}+u_2M_{21}^{'}))}{(\frac{1}{2}M_{12}-M_{12}^{'}-\frac{k_1c_{s0}Exp()}{2\omega}M_{12})}-\frac{(u_2^{\frac{3}{2}}M_{21}+(\frac{2\omega}{k_2c_{s0}})u_2^{\frac{1}{2}}(\frac{3}{2}M_{21}-\frac{u_2}{2}M_{21}+u_2M_{21}^{'}))}{((\frac{1}{2}M_{22}-M_{22}^{'})\frac{2\omega}{k_2c_{s0}}-M_{22})}=0$$

где:

$$a=\frac{5}{4}-i\frac{c_{s0}k\delta}{2V_0};$$

$$b=\frac{5}{2};$$

$$u_1(-\delta)=\frac{4\omega^2 i\delta}{2kV_0c_{s0}};$$

$$u_2(\delta)=\frac{i\delta}{2kV_0c_{s0}}(2kV_0-2\omega)^2;$$

$$k_2{}^2=k^2(\frac{(C-V_0)^2}{c_{s0}^2}-1);$$

$$k_1{}^2=k^2(\frac{C^2}{c_{s0}^2}-1);$$

$$M_{11}=(a,b,u_1);$$
$$M_{12}=(1+a-b,2-b,u_1);$$
$$M_{21}=(a,b,u_2);$$
$$M_{22}=(1+a-b,2-b,u_2);$$
$$Exp()=\frac{\exp(2ik_1L)+\exp(2ik_1\delta)}{\exp(2ik_1L)-\exp(2ik_1\delta)};$$

Литература.

1. Lamb H. Hydrodynamics, 6-th edn. – Cambridge Univ. Press, 1932. (Перевод 6-го английского издания: Ламб Г. Гидродинамика. – М.-Л.:, ОГИЗ, 1947 г., 928 с.).

2. Л.Д.тЛандау, Е.М. Лифшиц. Теоретическая физика, т.6, Гидродинамика. – М.:, Наука, 1986 г., 736 с.

3. А.Г. Морозов, М.В. Незлин, Е.Н. Снежкин, А.М. Фридман. Моделирование процесса генерации спиральной структуры галактик на установке с вращающейся жидкостью. – Письма в ЖЭТФ, 1984, т.39, с. 504-507; УФН, 1985, т.145, с.161.

4. А.Г. Морозов, М.В. Незлин, Е.Н.Снежкин, Ю.М. Торгашин, А.М. Фридман. Исследование неустойчивости Кельвина-Гельмгольца (НКГ) газовых дисков галактик и слоя вращающейся мелкой воды. // Астрон. Циркуляр, 1985, №1414, с. 1–4.

5. Ю.М. Торгашин. Коллективные процессы в газовых галактических и аккреционных дисках. – Диссертация канд. физ.-мат. наук. Тарту, 1986, 175 с.

6. А.М. Фридман. Теория градиентных неустойчивостей газового галактического диска и вращающейся мелкой воды. ЖЭТФ, 1990, т.98, вып.4, с.1121–1137.