УДК 532. 546+518.5

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ВОДОПРОВОДИМОСТИ ПЛАСТА МЕТОДОМ ИТЕРАЦИИ

БАЙБОЛОТОВ. А.
кафедра прикладной математики Иссык-Кульского госуниверситета им. К. Тыныстанова, Кыргызская Республика
eldos4@mail.ru

IDENTIFICATION PERMEABILITY OF AQUIFERS BY A METHOD OF ITERATION

BAYBOLOTOV B.A.
Kyrgyz Republic, Issykkul states university by K.Tynystanov, faculty of applied mathematics
eldos4@mail.ru

Приводится алгоритм метода идентификации водопроводимости водоносных горизонтов и сравниваются с результатами решения тестовой задачи другими методами.

The algorithm of a method of identification permeability of aquifers of horizons is resulted and are compared to results of the decision of a test task by other methods.

Для достоверного описания процесса фильтрации подземных вод необходимо привести в соответствие математическую модель изучаемого объекта. В существующих методах моделирования все еще отсутствуют эффективные подходы идентификации основных гидрогеологических параметров пористых сред. Из-за недостаточности информации исследователи вынуждены использовать в математических моделях не совсем достоверные, а в действительности грубо осредненные значения этих параметров.

Определение гидрогеологических параметров опытно-фильтрационными методами сопряжено со значительными материальными и временными затратами. Поэтому целесообразно использовать математические методы расчета искомых параметров. Одним из основных гидрогеологических параметров, характеризующих водоносные пласты, является водопроводимость. Задача идентификации водопроводимости в неоднородной пористой среде сводится к решению коэффициентной обратной задачи для уравнения напорной фильтрации. Для обеспечения единственности решения должны быть заданы значения напоров и искомой функции в некоторых дискретных множествах точек, полученные наблюдением и/или экспериментом.

В зависимости от степени изученности области фильтрации в некоторых точках могут задаваться значения напорной функции $H(x,y)$, коэффициента фильтрации $k(x,y)$, водопроводимости $T(x,y)$, упругой водоотдачи $\mu(x,y)$ и инфильтрации $f(x,y)$. По этим неполным данным необходимо восстановить картину течения жидкости, т.е. идентифицировать фильтрационный поток.

Пусть в области фильтрации заданы значения напора и водопроводимости

$$H(x_i, y_i) = H_i^Э, \quad (x_i, y_i) \in R_q, \quad i = 1, 2, \ldots, q, \tag{1}$$

$$T(x_i, y_i) = T_i^Э, \quad (x_i, y_i) \in S_p, \quad i = 1, 2, \ldots, p, \tag{2}$$

где $H_i^Э$, $T_i^Э$ – значения указанных величин, полученные из эксперимента или путем наблюдений; R_q и S_p – некоторые дискретные множества, состоящие из q и p точек соответственно. Требуется доопределить значения напоров и водопроводимости в области фильтрации D, где заданы множества R_q и S_p, считая остальные параметры потока известными. Такая задача рассматривалась в работе [1].

В стационаром случае плановый фильтрационный поток описывается уравнением

$$LH = f, \quad (x, y) \in D \tag{3}$$

с краевым условием

$$lH = \alpha, \quad (x, y) \in \Gamma = \partial D. \tag{4}$$

Здесь

$$L = -\frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(T\frac{\partial}{\partial y}\right) + Q, \quad l = T\frac{\partial}{\partial n} - \beta,$$

$H = H(x, y)$ – функция напора, *м*; $T = T(x, y)$ – водопроводимость водоносного пласта, *м*^{2}*/сут*; $Q = Q(x,y)$ – функция, учитывающая переток из ниже- и вышележащих пластов, *м/сут*; $f = f(x, y)$ – функция источников и стоков, *м/сут*; $\alpha = \alpha(x, y)$, *м*^{2}*/сут* и $\beta = \beta(x, y)$, *м/сут* – заданные функции, D – область фильтрации в плане, Γ – ее граница, $\partial/\partial n$ – производная по внешней нормали к границе области.

Задачу (3) – (4) при известных функциях T, Q, f, β, α и известной границе Γ можно решить методом конечных элементов [2, 3]. Плоскую область D произвольным образом разбиваем на m треугольные элементы. Пусть элемент Δ_e имеет своими вершинами точки i, j, k с координатами (x_i, y_i), (x_j, y_j), (x_k, y_k). Внутри этого элемента решение задачи ищется в виде линейной комбинации

$$H^e(x, y) = N_i(x, y)H_i + N_j(x, y)H_j + N_k(x, y)H_k, \tag{5}$$

где

$$H_s = H(x_s, y_s), \quad s = i, j, k,$$

$$N_i = a_i + b_i x + c_i\ y, \quad N_j = a_j + b_j x + c_j\ y, \quad N_k = a_k + b_k x + c_k\ y,$$

$$a_i = \frac{x_j y_k - x_k y_j}{2\Delta_e}, \quad b_i = \frac{y_j - y_k}{2\Delta_e}, \quad c_i = \frac{x_k - x_j}{2\Delta_e},$$

и т.д.; остальные коэффициенты выписываются с помощью круговой постановки индексов i, j, k; Δ_e – площадь треугольника Δ_e.

Составляя для каждого элемента выражение вида (5) и суммируя их по всем элементам, получаем разложение для искомой функции

$$H(x, y) \approx H_n(x, y) = \sum_{i=1}^{n} H_i N_i(x, y). \tag{6}$$

Подставим в задаче (3), (4) вместо H функцию $H_n(x, y)$ из (6), применяем к этой задаче обобщенный принцип Галеркина и после упрощения с помощью формулы Грина получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно H_j:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ji} H_i = b_j, \quad j = 1,2,\ldots,n, \tag{7}$$

где

$$a_{ji} = \iint\limits_D T\, q(N_i, N_j) d\sigma + \iint\limits_D N_j N_i Q d\sigma + \int\limits_\Gamma N_j N_i \beta ds$$

$$b_j = \iint\limits_D f N_j d\sigma + \int\limits_\Gamma \alpha N_j ds$$

$$q(N_i, N_j) = \frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial y}.$$

Для вычисления коэффициентов и правых частей системы (7) интегралы по области разбиваются на m интегралов по треугольникам и вычисляются лишь по элементам, номера вершин которых соответствуют индексам коэффициентов. То же самое можно сказать о контурных интегралах. Каждый узел сетки является общей вершиной нескольких элементов, поэтому матрица системы не только симметрична, но и имеет диагональное преобладание, что позволяет применять для ее решения точные методы.

К задаче идентификации водопроводимости можно использовать различные подходы. Мы рассмотрим метод, который условно назовем методом итераций, хотя итерации используются и в других методах. Алгоритм этого метода предложен в работе [1], который состоит в последовательном решении задачи (3), (4) относительно $H(x, y)$ и $T(x, y)$ с использованием условий (1) и (2). Алгоритм решения задачи строится следующим образом.

В сеточной области функцию $T(x, y)$ представим в виде

$$T(x, y) \approx T_n(x, y) = \sum_{i=1}^{n} T_i N_i(x, y) \qquad (8)$$

и в первом приближении задаем ее значения произвольным образом из интервала $[T^Э_{min},\ T^Э_{max}]$, а в узлах, совпадающих с точками множества S_p, задаем значения $T_i^Э$. Применяя к задаче (3), (4) с условием (1) обобщенный принцип Галеркина, получаем систему уравнений

$$\iint\limits_D N_i(LH - f) d\sigma + \sum_{s=1}^{q} \left| H_s - H_s^Э \right| + \int\limits_\Gamma N_i(lH - \alpha) ds = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \qquad (9)$$

После подстановки вместо H функции $H_n(x, y)$ из (6) с учетом формулы Грина приходим к системе

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} H_j = g_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \qquad (10)$$

где

$$a_{ij} = \iint\limits_D T\, q(N_i, N_j)\, d\sigma + \iint\limits_D N_i N_j Q\, d\sigma - \int\limits_\Gamma N_i N_j \beta\, ds + \delta_j,$$

$$g_i = \iint\limits_D N_i f\, d\sigma + \int\limits_\Gamma N_i \alpha\, ds + \sum_{s=1}^{q_i} \delta_s H_s^э.$$

Здесь q_i – число узлов шаблона, центром которого является узел i (включая сам узел i);

$$\delta_s = \begin{cases} 1, & \text{если значение } H_s^э \text{ задано,} \\ 0, & \text{если } H_s^э \text{ не задано,} \qquad s = 1,2,\ldots,n. \end{cases}$$

Решение $H^{(1)}(x,y)$ системы (10) является первым приближением напорной функции $H(x,y)$. Используя полученные значения $H_i^{(1)}$ $(i=1,2,\ldots,n)$ и условие (2), решаем задачу (3), (4) относительно водопроводимости $T(x,y)$. Здесь, кроме выполнения внутренних условий (2), потребуем также, чтобы вариация искомой функции стремилась к нулю. Это условие должно обеспечить требуемую гладкость функции $T(x,y)$. Тогда вместо (9) получаем систему

$$\iint_D N_i (LH_n - f)d\sigma + \iint_D N_i\ \delta T\ d\sigma + \sum_{s=1}^{p}\left|T_s - T_s^э\right| + \int_\Gamma N_i (lH_n - \alpha)ds = 0,$$
$$i=1,2,...n,$$

где $\delta T = T - \widetilde{T}$, $\widetilde{T}$ –значения функции T, полученные из предыдущей итерации. Применяя формулу Грина и подставляя вместо T_n ее разложение (8), приходим к системе

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij} T_j = d_i, \qquad i = 1,2,...,n, \tag{11}$$

где

$$c_{ij} = \iint_D N_j\ q(N_i, H_n)d\sigma + \iint_D N_i N_j\ d\sigma + \gamma_j, \tag{12}$$

$$d_i = \iint_D N_i f\ d\sigma - \iint_D N_i H_n Q\ d\sigma + \iint_D N_i\ \widetilde{T}_n d\sigma + \gamma_i T_i^э + \int_\Gamma N_i (\beta H_n + \alpha)ds,$$

$$\gamma_s = \begin{cases} 1, & \text{если значение } T_s^э \text{ задано}, \\ 0, & \text{если значение } T_s^э \text{ не задано}, \qquad s = 1,2,..., p. \end{cases}$$

Решив систему (11), получаем второе приближение $T^{(2)}(x, y)$ и подставляя его вместо T, снова приходим к системе (10). Решение этой системы, т.е. второе приближение функции $H(x,y)$, используем для нахождения $T^{(3)}(x,y)$ из системы (11) и т.д. Итерационный процесс продолжается до выполнения условия

$$\max_i\left|H_i^{(v)} - H_i^{(v-1)}\right| < \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, n, \tag{13}$$

где v – номер итерации, $\varepsilon > 0$ – заданное малое число.

Наибольшую трудность в этой задаче представляет решение системы (11). Как видно из формул (12), коэффициенты этой системы мало отличаются друг от друга, вследствие чего ее матрица является почти вырожденной. Для решения такой плохо обусловленной системы необходимо применять метод сингулярного разложения матрицы [4].

В табл.1 сравниваются максимальные относительные погрешности, полученные при определении функции $T(x,y)$ методами итераций, регуляризации и возмущений. Задача идентификации с использованием методов регуляризации и малых возмущений является устойчивой процедурой, что очень важно при проведении гидрогеологических расчетов в реальных условиях. Но следует отметить, что метод регуляризации требует большого количества вычислений, пропорциональных количеству узлов сетки.

Таблица 1

Относительные погрешности в определении водопроводимости различными методами (в процентах)

q	p	Метод итераций	Метод регуляризации	Метод возмущений

17	17	8.8	6.3	7.1
17	13	10.2	9.6	7.4
13	17	11.0	10.4	7.3
13	7	11.7	11.2	8.5
7	13	9.7	10.6	7.7
7	4	17.4	12.3	8.6
4	7	11.5	9.1	8.7
4	4	23.5	12.7	9.3

Рассмотренный метод идентификации водопроводимости дает вполне приемлемые для практики результаты, и он может применяться в гидрогеологических расчетах.

Литература

1. Джаныбеков Ч. Моделирование гидрогеодинамических процессов с применением ЭВМ. – Фрунзе: Илим, 1989. – 183с.
2. Джаныбеков Ч., Мурзакматов М.У. Методы идентификации гидрогеологических параметров и прогнозирования процессов загрязнения подземных вод. – Бишкек: Илим, 2005. – 180с.
3. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. – М.: Мир, 1979. – 392с.
4. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений. – М.: Мир, 1980. – 279с.