РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО АРГУМЕНТА

АШИРБАЕВ А.Ж., МАМБЕТОВ Ж.И., ОшТУ
izvestiya@ktu.aknet.kg

Рассмотрим систему интегро-дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}+\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(x)\frac{\partial u_j}{\partial x_j}=f_i(t,x)+\int_0^t K(t,s)u_i(s,x)ds \qquad (1)$$

$i=1,\ldots,n$

$(t,x)\in Q(T)=\{0\le t\le T,\, x=(x_1,x_2,..x_n)\in R^n\},$

с начальными условиями

$$u_i(0,x)=\varphi_i(x),\quad x\in R^n,\quad i=1,\ldots,n \qquad (2)$$

Пусть в системе (1):

$$\frac{a_{1i+1}}{a_{11}}=\frac{a_{2i+1}}{a_{21}}=\ldots=\frac{a_{ni+1}}{a_{n1}}=b_{i+1},\quad (i=1,\ldots,n-2).$$

Будем обозначать через $C_b^{(n)}$ -класс функций, непрерывных и ограниченных вместе со своими производными до *k*–го порядка.

Теорема 6. Пусть $a_{ij}(x),\in C_b^{(1)}(R^n),\quad i,j=1,\ldots,n,$

$$f(t,x)\in C_b^{(1)}(Q(T)\qquad K(t,s)\in C_b(D),\qquad \left|\ \frac{\partial a_{11}}{\partial x_1}+b_2\frac{\partial a_{21}}{\partial x_2}+\ldots+b_n\frac{\partial a_{n1}}{\partial x_n}\ \right|\le N.$$

$$|K(t,s)|\le M=const,\quad D=\{0\le s\le t<\infty\}$$

Тогда система интегро-дифференциальных уравнений (1) с начальным условием (2) имеет единственное решение в области:

$C_b^{(1)}(Q(T_*)$, где T_* − решение уравнения $\Omega(t)=1$, где $\Omega(t)=Nt+Mt^2$.

Введем обозначение:

$$W(t,x;u)=\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+b_2\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\ldots+b_n\frac{\partial u_n}{\partial u_n}. \qquad (3)$$

Тогда из (1) имеем:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}+a_{i1}W=\ f_i(t,x)+\int_0^t K(t,s)u_i(s,x)ds,\quad i=1,\ldots,n. \qquad (4)$$

Дифференцируем первое уравнение (4) (при *i=1*) по x_1, второе по $x_2,\ldots,$ n - е по x_n, получаем:

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial t\partial x_i}+\frac{\partial a_{i1}}{\partial x_i}W+a_{i1}\frac{\partial W}{\partial x_i}=\frac{\partial f_i}{\partial x_i}+\int_0^t\ K(t,s)\frac{\partial u_i(s,x)}{\partial x_i}ds,\quad i=1,\ldots,n. \quad (5)$$

Отсюда, умножая второе уравнение (5) $b_2,\ldots,$ n-е b_n суммируя правые и левые части, получаем:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t \partial x_1} + b_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial t \partial x_2} + \ldots + b_n \frac{\partial^2 u_n}{\partial t \partial x_n} + \left(\frac{\partial a_{11}}{\partial x_1} + b_2 \frac{\partial a_{21}}{\partial x_2} + \ldots + b_n \frac{\partial a_{n1}}{\partial x_n} \right) W +$$

$$+ a_{11} \frac{\partial W}{\partial x_1} + a_{22} \frac{\partial W}{\partial x_2} + \ldots + a_{nn} \frac{\partial W}{\partial x_n} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + b_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \ldots + b_n \frac{\partial f_n}{\partial x_n} +$$

$$+ \int_0^t K(t,s) W(s,x) ds.$$

Введем обозначения:

$$- A(x) = \frac{\partial a_{11}}{\partial x_1} + b_2 \frac{\partial a_{21}}{\partial x_2} + \ldots + b_n \frac{\partial a_{n1}}{\partial x_n},$$

$$G(t,x) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + b_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \ldots + b_n \frac{\partial f_n}{\partial x_n},$$

$$W(t,x;u)|_{t=0} = \psi(x). \qquad (6)$$

Тогда получаем:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + a_{11} \frac{\partial W}{\partial x_1} + a_{22} \frac{\partial W}{\partial x_2} + \ldots + a_{nn} \frac{\partial W}{\partial x_n} = A(x) \cdot W +$$

$$+ \int_0^t K(t,s) W(s,x) ds + G(t,x). \qquad (7)$$

Итак, мы привели систему интегродифференциальных уравнений к уравнению в частных производных первого порядка.

Применяя для задачи (7) – (6) метод дополнительного аргумента, получаем:

$$W(t,x;u) = \psi(p(o,t,x)) + \int_0^t A(p(v,t,x)) W(v, p(v,t,x);u)) dv +$$

$$+ \int_o^t G(v, p(v,t,x)) dv + \int_0^t \int_0^v K(v,s) W(s, p(v,t,x)) ds dv, \qquad (8)$$

где $p(s,t,x) = (p_1(s,t,x), \ldots, p_n(s,t,x))$ решение системы интегральных уравнений:

$$p_i(s,t,x) = x_i - \int_s^t a_{ii}(p_i(v,t,x)) dv, \quad i = 1..n. \qquad (9)$$

$$(s,t,x) \in D(T) = \{x \in R^n, \quad 0 \le s \le t < T\}.$$

Система интегральных уравнений (9) с $a_{ii}(x) \in \overline{C}_b^{(1)}(D), i = 1..n$ имеет единственное решение с условием $p_i(s,s,x) = x_i$. В этом можем убедиться, используя метод последовательных приближений.

Из (9) вытекает соотношение:

$$\frac{\partial p_i}{\partial x_1} + a_{11} \frac{\partial p_i}{\partial x_2} + \ldots + a_{nn} \frac{\partial p_i}{\partial x_n} = 0, \ (s,t,x) \in D(T). \qquad (10)$$

Для интегрального уравнения (8) применяем метод последовательных приближений, полагая:

$$W_0(t,x;u) = \psi(p(o,t,x)) + \int_o^t G(v, p(v,t,x)) dv,$$

$$W^N(t,x;u)=\psi(p(o,t,x))+\int_0^t A(p(v,t,x))W^{N-1}(v,p(v,t,x);u))dv+$$

$$+\int_o^t G(v,p(v,t,x))dv+\int_0^t\int_0^v K(v,s)W^{N-1}(s,p(v,t,x))dsdv.$$

Для $N=1,2,3\dots$ справедливы неравенства:

$$\left\|W^N(t,x;u)-W^{N-1}(t,x;u))\right\|\le\Omega(t)\left\|W^{N-1}(t,x;u)-W^{N-2}(t,x;u)\right\|,$$

где $\|W(t,x;u)\|=\max\{|W(t,x;u)| \quad (t,x)\in Q(T)$.

Таким образом, интегральное уравнение (8) имеет единственное решение $W(t,x;u)$.

Подставляя $W(t,x;u)$ в уравнение (4) и интегрируя обе части уравнения по t, получаем систему интегральных уравнений относительно неизвестной: $u(t,x)=(u_1(t,x),..u_n(t,x))$,

$$u_i(t,x)=\varphi_i(x)-\int_0^t a_{i1}W(s,x;u)ds+ \qquad (11)$$

$$+\int_0^t f_i(s,x)ds+\int_0^t\int_0^v K(v,s)u_i(v,x)dsdv, \quad i=1,...,n.$$

Для интегрального уравнения, (11) применяя метод последовательных приближений, полагая:

$$u_i^0(t,x)=\varphi_i(x)-\int_0^t a_{i1}W(s,x;u)ds+\int_0^t f_i(s,x)ds, \quad i=1,...,n,$$

получаем оценку

$$\left\|u_i^N(t,x)-u_i^{N-1}(t,x))\right\|\le Mt^2\left\|u^{N-1}(t,x)-u^{N-2}(t,x)\right\|, \ i=1,...,n.$$

Литература

1. *Иманалиев М.И., Алексеенко С.Н.* К теории нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных типа Уизема // Докл. АН, 1992. –Т.323, №3. –С. 410 − 414.
2. *Иманалиев М.И., Алексеенко С.Н.* К теории систем нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных типа Уизема // Докл. АН, 1992. –Т.325, №6. –С. 1111 − 1115.
3. *Иманалиев М.И., Аширбаева А.Ж., Иманалиев Т.И.* Метод дополнительного аргумента в теории нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных высшего порядка //Исслед. по интегро- дифференц. Уравнениям.-Бишкек: Илим, 1997. Вып.26. −С.3 − 8.
4. *Аширбаева А.Ж.* Исследование решений нелинейных интегро- дифференциальных уравнений высшего порядка типа Уизема// Исслед. по интегро-дифференц. Уравнениям. −Бишкек: Илим, 1999. −Вып.28. −С.159 − 165.