

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ СХОДЯЩЕЙСЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ

АСАНОВ Д.С.

Институт Океанологии им. П.П. Ширшова РАН, Москва

ЖАЙНАКОВ А., КУРУЧБЕКОВ Т.А.

ИТuMM КГТУ им. И.Раззакова, Бишкек

izvestiya@ktu.aknet.kg

Разработаны математическая модель и метод численного исследования сильного сжатия газа при взрыве проволоки однослойной электрической катушки. Проведены численные расчеты сходящейся ударной волны при разных показателях адиабаты сжимаемого газа. Установлено, что в ходе куммуляции давление, плотность, температура и скорость среды в полости цилиндра заметно растут, что это явление может быть использовано в задачах микро-нанотехнологии.

Ударные волны могут возникать в какой-либо сжимаемой среде в результате достаточно резкого повышения давления в этой среде, например в результате взрыва.

Теория ударных волн была создана Риманом, Ренкиным и Гюгонио, которые установили основные свойства ударных волн из рассмотрения общих уравнений газовой динамики. Существенное развитие в этой области достигнуто в работах советских ученых: Л.И.Седова, Я.Б.Зельдовича, О.Е.Власова, Л.Д.Ландау, К.П.Станюковича и др.

При изучении неустановившихся пространственных движений газа наибольший интерес и практический смысл представляют движения, обладающие симметрией [1,2]. Рассмотрим задачу о сходящейся к оси симметрии цилиндра сильной ударной волны, которая обусловлена взрывом проволоки электрической катушки при коротком замыкании на электрических силовых установках. Ударную волну будем считать настолько сильной, что давлением газа перед фронтом волны можно пренебречь по сравнению с давлением позади нее [3].

Для математического описания состояния движущегося газа воспользуемся известными законами сохранения массы, импульса и энергии записанных для газа в предположении цилиндрической симметрии:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\rho u r) = 0; \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\rho u^2 r) + \frac{\partial p}{\partial r} = 0; \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(\varepsilon + \frac{u^2}{2} \right) \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r u \left[\rho \left(\varepsilon + \frac{u^2}{2} \right) + p \right] \right\} = 0. \quad (3)$$

где ρ – плотность, u – радиальная скорость, P – давление, ε – удельная внутренняя энергия, γ – показатель адиабаты.

Равенства (1) – (3) замыкаются уравнением состояния совершенного газа:

$$p = (\gamma - 1) \rho \varepsilon. \quad (4)$$

Граничные условия при $r = \delta$, т.е. на поверхности цилиндра:

$$u(R, t) = \dot{R}(t), \quad \frac{\partial \rho(R, t)}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial T(R, t)}{\partial r} = 0. \quad (5)$$

Примем, что к моменту $t = t_0$ известны распределения всех параметров газа по радиальной координате r , полученные из решения задачи об автомодельном движении среды:

$$u(r, t_0) = u_0(r), \quad \rho(r, t_0) = \rho_0(r), \quad T(r, t_0) = T_0(r).$$

Введем безразмерные неизвестные функции:

$$u = \frac{\alpha r}{t} V(\xi), \quad \rho = \rho_1 G(\xi), \quad c^2 = \frac{\alpha^2 r^2}{t^2} Z(\xi) \quad (6)$$

где V, G и Z – безразмерные функции автомодельной переменной $\xi = \frac{r}{R(t)}$.

$$R(t) = A(-t)^\alpha \quad (7)$$

$R(t)$ – радиус ударной волны, α – показатель автомодельности. Примем в момент фокусировки ударной волны $t = 0$, тогда $t < 0$. Постоянные параметры A, α определяются лишь путем решения задачи о движении газа в целом.

На поверхности разрыва, т.е. при $\xi = 1$, V, G и Z принимают значения:

$$V(1) = \frac{2}{\gamma + 1}, \quad G(1) = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}, \quad Z(1) = \frac{2\gamma(\gamma - 1)}{(\gamma + 1)^2} \quad (8)$$

Система уравнений, описывающих автомодельные движения, имеет вид:

$$\frac{d \ln \xi}{dV} = - \frac{Z - (1 - V)^2}{(2V - \chi)Z - V(1 - V) \left(\frac{1}{\alpha} - V \right)}, \quad (9)$$

$$(1 - V) \frac{d \ln G}{d \xi} = 2V - \frac{(2V - \chi)Z - V(1 - V) \left(\frac{1}{\alpha} - V \right)}{Z - (1 - V)^2}, \quad (10)$$

$$\frac{dZ}{dV} = \frac{Z}{1 - V} \left\{ \frac{[Z - (1 - V)^2] \left[\frac{2}{\alpha} - (2\gamma - 1)V \right]}{(2V - \chi)Z - V(1 - V) \left(\frac{1}{\alpha} - V \right)} + \gamma - 1 \right\}, \quad (11)$$

где $\chi = \frac{2(1 - \alpha)}{\alpha\gamma}$.

Решение системы уравнений (9)-(11) сводится прежде всего к решению уравнения (11). Выяснение неизвестного параметра α осуществляется необходимостью того, чтобы числитель и знаменатель выражения (11) обращались в ноль одновременно [2,3]. Тогда получим два выражения:

$$Z = (1 - V)^2, \quad (12)$$

$$(2V - \chi)Z = V(1 - V) \left(\frac{1}{\alpha} - V \right). \quad (13)$$

Подберем α таким образом, чтобы в точке пересечения линий (12) и (13) проходила интегральная кривая. Численные расчеты системы уравнений (9)-(11) проводились с помощью метода Рунге-Кутты. Результаты приведены на рис.1 -3.

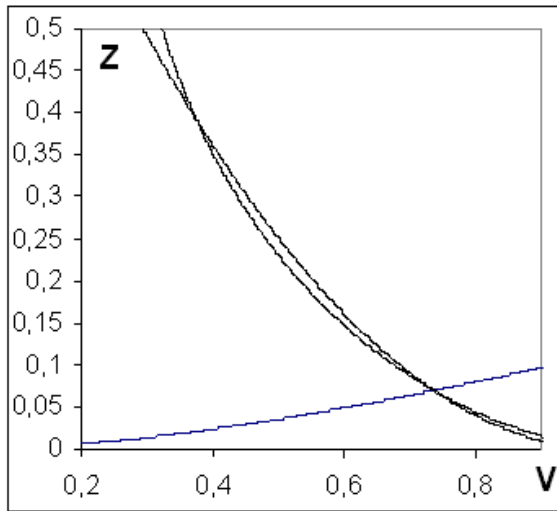


Рис. 1. Поиск особой точки уравнения(11),
где $\frac{dz}{dV} = 0$

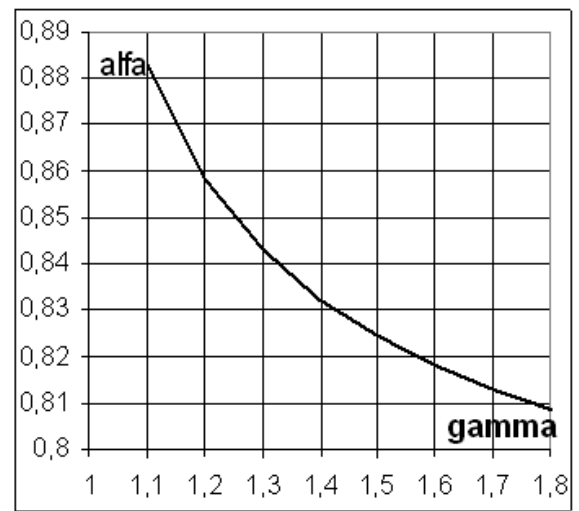


Рис.2. Параметр автомодельности при
разных значениях γ

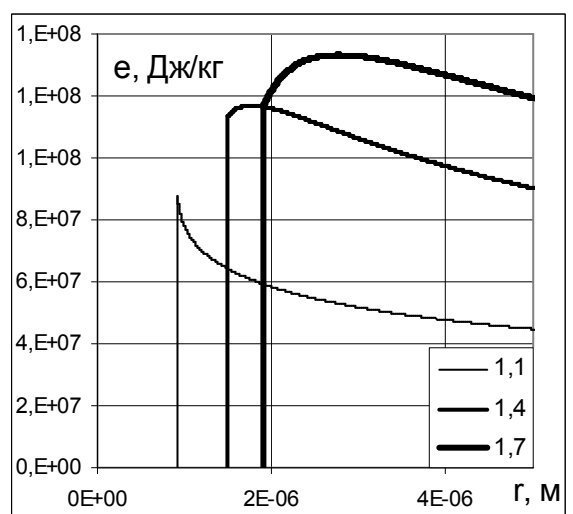
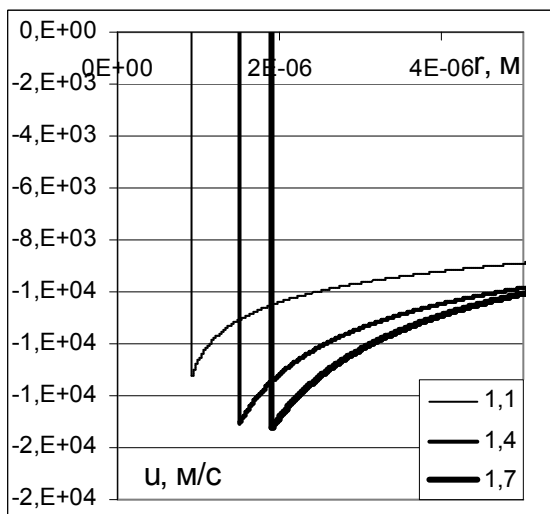
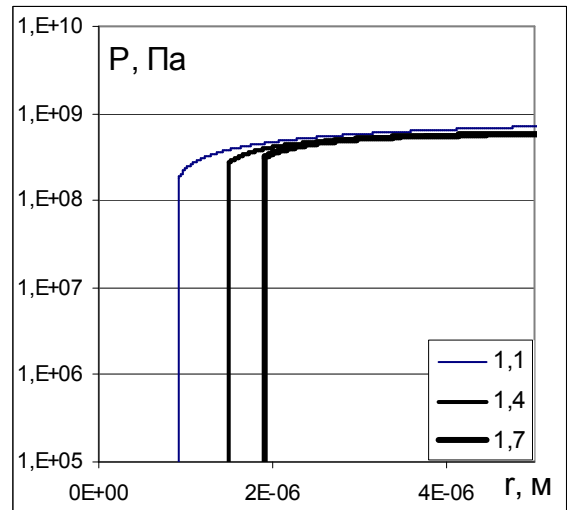
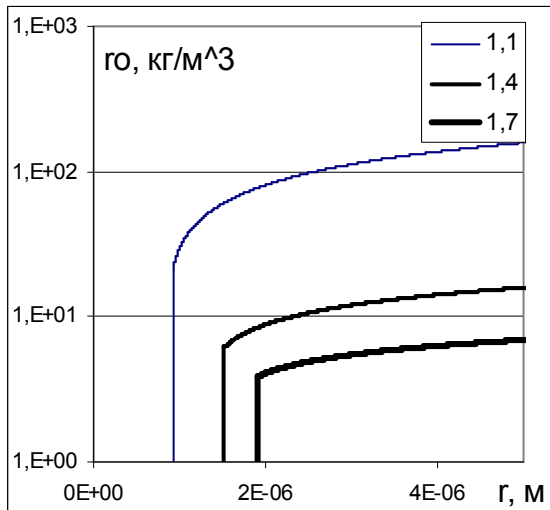


Рис.3. Распределение газодинамических параметров при разных значениях γ :1,1; 1,4; 1,7 .

Поля распределения $u(r, t_0) = u_0(r)$, $\rho(r, t_0) = \rho_0(r)$, $T(r, t_0) = T_0(r)$, приведенные на рис. 1–3, выступают как начальные условия при численном решении системы уравнений (1) – (4) методом конечных разностей с соответствующими граничными условиями (5) на нерегулярной сетке. Параметр нерегулярности определяется решением уравнения (11). Расчеты проведены для $\gamma = 1.1$, что соответствует многоатомным молекулам. Эволюция распространения ударной волны приведены на рис. 4. Началу расчета соответствует $t_0 = 5,85 \cdot 10^{-11} c$

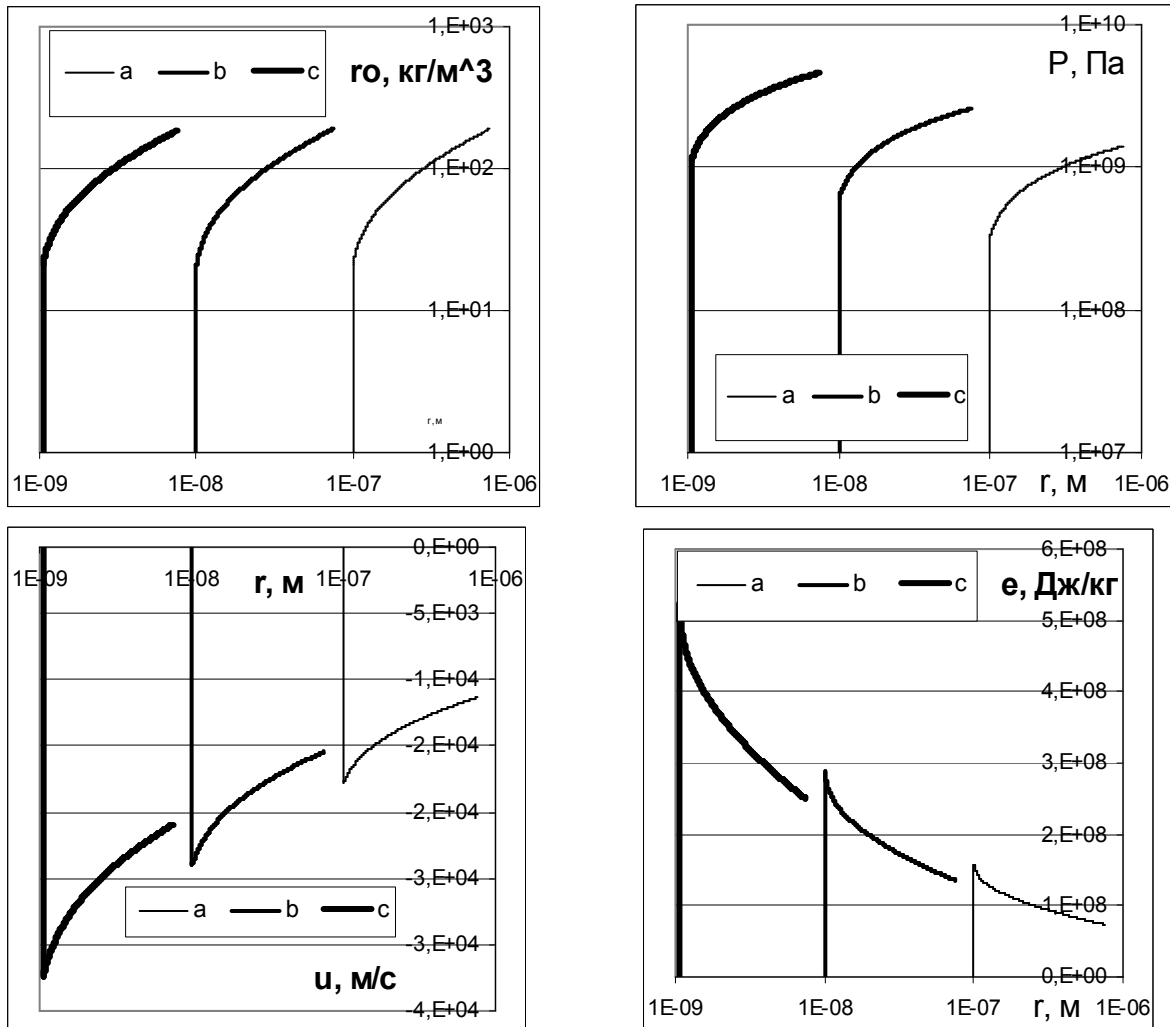


Рис.4. Распределение газодинамических параметров для различных моментов времени: $t_1 = 4,75 \cdot 10^{-12} c$ $t_2 = 3,51 \cdot 10^{-13} c$ $t_3 = 2,73 \cdot 10^{-14} c$ – тонкая, средняя и жирная линии соответственно.

Анализ результатов расчета, приведенный на рис. 4, показывает, что куммуляция энергии взрыва проволоки повышает давление, скорость и температуру газа в несколько раз. Если теплоемкость многоатомных газов составляет ≈ 1000 Дж/(кг К), то температура достигает 500000 К при давлении 10000 bar.

Литература

1. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. В двух томах. М.: Наука, 1987.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1985.
3. Станюкович К.П. Неустановившиеся движения сплошной среды. М.: Гостехиздат, 1955.