МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ

КЫРГЫЗСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ им. И.РАЗЗАКОВА

Кафедра «Радиоэлектроника»

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ПОЛЯ И ВОЛНЫ

(ВОЛНОВОДЫ И ОБЪЕМНЫЕ РЕЗОНАТОРЫ)

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ КУРСОВОЙ РАБОТЫ

Бишкек − 2010

«РАССМОТРЕНО»
на заседании кафедры «РЭ»
Прот.№ 9 от 27.05 2010 г.

«ОДОБРЕНО»
УМК ФИТ
Прот.№ 10 от 20.06.2010 г.

УДК.: 537.83; 537.86 (072)

Составители: АБДЫЛЛАЕВА Г.О.,
ИСМАИЛОВ Б.И..

Электромагнитные поля и волны. Методические указания к выполнению курсовой работы. / КГТУ им. Раззакова; сост.: Г.О.Абдыллаева, Б.И.Исмаилов. – Б.: ИЦ «Техник», 2010. - 32 с.

В методических указаниях рассматриваются вопросы исследования электромагнитных полей в волноводах и объемных резонаторах.

Кратко излагаются необходимые теоретические сведения, приводятся подробные решения ряда типовых примеров с анализом полученных результатов, даются ссылки на литературу.

Предназначены для студентов всех форм обучения специальностей «Сети связи и системы коммутаций» 550401.01; «Радиосвязь, радиовещание и телевидение» 550401.02; «Радиотехника» 552501.01

Данные методические указания служат пособием для студентов телекоммуникационного направления, изучающих основы электродинамики и выполняющих курсовую работу по вышеназванной дисциплине.

Курсовая работа посвящена исследованию электромагнитных полей в различных средах и системах. Предлагаемый материал охватывает разделы курса по изучению волноводов и объемных резонаторов.

В методических указаниях даны указания на литературу, которую необходимо проработать перед выполнением конкретного расчетного задания, а также основные теоретические сведения.

Ил.: 8. Таб.: 2. Библиограф.: 5наим.

Рецензент ст. пр. кафедры «РЭ» Н.А.Жылышбаев.

Теоретические сведения

ВОЛНОВОДЫ

Волновод представляет собой полую металлическую трубу произвольного сечения, внутри которой распространяются электромагнитные волны. Наиболее часто применяют волноводы прямоугольного (рис. 1.а) и круглого (рис. 1.б) сечений.

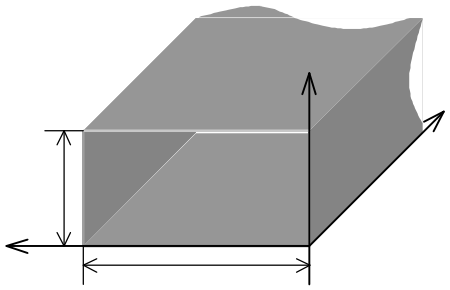


Рис. 1.а

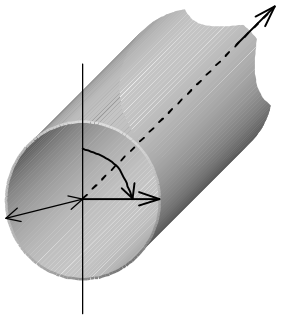


Рис. 1.б

В курсовой работе по курсу "Теория электрических и магнитных полей" исследуются электромагнитные волны в прямоугольных и круглых волноводах.

Для выполнения расчетной работы необходимо ознакомиться с теорией волноводов [1, с. 149-201, 219-230].

1. ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ВОЛНОВОД

1.1. Составляющие электромагнитного поля в волноводах Построение картин силовых линий поля

В прямоугольных волноводах с идеально проводящими стенками и однородным заполнением могут распространяться волны электрического E_{mn} и H_{mn} магнитного типов. Это можно показать путем решения уравнений Гемгольца для продольных составляющих или при равенстве нулю тангенциальной составляющей вектора электрического поля на стенках волновода.

Для определения составляющих поля волны заданного типа в прямоугольном волноводе используется декартовая система координат, на основании которой имеем следующие выражения:

для волн электрического типа (E_{mn}):

$$E_x = -j\frac{h}{g^2}C_1\frac{m\pi}{\alpha}\cos\left(\frac{m\pi}{\beta}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\exp(-jhz);$$

$$E_y = -j\frac{h}{g^2}C_1\frac{n\pi}{b}\sin\left(\frac{m\pi}{\alpha}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\exp(-jhz);$$

$$E_z = C_1 \sin\left(\frac{n\pi}{\alpha}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\exp(-jhz);$$

$$H_x = -j\frac{\omega\varepsilon_\alpha}{g^2}C_1\frac{n\pi}{b}\sin\left(\frac{m\pi}{\alpha}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\exp(-jhz);$$

$$H_y = -j\frac{\omega\varepsilon_\alpha}{g^2}C_1\frac{n\pi}{b}\sin\left(\frac{m\pi}{\alpha}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\exp(-jhz);\quad H_z = 0. \qquad (1.1)$$

для волны магнитного типа (H_{mn}):

$$H_x = j\frac{h}{g^2}C_2\frac{m\pi}{\alpha}\sin\left(\frac{m\pi}{\alpha}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\exp(-jhz);$$

$$H_y = j\frac{h}{g^2}C_2\frac{n\pi}{b}\cos\left(\frac{m\pi}{\alpha}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\exp(-jhz);$$

$$H_z = C_2\cos\left(\frac{m\pi}{\alpha}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\exp(-jhz);$$

$$E_x = j\frac{\omega\mu_\alpha}{g^2}C_2\frac{n\pi}{b}\cos\left(\frac{m\pi}{\alpha}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\exp(-jhz);$$

$$E_y = -j\frac{\omega\mu_\alpha}{g^2}c_2\frac{m\pi}{\alpha}\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\exp(-jhz);\quad E_z = 0. \qquad (1.2)$$

Здесь $g = \sqrt{(m\pi/\alpha)^2 + (n\pi/b)^2}$, -- поперечное волновое число, а $h = \sqrt{\omega^2\mu_\alpha\varepsilon_\alpha - g^2}$, - продольное волновое число; μ_α и ε_α - абсолютные магнитная и диэлектрическая проницаемости среды, заполняющий волновод; C_1 и C_2 -– амплитудные постоянные, определяемые условиями возбуждения данного волновода.

В курсовой работе проводится исследование полей в прямоугольном волноводе по методике, предлагаемой в [1]. Картины силовых линий поля волн типа E_{11}, E_{22}, H_{10} приведены в [1, *с.*156.157.165].

На рис.2 изображена картина силовых линий поля волны типа $H_{11}\,(m \to 1, n \to 1)$ в прямоугольном волноводе. Для любой более сложной волны типа H_{mn} картину, изображенную на рис.2, следует «повторить» столько раз, каково значение индекса волны по той или иной координатной оси. В качестве примера приведена картина распределения силовых линий полей для волны типа H_{12} (рис.3).

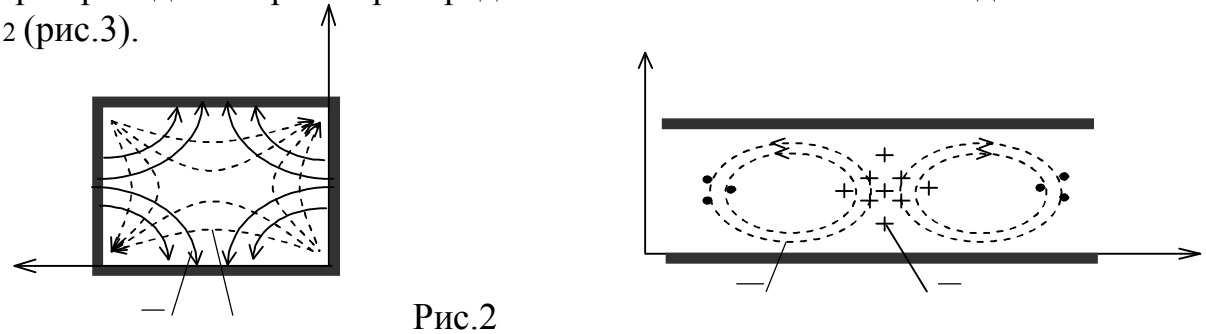


Рис.2

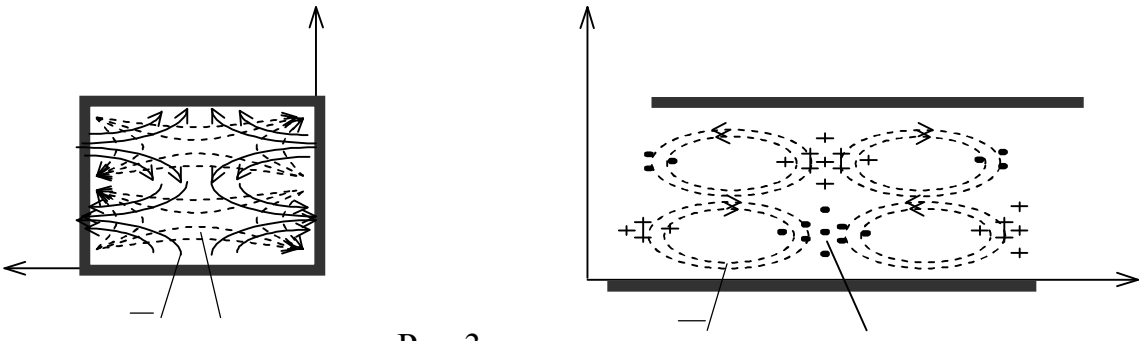


Рис.3

Картина силовых линий поля позволяет наглядно представить себе пространственную структуру поля заданного типа волны.

1.2. Фазовая скорость, длина волны в волноводе Критическая длина волны Волны основных типов Групповая скорость в металлических волноводах

Конкретный тип волны в прямоугольном волноводе может распространяться в том случае, если для него выполняется условие

$$\lambda_0 / \sqrt{\varepsilon\mu} \langle \lambda_{кр}, \tag{1.3}$$

где λ_0 - длина волны генератора, с помощью которого возбуждается поле в волноводе; ε, μ --относительная магнитная и диэлектрическая проницаемости среды, заполняющей волновод; $\lambda_{кр} = 2\pi / \mathrm{g}$ - критическая длина волны, которая определяется размерами поперечного сечения прямоугольного волновода.

Критическая длина волны в металлическом прямоугольном волноводе, как для волны магнитного типа, так и для волны электрического типа рассчитывается по следующей формуле

$$\lambda_{кр} = 2 / \sqrt{\left(\mathrm{m}/\mathrm{a}\right)^2 + \left(n/b\right)^2}\ . \tag{1.4}$$

Здесь a и b – размеры поперечного сечения волновода (рис.1.а); m и n - индексы, определяющие тип волны, и представляющие собой целые числа ряда Фурье (0,1,2…9)

Фазовая скорость волны в волноводе определяется величиной продольного волнового числа h, которое можно рассчитать по одной из формул:

$$h = \sqrt{\omega^2 \mu_\alpha \varepsilon_\alpha - g^2}, \qquad h = 2\pi\sqrt{\left(1/\lambda^2\right) - \left(1/\lambda^2{}_{кр}\right)}, \tag{1.5}$$

где $\lambda = \lambda_0 / \sqrt{\varepsilon\mu}.$

Если выполняется условие (1.3), то значение h-действительное и данный тип волны распространяется. В случае невыполнения этого условия значение h мнимое и данный тип волны затухает, не распространяясь. В этом случае амплитуда поля будет убывать по закону

$$\exp\left(-2\pi z\sqrt{\left(1/\lambda^2{}_{кр}\right)-\left(1/\lambda^2\right)}\right) \quad \text{или} \quad \exp\left(-z\sqrt{g^2-\omega^2\mu_\alpha\varepsilon_\alpha}\right). \tag{1.6}$$

Затухание при распространении волны объясняется неблагоприятной интерференцией составляющих поля, пришедших в результате отражения от стенок разными путями в одну и ту же точку волноводной системы.

Воспользовавшись соотношением

$$h=\omega/v_ф=2\pi/\lambda_и, \tag{1.7}$$

получаем расчетные формулы для фазовой скорости $v_ф$ и длины волны в волноводе $\lambda_ф$:

$$v_ф=c/\left(\sqrt{\mu\varepsilon}\sqrt{1-\left(1/\mu\varepsilon\right)\left(\lambda^2{}_0/\lambda^2{}_{кр}\right)}\right), \tag{1.8}$$

$$\lambda_в=\lambda_0/\left(\sqrt{\mu\varepsilon}\sqrt{1-\left(1/\mu\varepsilon\right)\left(\lambda_0^2/\lambda_{кр}^2\right)}\right), \tag{1.9}$$

где $c=3\cdot10^8$ м/с.

Основным типом волны в волноводе будет называться тот тип, у которого критическая длина волны $\lambda_{кр}$ наибольшая из всех возможных.

Для прямоугольного волновода с размерами $a\to b$ основным типом будет волна H_{10}. Ближайшими высшими типами будут H_{20}, H_{01}, H_{13}. Низшей из волн электрического типа будет волна E_{13}. Неравенства, которые обеспечивают условие единственности существования основной волны типа H_{10}, можно записать в виде

$$2_\alpha\rangle\lambda\rangle\alpha;\lambda\rangle2b. \tag{1.10}$$

Соблюдение этих неравенств обеспечивает одноволновый режим работы волновода, то есть режим, при котором распространение волн других типов, как электрических, так и магнитных, невозможно.

Групповая скорость $v_{гр}$ в металлических волноводах определяется выражением

$$v_{гр}=\left(-/\sqrt{\mu\varepsilon}\right)\sqrt{1-\left(1/\mu\varepsilon\right)\left(\lambda_0^2/\lambda_{кр}^2\right)}. \tag{1.11}$$

Фазовая и групповая скорости связаны соотношением $v_ф v_{гр}=c^2/\mu\varepsilon.$

С наличием зависимости групповой скорости от частоты приходится считаться при анализе процесса передачи по волноводным линиям очень коротких радиоимпульсов.

1.3. Мощность, переносимая волной по волноводу Предельная и допустимая мощности

Мощность, переносимую волной любого типа в волноводе, определяют интегрированием вектора Пойнтинга по поперечному сечению волновода:

$$P = \frac{1}{2}\int_S \mathrm{Re}\left\{ l_z \left[\dot{\bar{E}} \, \bar{H}^* \right] \right\} dS. \qquad (1.12)$$

При передаче по линии большой мощности может возникнуть высокочастотный пробой. Всякий диэлектрик способен выдержать без электрического пробоя лишь некоторое предельное значение напряженности электрического поля $E_{пред}$. Поэтому по волноводу в режиме бегущей волны нельзя передавать мощность, превышающую предельное значение $E_{пред}$. Практика показывает, что допустимая рабочая мощность должна составлять не более третьей-пятой части $P_{пред}$, рассчитанной для регулярного волновода, работающего в режиме без отражений.

1.4. Затухание волн в волноводах

Затухание волн h'' в волноводах зависит от потерь в металлических стенках h'' ì в диэлектрике $h''_д$, заполняющем волновод.

При малых потерях имеем: $h'' = h''$ ì $+ h''_д$. Потерями в диэлектрике обычно можно пренебречь, поскольку волноводы имеют, как правило, воздушное наполнение. При анализе поля в реальных волноводах выражения для составляющих поля определяют, считая материал стенок идеальным. В действительности, конечная проводимость стенок приводит к тому, что структура поля в реальном волноводе отлична от случая идеального волновода.

Так как проводимость реальных металлов, используемых для волноводов, весьма высока (σ м $\approx 10^7$ См/м), то можно считать, что структура электромагнитного поля волны в реальном волноводе мало отличается от структуры поля в волноводе со стенками из идеального металла. Затухание волн, вызываемое омическими потерями в стенках волновода, невелико. Однако при достаточно большой длине волноводной линии передачи полное затухание может быть весьма ощутимым, поэтому важно знать величину коэффициента затухания [I].

Коэффициент затухания волноводной волны по полю без учета потерь в диэлектрике определяется так:

$$h'' = P_{\text{пот.пог.м}} / (2P). \qquad (1.13)$$

Погонную мощность потерь в реальном металле можно рассчитать по формуле:

$$P_{\text{пот.пог.м}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu_{ам}\omega}{2\sigma_м}\int_L |\dot{H}\tau|^2\, dL}, \qquad (1.14)$$

где $\mu_{ам}$ - магнитная проницаемость металла; ω - круговая частота колебания в волноводе; $\sigma_м$ - проводимость стенок волновода, См/м; $|H\tau|^2$ квадрат тангенциальной составляющей модуля комплексной амплитуды магнитного поля у поверхности металла; L – длина волновода.

Подставляя выражения для $P_{\text{пот.пог.м}}$ и P, получим формулу коэффициента затухания за счет потерь в металлических стенках для любой волны в волноводе произвольного сечения, Нп/ м:

$$h''_м = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu_{ам}}{2\sigma_м}\int |\dot{H}\tau| dL} \Big/ \int_S \text{Re}\left\{\dot{i}_Z\left[\frac{\cdot}{E}\frac{*}{H}\right]\right\} dS\ . \qquad (1.15)$$

Численное значение коэффициента затухания h'' м является погонным затуханием рассматриваемой линии передачи, то есть затуханием на 1 м длины, выраженным в Неперах. Затухание, дБ/м,

$$\Delta_м = 8{,}69 h''_м. \qquad (1.16)$$

Подставляя выражения для составляющих поля в (1.15), получим расчетные формулы для коэффициентов затухания конкретных типов волн в волноводах.

Коэффициент затухания за счет потерь в стенках прямоугольного металлического волновода:

а) волн магнитного типа $H_{mn}(m \geq 1, n \geq 1)$:

$$h''_м = 2\sqrt{\frac{\mu_{ам}\omega}{2\sigma_м}\frac{\sqrt{\varepsilon_\alpha}}{\sqrt{\mu_\alpha} b\sqrt{1-(f/f)^2}}\left\{\left(1+\frac{b}{a}\right)\left(\frac{f_{кр}}{f}\right)^2 + \left[1-\left(\frac{f_{кр}}{f}\right)^2\right]\frac{\frac{b}{a}\left(\frac{b}{a}m^2+n^2\right)}{\frac{b^2m^2}{a^2}+n^2}\right\}}; \qquad (1.17)$$

б) волна магнитного типа H_{mo}:

$$h''_м = \sqrt{\frac{\mu_{ам}\omega}{2\sigma_м}\left(1+\frac{2b}{a}\left(\frac{f_{кр}}{f}\right)^2\right)} \Big/ \left(\sqrt{\frac{\mu_\alpha}{\varepsilon_\alpha}} b\sqrt{1-\left(\frac{f_{кр}}{f}\right)^2}\right); \qquad (1.18)$$

в) волна магнитного типа Hon

$$h''_{\text{M}} = \sqrt{\frac{\mu_{ам}}{2\sigma_{м}}\left(1+\frac{2\alpha}{b}\left(\frac{f_{кр}}{f}\right)^2\right)} \Big/ \left(\sqrt{\frac{\mu_{\alpha}}{\varepsilon_{\alpha}}}\alpha\sqrt{1-\left(\frac{f_{кр}}{f}\right)^2}\right); \qquad (1.19)$$

г) волна электрического типа Emn (m= 1, n=1):

$$h''_{\text{M}} = 2\sqrt{\frac{\mu_{ам}\omega}{2\sigma_{м}}}\frac{\sqrt{\varepsilon_{\alpha}}}{\sqrt{\mu_{\alpha}b}\sqrt{1-(f_{кр}/f)^2}}\frac{m^2(b/a)^3+n^2}{m^2(b/a)^2+n^2}. \qquad (1.20)$$

Пример 1

Определить длину прямоугольного волновода, обеспечивающего ослабления поля на 20дБ, при условии, что в нем возбуждается волна типа H10 с частотой $f = 0{,}5f_{кр.}$ Размеры поперечного сечения волновода, а=30мм, b= 15мм. Волновод заполнен воздухом.

Решение:

Если $f \langle f_{кр}$,то волна в волноводе затухает, не распространяясь. Согласно (1.6) амплитуда поля E_{mn} или H_{mn} убывает по закону $\exp\left(-z\sqrt{g^2-\omega^2\mu_{\alpha}\varepsilon_{\alpha}}\right)$.

Учитывая это, можно записать
$E_m(z=0)/E_m(z=L) = \exp\left(-L\sqrt{g^2-\omega^2\mu_{\alpha}\varepsilon_{\alpha}}\right)$.

Согласно условию задачи $20\lg\left[E_m(z=0)/E_m(z=L)\right] = 20,$ и тогда
$\lg\left[\exp\left(-L\sqrt{g^2-\omega^2\mu_{\alpha}\varepsilon_{\alpha}}\right)\right] = 1$ или
$\omega L\sqrt{\mu_{\alpha}\varepsilon_{\alpha}}\sqrt{g^2/\left(\omega^2\mu_{\alpha}\varepsilon_{\alpha}\right)-1} = 1/1\lg(e) = 2{,}3.$

Учитывая, что $\omega = 2\pi f = 0{,}5\omega_{кр}$, а $g/\sqrt{\mu_{\alpha}\varepsilon_{\alpha}} = \omega_{кр}$, получим
$0{,}5\omega_{\text{кр}}\text{L}\sqrt{\mu_{\alpha}\varepsilon_{a}}\sqrt{\omega^2{}_{кр}/\omega^2-1} = 1/\lg(\text{e}) = 2{,}3.$

Откуда $L = 2{,}3\Big/\left(0{,}5g\sqrt{\omega_{кр}^2/(0{,}5\omega_{\text{кр}})^2-1}\right).$

Для волны $H_{10g} = \pi/\alpha.$

Используя исходные данные, получим
$L = \left(2{,}3 \cdot 3 \cdot 10^{-2}\right) / \left(0{,}5\pi\sqrt{3}\right) = 2{,}54 \cdot 10^{-2}\, м = 2{,}54$ см.

Пример 2

Определить предельную мощность волны типа H10 в прямоугольном волноводе с размерами поперечного сечения *a* и *b*, заполненного сухим воздухом, при нормальном атмосферном давлении.

Для воздуха $\mu_\alpha = \mu_0, \varepsilon_\alpha = \varepsilon_0, E_{пред} = 30 кВ/см = 3 \cdot 10^6 В/м.$

Решение:

Используя (1.4), запишем составляющие поля волны типа H10 (m =1, n=0):

$$E_y = -j\frac{\omega\mu_0}{g^2} C_2 \frac{\pi}{\alpha} \sin\left(\frac{\pi}{\alpha}x\right) \exp(-jhz); \qquad (1)$$
$$H_x = j\frac{h}{g^2} C_2 \frac{\pi}{\alpha} \sin\left(\frac{\pi}{\alpha}x\right) \exp(-jhz);$$
$$H_z = C_2 \cos\left(\frac{\pi}{\alpha}x\right) \exp(-jhz)$$

В векторной форме поле волны H10 можно записать в виде

$$\dot{\bar{E}} = 1_Y \dot{E}_Y; \quad \dot{\bar{H}} = 1_X H_X + 1_Z H_Z. \qquad (2)$$

Подставляя (2) в (1), получим

$$P = \frac{1}{2}\int_0^a dx \int_0^b \mathrm{Re}\left\{1_Z\left[1_Y \dot{E}_Y\left(1_X \dot{H}_X + 1_Z H_Z\right)\right]\right\} dy \text{ или}$$

$$P = \frac{1}{2}\int_0^a dx \int_0^b \mathrm{Re}\left\{-\dot{E}\,\dot{H}_X^*\right\} dy, \qquad (3)$$

Комплексную амплитуду электрического поля перепишем в (1) в виде

$$E_y = -j\dot{E}_{MAX} \sin\left(\frac{\pi}{\alpha}x\right) \exp(-jhz), \qquad (4)$$

где $E_{\max} = \frac{\omega\mu_0}{g^2} C_2 \frac{\pi}{\alpha}$ – максимальная амплитуда напряженности электрического поля в волноводе.

Тогда выражение для H_x в (1) можно представить следующим образом

$$H_x = j\frac{h}{\omega\mu_0} E_{\max} \sin\left(\frac{\pi}{\alpha}x\right) \exp(-jhz) \quad \text{и}$$
$$H_x = -j\frac{h}{\omega\mu_0} E_{\max} \sin\left(\frac{\pi}{\alpha}x\right) \exp(jhz).$$

Подставляя (3), (4) в (5), запишем

$$P = \frac{1}{2}\int_0^{\alpha} dx \int_0^{b} \frac{E_{\max h}^2}{\omega\mu_{20}} \sin^2\left(\frac{\pi}{\alpha}x\right) dy.$$

Так как $\int_0^{\alpha} \sin\left(\frac{\pi}{\alpha}x\right) dx = \alpha/2,$ имеем

$$P = E_{\max}^2 hab/(4\omega\mu_0).$$

Учитывая, что

$$h/(\omega\mu_0) = \sqrt{\omega^2\mu_0\varepsilon_0 - g^2}/(\omega\mu_0) = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\sqrt{1 - g^2/(\omega^2\mu_0\varepsilon_0)}/(\omega\mu_0)$$ или

$$h/(\omega\mu_0) = \sqrt{1 - \lambda_0^2/\lambda_{кр}^2}/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0} = \sqrt{1 - \lambda_0^2/\lambda_{кр}^2}/(120\pi), \qquad (6)$$

Выражение (5) для мощности, переносимой волной H10 по прямоугольному волноводу, можем записать

$$P = \left(E_{\max}^2 ab/480\pi\right)\sqrt{1 - \lambda_0^2/\lambda_{кр}^2},$$ где $\lambda_{кр} = 2a.$

Для прямоугольного волновода, имеющего сечение 23×10 мм, при длине волны генератора $\lambda_0 = 3{,}2$ см предельная мощность для волны типа H10

$$\boldsymbol{P_{пред}} \approx 986\ \boldsymbol{кВт}\ .$$

2. КРУГЛЫЙ ВОЛНОВОД

2.1. Составляющие электромагнитного поля в волноводах Построение картин силовых линий поля

В круглых волноводах с идеально проводящими стенками и однородным заполнением также, как в прямоугольном волноводе распространяются волны электрического типа Emn и магнитного типа Hmn. Путем решения уравнений Гемгольца для продольных составляющих Ez или Hz при равенстве нулю тангенциальной составляющей вектора электрического поля на стенках волновода можно определить составляющие поля волны заданного типа в круглом волноводе. Используя цилиндрическую систему координат, имеем следующие выражения:

для волн электрического типа (Emn):

$$\dot{E} = -j\frac{hr_0}{v_{mn}} C_1 J'_m\left(\frac{v_{mn}}{r_0}r\right)\cos(m\varphi)\exp(-jhz);$$

$$\dot{E}\varphi = j\frac{hr_0^2}{rv_{mn}^2} C_1 m J_m\left(\frac{v_{mn}}{r_0}r\right)\sin(m\varphi)\exp(-jhz);$$

$$\dot{E}_z = C_1 J_m\left(\frac{v_{mn}}{r_0} r\right)\cos(m\varphi)\exp(-jhz); \qquad (2.1)$$

$$\dot{H}_r = -j\frac{\omega\varepsilon_a r_0^2}{r v_{mn}^2} C_1 m J_m\left(\frac{v_{mn}}{r_0} r\right)\sin(m\varphi)\exp(-jhz);$$

$$\dot{H}_\varphi = -j\frac{\omega\varepsilon_a r_0}{r v_{mn}^2} C_1 J'_m\left(\frac{v_{mn}}{r_0} r\right)\cos(m\varphi)\exp(-jhz); \qquad \dot{H}_z = 0.$$

Здесь поперечное волновое число $g = v_{mn}/r_0$. Значение v_{mn} - корней функции Бесселя $J_m(x)$- приведены в табл. 1

Таблица 1

m / n	0	1	2
1	2,405	3,832	5,136
2	5,520	7,016	8,417
3	8,654	10,174	11,620

Составляющие векторов поля волны магнитного типа (Hmn) в круглом волноводе:

$$\dot{H}_r = -j\frac{hr_0}{\mu_{mn}} C_2 J'_m\left(\frac{\mu_{mn}}{r_0} r\right)\sin(m\varphi)\exp(-jhz);$$

$$\dot{H}\varphi = j\frac{hr_0^2}{r\mu_{mn}^2} C_2 m J_m\left(\frac{\mu_{mn}}{r_0} r\right)\sin(m\varphi)(-jhz);$$

$$\dot{H}_z = C_2 J_m\left(\frac{\mu_{mn}}{r_0} r\right)\cos(m\varphi)\exp(-jhz); \qquad (2.2)$$

$$\dot{E}_r = j\frac{\omega\mu_a r_0^2}{r\mu_{mn}^2} C_2 m J_m\left(\frac{\mu_{mn}}{r_0} r\right)\sin(m\varphi)\exp(-jhz);$$

$$\dot{E}\varphi = j\frac{\omega\mu_a r_0}{\mu_{mn}} C_2 J'_m\left(\frac{\mu_{mn}}{r_0} r\right)\cos(m\varphi)\exp(-jhz); \quad \dot{E}_z = 0.$$

Поперечное волновое число для волн магнитного типа определяется $g = \mu_{mn} / r_0$., где μ_{mn} - значение корней производной функции Бесселя $J'_m(x)$- приведенные в табл. 2

Таблица 2

m / n	0	1	2
1	3,832	1,840	3,054
2	7,016	5,335	6,705
3	10,174	8,536	9,965

Рекуррентные соотношения для функции Бесселя:

$$J_{-m}(x) = (-1)^m J_m(x);$$

$$J_{m-1}(x) + J_{m+1}(x) = (2m/x) J_m(x); \qquad (2.3)$$
$$J_{m-1}(x) - J_{m+1} = 2J'm(x);$$
$$J'm(x) = J_{m-1}(x) - (m/x) J_m(x).$$

Интегралы с функциями Бесселя:

$$\int x^{-m+1} J_m(x)dx = -x^{-m+1} J_{m-1}(x);$$
$$\int J_1(x)dx = -J_0(x);$$
$$\int xJ_0(x)dx = xJ_1(x);$$
$$\int x^{m+1} J_m(x)dx = x^{m+1} J_{m+1}(x); \qquad (2.4)$$
$$\int xJ_m^2(ax)dx = (x^2/2)\left(J_m^2(ax) - J_{m-1}(ax)J_{m+1}(ax)\right);$$
$$\int x\left(\frac{m^2 J_m^2(x)}{x^2} + J_m'^2(x)\right)dx \frac{x^2}{2}\left[J_m^2(x)\left(1 - \frac{m^2}{x^2}\right) + \frac{2}{x} J_m(x)J_m'(x)\right].$$

В курсовой работе при исследовании полей в круглом волноводе чаще всего приходится иметь дело с простейшими цилиндрическими функциями $j_0(x)$ и $J_1(x)$. Соответствующие графики представлены в [1, с. 188].

Запишем некоторые значения функции Бесселя в характерных точках:

$$J_0(\mu_{01}) = J_0(3{,}832) = -0{,}4027; \qquad J_0(\mu_{02}) = J_0(7{,}016) = 0{,}2999;$$
$$J_1(\mu_{11}) = J_1(1{,}840) = 0{,}5819;$$
$$J_1(v_{01}) = J_1(2{,}405) = 0{,}5191; \qquad J_1(v_{02}) = J_1(5{,}520) = -0{,}3400. \qquad (2.5)$$

2.2. Фазовая скорость, длина волны в волноводе Критическая длина волны. Волны основных типов Групповая скорость в металлических волноводах Мощность, переносимая волной по волноводу Предельная и допустимая мощности

Конкретный тип волны в круглом волноводе может распространяться в том случае, если для него выполняется условие

$$\lambda_0 / \sqrt{\varepsilon\mu} \langle \lambda_{кр} , \qquad (2.6)$$

где λ_0 - длина волны генератора, с помощью которого возбуждается поле в волноводе; ε - относительная диэлектрическая проницаемость, μ -относительная магнитная проницаемость среды, заполняющей волновод; $\lambda_{кр} = 2\pi/g$ - критическая длина волны, которая определяется размерами поперечного сечения круглого волновода.

Причем критическая длина волны в металлическом круглом волноводе, рассчитывается для волн магнитного типа и для волн электрического типа по разным формулам:

а) для волн типа E_{mn},

$$\lambda_{кр} = 2\pi r_0 / \nu_{mn} . \qquad (2.7)$$

б) для волн типа H_{mn}.

$$\lambda_{кр} = 2\pi r_0 / \mu_{mn} . \qquad (2.8)$$

Здесь r_0 - радиус волновода (см. рис. 1.б).

Фазовая скорость волны в волноводе определяется величиной продольного волнового числа h, которое можно рассчитать по одной из формул: (2.9).

$$h = \sqrt{\omega^2 \mu_\alpha \varepsilon_\alpha - g^2}, \qquad h = 2\pi \sqrt{(1/\lambda^2) - (1/\lambda_{кр}^2)}, \qquad (2.9)$$

где $\lambda = \lambda_0 / \sqrt{\varepsilon\mu}.$

Если выполняется условие (2.6), то значение h-действительное и данный тип волны распространяется. В случае невыполнения этого условия значение h мнимое и данный тип волны затухает, не распространяясь. В этом случае амплитуда поля будет убывать по закону

$$\exp\left(-2\pi z\sqrt{\left(1/\lambda_{кр}^2\right)-\left(1/\lambda^2\right)}\right) \quad \text{или} \quad \exp\left(-z\sqrt{g^2-\omega^2\mu_\alpha\varepsilon_\alpha}\right) \qquad \textbf{(2}.10)$$

Расчетные формулы для фазовой скорости и длины волны в круглом волноводе получим согласно формулам (2.11) и (2.12) соответственно.

$$v_{\text{ф}} = c\Big/\left(\sqrt{\mu\varepsilon}\sqrt{1-\left(1/\mu\varepsilon\right)\left(\lambda_0^2/\lambda_{кр}^2\right)}\right), \qquad (2.11)$$

$$\lambda_{\text{в}} = \lambda_0\Big/\left(\sqrt{\mu\varepsilon}\sqrt{1-\left(1/\mu\varepsilon\right)}\left(\lambda_0^2/\lambda_{кр}^2\right)\right), \qquad (2.12)$$

где $c = 3\cdot10^8$ м/с.

Основным типом волны в волноводе называется тот, у которого критическая длина волны $\lambda_{кр}$ наибольшая из всех возможных.

Для круглого волновода основным типом будет волна H_{11}, критическая длина которой определяется

$$\lambda_{кр} = 2\pi r_0 / \mu_{11} = 3{,}41 r_0. \qquad (2.13)$$

Низшая волна электрического типа - E_{01}. критическая длина, которой

$$\lambda = 2\pi r_0 / v_{01} = 2{,}61 r_0. \qquad (2.14)$$

Круглый волновод может быть использован в качестве одноволновой линии передачи в диапазоне

$$2{,}61 r_0 \langle \lambda \langle 3{,}41 r_0. \qquad (2.15)$$

Групповая скорость $v_{гр}$ в металлических волноводах определяется выражением

$$v_{гр} = \left(-/\mu\varepsilon\right)\sqrt{1-\left(1/\mu\varepsilon\right)\left(\lambda_0^2/\lambda_{кр}^2\right)}. \qquad (2.16)$$

Мощность, переносимая волной по волноводу, а также предельная и допустимая мощности для круглого волновода, определяются также как для прямоугольного волновода.

Пример 3

Вывести формулу, позволяющую определить предельную мощность для волны типа H11 в круглом волноводе радиуса r_o, заполненном воздухом.

Решение:

Используя (2.1), запишем составляющие поля волны типа H11 (m =1, n=1):

$$\dot{E}_r = j\frac{\omega\mu_0}{g^2 r}C_2 J_1(gr)\sin(\varphi)\exp(-jhz);\quad \dot{E}_\varphi = j\frac{\omega\mu_0}{g}C_2 J'(gr)\cos(\varphi)\exp(-jhz);$$

$$\dot{H}_r = -j\frac{h}{g}C_2 J_1'(gr)\cos(\varphi)\exp(-jhz);$$

$$\dot{H}\varphi = j\frac{h}{g^2 r}C_2 J_1(gr)\sin(\varphi)\exp(-jhz);\quad \dot{H}_z = C_2 J_1(gr)\cos(\varphi)\exp(-jhz). \qquad (1)$$

В векторной форме поле волны H11 можно записать в виде

$$\dot{\overline{E}} = \overline{1}_r \dot{E}_r + \overline{1}\varphi + \overline{1}\varphi E\varphi;\qquad \dot{\overline{H}} = \overline{1}_r \dot{H}_r + \overline{1}\varphi\ \dot{H}_r + \dot{1}\varphi + 1_z \dot{H}_z. \qquad (2)$$

Подставляя (2) в (1), получим

$$P = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{r_0} \mathrm{Re}\left\{\overline{1}_z\left[\left(\dot{1}_r \dot{E}_r + \overline{1}\varphi\dot{E}_\varphi\right)\left(\overline{1}_r \overset{*}{H}_r + \overline{1}_\varphi \overset{*}{H}_\varphi + \overline{1}_z \overset{*}{H}\right)\right]\right\} rdr \text{ или}$$

$$P = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{r_0}\left(\dot{E}_r H_\varphi - \overset{*}{\dot{E}}_\varphi \overset{*}{H}_r\right) rdr. \qquad (3)$$

Согласно (1) $\dot{H}_\varphi = (h/\omega\mu_0)\dot{E}_r$ и $\dot{H}_r = -(h/\omega\mu_0)\dot{E}_\varphi$.

Тогда (3) можно переписать как:

$$P = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{r_0} \frac{h}{\omega\mu_0}\left(|\dot{E}_r|^2 + \dot{E}\varphi|^2\right) rdr. \qquad (4)$$

Определим максимальные значения $|\dot{E}_r|^2$. и $|\dot{E}_\varphi|^2$.
Электрическое поле волны H11 максимально в центре волновода

$$\lim_{r\to 0}|\dot{E}_r| = \lim_{r\to 0}\left\{\left(\omega\mu_0 / g^2 r\right)C_2 J_1(gr)\sin(\varphi)\right\}. \qquad (5)$$

При малых значениях аргумента для вычисления функции Бесселя можно применять степенной ряд, член которого имеет вид

$$J_m(x) = (1/m!)(x/2)^m. \qquad (6)$$

Для функции с индексом m =1

$$J_1(x) \approx x/2. \qquad (7)$$

Учитывая (7), можно переписать (6) в виде

$$\lim_{r\to 0}|\dot{E}_r| = (\omega\mu_0 C_2/2g)\sin(\varphi) = E_{r\max}\sin(\varphi), \quad E_{r\max} = \omega\mu C_2/2g. \tag{8}$$

Определим $E_{\varphi\max}$.

$$\lim_{r\to 0}|\dot{E}_\varphi| = \lim_{r\to 0}\{(\omega\mu_0/g)C_2 J_1'(gr)\cos(\varphi)\} = (\omega\mu_0 C_2 2g)\cos(\varphi) = E_{\varphi\max}\cos(\varphi),$$

где $E_{\varphi\max} = \omega\mu_0 C_2/2g.$ (9)

Обозначая $E_{r\max} = E_{\varphi\max\cdot x} = E_{\max,}$, составляющие электрического поля, в соответствии с

(1) можно записать:

$$\dot{E}_r = j\frac{2E_{\max}}{gr}J_1(gr)\sin(\varphi)\exp(-jhz);$$
$$\dot{E}_\varphi = j2E_{\max}J_1'(gr)\cos(\varphi)\exp(-jhz). \tag{10}$$

Подставим ( ) в ( ):

$$P = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{r_0}\frac{h}{\omega\mu_0}\frac{4E_{\max}^2}{(gr)^2}J\frac{2}{1}(gr)\sin^2(\varphi)rdr + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{r_0}\frac{h}{\omega\mu_0}4E_{\max}^2 J_1'^2(gr)\cos^2(\varphi)rdr.$$

Интегрируя по φ, получим

$$P = \frac{2h}{\omega\mu_0}\pi E_{\max}^2\int_0^{r_0}\left[\frac{J_1^2(gr)}{(gr)^2} + J_1'^2(gr)\right]rdr. \tag{11}$$

Для цилиндрических функций справедливо соотношение из (2.6):

$$\int x\left(\frac{m^2J_m^2(x)}{x^2} + J_m'^2(x)\right)dx = \frac{x^2}{2}\left[J_m^2(x)\left(1-\frac{m^2}{x^2}\right) + \frac{2}{x}J_m(x)J_m'(x)J_m^2(x)\right].$$

В нашем случае

$$\int\left(\frac{J_1^2(gr)}{(gr)} + J_1'^2(gr)\right)rdr = \frac{1}{g^2}\int gr\left(\frac{J_1^2(gr)}{(gr)} + J_1'^2(gr)\right)d(gr) =$$

$$= \frac{1}{g^2}\frac{(gr)^2}{2}\left[J_1^2(gr)\left(1-\frac{1}{(gr)^2}\right) + \frac{2}{gr}J_1(gr)J_1'(gr) + J_1'(gr) + J_1'^2(gr)\right].$$

Учитывая, что $g = \mu_{11}/r_0$ и $J_1'(\mu_{11}) = 0,$ так как μ_{11} – корень

производной функции Бесселя порядка m=1, окончательно запишем

$$\int\left(\frac{J_1^2(gr)}{(gr)^2} + J_1'^2(gr)\right)rdr = \frac{r_0^2}{2}J_1^2(gr_0)\left(1-\frac{1}{\mu_{11}^2}\right). \tag{12}$$

Подставляя (12) в (11), получим

$$P = E_{\max}^2 r_0^2(h/\omega\mu_0)\pi J_1^2(gr_0)\left(1-1/\mu_{11}^2\right). \tag{13}$$

Так как согласно (2.11), (3.7) и таблицы (2).

$$h/(\omega\mu_0)=\sqrt{\varepsilon_0/\mu_0}\sqrt{1-\lambda_0^2/\lambda_{кр}^2}=\sqrt{1-\lambda_0^2/\lambda_{кр}^2/\lambda_{кр}^2}\,/(120\pi); \tag{14}$$

$$\mu_{11}=1.840;\ \ J_1(\mu_{11}r_0/r_0)=J_1(\mu_{11})=J_1(1{,}840)=0{,}5819,\ \text{то} \tag{15}$$

$$P=\sqrt{1-\lambda_0^2}/\lambda_{кр}^2E_{\max}^2r_0^2(\pi/120\pi)0{,}5819^2(1-1/1{,}840^2)\ \ \text{или} \tag{16}$$

$$P\approx 0{,}75(E_{\max}^2r_0^2/120\pi)\sqrt{1-\lambda_0^2/\lambda_{кр}^2}. \tag{17}$$

Итак, мы получаем выражение (7) для предельной мощности волны типа H11 в круглом волноводе. Для сухого воздуха при атмосферном давлении

$$E_{пред}\,0{,}75(E_{\max}^2r_0^2/120\pi)\sqrt{1-\lambda_0^2/\lambda_{кр}^2}.$$

2.4 Затухание волн в волноводах

Затухание волн h'' в круглых, как и в прямоугольных волноводах зависит от потерь в металлических стенках $h''ì$ в диэлектрике $h''ä$, заполняющем волновод. И соответственно все выкладки, приведенные в пункте 1.4 применимы и для круглого волновода.

Подставляя выражения для составляющих поля в (2.1), получим расчетные формулы для коэффициентов затухания конкретных типов волн в волноводах.

Коэффициент затухания за счет потерь в стенках круглого металлического волновода:

а) волна магнитного типа H_{mn}

$$h''_{\text{M}}=\frac{\sqrt{\mu_{ам}\omega/2\sigma_м}}{r_0\sqrt{\mu_\alpha/\varepsilon_\alpha}\sqrt{1-(f_{кр}/f)^2}}\left[\left(\frac{f_{кр}}{f}\right)^2+\frac{m^2}{\mu_{mn}^2-m^2}\right];: \tag{2.17}$$

б) волна электрического типа E_{mn}:

$$h''_{\text{M}}=\sqrt{\mu_{ам}\omega/2\sigma_м}\Big/\left(r_0\sqrt{\mu_a/\varepsilon_\alpha}\sqrt{1-(f_{кр}/f)^2}\right). \tag{2.18}$$

в) волна магнитного типа H0n:

$$h''_{\text{M}}=\sqrt{\mu_{ам}\omega/2\sigma_м}(f_{кр}/f)^2\Big/\left(r_0\sqrt{\mu_\alpha/\varepsilon_\alpha}\sqrt{1-(f_{кр}/f)^2}\right). \tag{2.19}$$

Для расчета коэффициента затухания h''ä за счет потерь в диэлектрике с удель ной проводимостью $\sigma_{ä}$ можно воспользоваться выражением (2.11),
где $tg(\delta_э) = \sigma_д / (\omega\varepsilon_\alpha)$.

Перепишем (2.11) с учетом потерь в диэлектрике:

$$h = \sqrt{\omega^2 \mu_\alpha \varepsilon_\alpha [1 - jtg(\delta_э)] - g^2}. \qquad (2.20)$$

Мнимая часть выражения (2.18) определяет коэффициент затухания

$$h''_{ä} = \mathrm{Im}\sqrt{\omega^2 \mu_\alpha \varepsilon_\alpha [1 - jtg(\delta_{ý})] - \mathrm{g}^2}. \qquad (2.21)$$

Для диэлектрика с малыми потерями при условии $tg(\delta_{ý}) \langle\langle 1$ формулу (2.22) можно упростить:

$$h''_д = \omega^2 \mu_\alpha \varepsilon_\alpha tg(\delta_э) / 2h, Hn/м, \qquad \text{или} \qquad (2.23)$$

$$\Delta_д = 8{,}69\pi\sqrt{\mu\varepsilon tg}(\delta_э) / \left(\lambda_0 \sqrt{1 - (1/\mu\varepsilon)(\lambda_0^2 / \lambda_{кр}^2)}\right), \text{дБ/м}. \qquad (2.24)$$

Пример 4

При каком отношении частоты f_1 к критической частоте $f_{êð}$ затухание волны типа E01, в круглом волноводе минимально.

$$h''_М = \sqrt{\mu_{ам} / 2\sigma_М} / \left(r_0 \sqrt{\mu_\alpha / \varepsilon_\alpha} \sqrt{1 - (f_{кр} / f)^2}\right). \qquad (1)$$

Зависимость затухания от частоты имеет характер кривой, изображенной на рис.

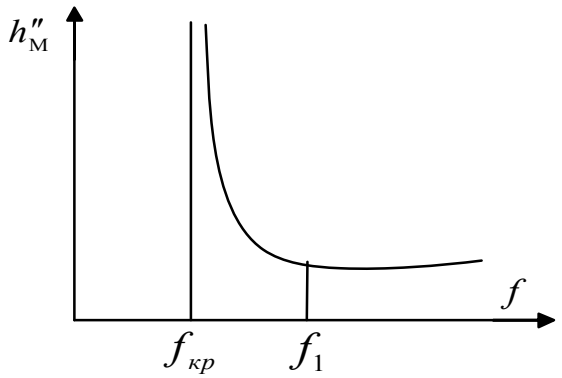


Рис.3.8

Обозначим $f_{кр} / f = \tau,$, тогда выражение для коэффициента затухания волны E_{01} можно записать в виде

$$h''_{\text{М}} = \sqrt{\mu_{ам}\pi / \sigma_{м}}\sqrt{f_{кр} / \tau} \Big/ \left(r_0 \sqrt{\mu_{\alpha} / \varepsilon_{\alpha}}\sqrt{1-\tau^2} \right) \quad \text{или}$$

$$h''_{\text{М}} = \frac{\sqrt{\mu_{ам} f_{кр}{}^{\pi} / \sigma_{м}}}{r_0 \sqrt{\mu_{\alpha} / \varepsilon_{\alpha}}} \frac{1}{\sqrt{\tau - \tau^3}}.$$

Значение τ, α ,следовательно, и ответ на поставленный вопрос, можно получить, определив корни уравнения (2.16).

Используя (2.16) и (2.19) можно показать, что минимум затухания приходится на =0,577 или частоту $f_1 = 1{,}73\ f_{кр}$

3. ОБЪЕМНЫЕ РЕЗОНАТОРЫ

Объемный резонатор представляет собой замкнутую полость, ограниченную металлическими стенками, внутри которой существуют электромагнитные колебания.

Объемный резонатор представляет собой часть определенного типа волновода, ограниченного с двух сторон металлическими стенками с определенной длиной.

Конфигурация объемного резонатора может быть любой, но наиболее практическое применение находят прямоугольный (рис.3.1) и цилиндрический (рис.3.2) резонаторы.

Для выполнения расчетной работы необходимо ознакомиться с теорией объемных резонаторов [1, с. 231- 255].

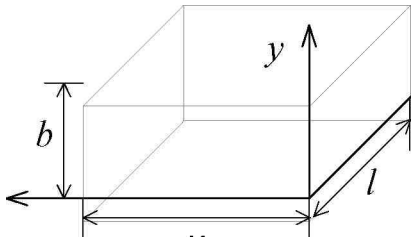


рис.(3.1)

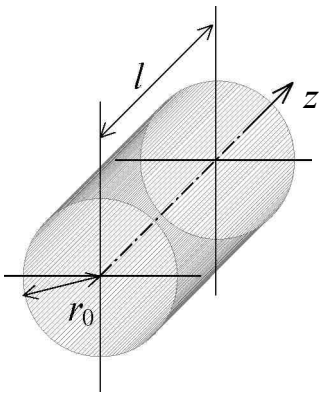


рис.(3.2)

3.1 Прямоугольный объемный резонатор

На основании аналогии с прямоугольным волноводом можно утверждать, что в резонаторе будут существовать колебания электрического типа (тип Е), у которых $H_z = 0$, и колебания магнитного типа (тип Н), у которых $E_z = 0$. При этом распределение поля вдоль оси **z** резонатора в отличие от волновода имеет характер стоячих волн. Резонатор является многоволновой колебательной системой. Если обычный параллельный колебательный контур резонирует на одной частоте, то объемный резонатор имее множеств резонансных частот, зависящих от типа колебаний.

Запишем выражения для составляющих поля колебаний E_{mnp} и H_{mnp} в прямоугольном резонаторе.

Составляющие поля для колебаний электрического типа E_{mnp}:

$$\dot{E}_z = C_э \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\cos\left(\frac{p\pi}{l}z\right);$$

$$\dot{E}_y = -C_э \frac{p\pi}{g^2 l}\frac{n\pi}{b}\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\sin\left(\frac{p\pi}{l}z\right);$$

$$\dot{E}_z = C_э \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\cos\left(\frac{p\pi}{l}z\right);$$

$$\dot{H}_x = jC_э \frac{\omega_p \varepsilon_\alpha}{g^2}\frac{n\pi}{b}\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\cos\left(\frac{p\pi}{l}z\right); \qquad (3.1)$$

$$\dot{H}_y = -jC_э \frac{\omega_p \varepsilon_a}{g^2}\frac{m\pi}{a}\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\cos\left(\frac{p\pi}{l}z\right);$$

$$\dot{H}_z = 0.$$

где $C_э$ - амплитудный коэффициент; p - число вариаций поля вдоль оси **z,** m – вдоль оси x, n - вдоль y.

Составляющие поля для колебаний магнитного типа H_{mnp}:

$$\dot{H}_x = jC_м \frac{p\pi}{g^2 l}\frac{m\pi}{a}\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\cos\left(\frac{p\pi}{l}z\right);$$

$$\dot{H}_y = jC_м \frac{p\pi}{g^2 l}\frac{n\pi}{b}\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\cos\left(\frac{p\pi}{l}z\right);$$

$$\dot{H}_z = -jC\text{“}\cos\left(\frac{\text{m}\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\sin\left(\frac{p\pi}{l}z\right); \qquad (3.2)$$

$$\dot{E}_x = C\text{“}\frac{\omega_p\mu_a}{g^2}\frac{n\pi}{a}\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\sin\left(\frac{p\pi}{l}z\right);$$

$$\dot{E}_y = C\text{“}\frac{\omega_p\mu_a}{g^2}\frac{m\pi}{a}\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\sin\left(\frac{p\pi}{l}z\right); \qquad \dot{E}_z = 0,$$

где См- амплитудный коэффициент.

В выражениях (3.1) и (3.2)

$$g = \sqrt{(m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2}.$$

Резонансная частота в прямоугольном объемном резонаторе для колебаний типа Emnp и Hmnp определяется одним выражением, независимо от типа колебаний:

$$\omega_p = \left(1/\sqrt{\mu_a\varepsilon_a}\right)\sqrt{(m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2 + (p\pi/l)^2}. \qquad (3.3)$$

Важно помнить, что для волн E_{mnp} числа m, n, p.

m = 1, 2, 3,….$(m \neq 0)$; n = 1, 2, 3,…$(n \neq 0)$; p = 0, 1, 2,….

В случае волн Hmnp числа m и n могут поочередно равняться нулю, но ряд чисел p должен начинаться с единицы:

m = 0, 1, 2, 3,….; n = 0, 1, 2, 3,…; p = 1, 2, 3,…(p = 0).

Используя соотношения (4.6), легко получить выражение для резонансной частоты f_p:

$$f_p = \left(0{,}5/\sqrt{\mu\varepsilon}\right)\sqrt{(m/a)^2 + (n/b)^2 + (p/l)^2}. \qquad (3.4)$$

Здесь $c = 3\cdot10^8$ м/с – скорость света в вакууме; μ и ε относительные магнитная и диэлектрическая проницаемости среды, заполняющей резонатор. Длина резонатора l, настроенного в резонанс на частоту возбуждаемого колебания, связана с длиной волны в волноводе $\lambda_в$, на базе которого сделан резонатор, соотношением

$l = p\lambda_в/2..$ (3.5)

Здесь p – число вариаций поля вдоль оси z . Выражение (3.5) следует из того, что

$$h = 2\pi / \lambda_в = \mathrm{p}\pi/\mathrm{l}. \qquad (3,6)$$

Основным типом колебаний в прямоугольном резонаторе, имеющем наименьшую резонансную частоту f_p, в зависимости от соотношения размеров a, b, l могут быть: H101, H011, E110.
Например, при a, b, l основным типом колебаний является E110, при a,b и l основным типом колебаний будет H103.

3.2 Цилиндрический объемный резонатор

Для цилиндрического резонатора анализ составляющих полей и резонансной частоты производится по аналогии с прямоугольным объемным резонатором, а также с учетом цилиндрической системы координат. Так составляющие электромагнитного поля колебаний электрического типа E_{mnp}

$$\dot{E}_r = A_э \frac{p\pi r_0}{l v_{mn}} J'\left(\frac{v_{mn}}{r_0} r\right) \cos(m\varphi) \sin\left(\frac{p\pi}{l} z\right);$$

$$\dot{E}_\varphi = A_э \frac{p\pi r_0}{l v_{mn}^2} \frac{m}{r} J_m\left(\frac{v_{mn}}{r_0} r\right) \sin(m\varphi) \sin\left(\frac{p\pi}{l} z\right);$$

$$\dot{E}_z = A_э J_m\left(\frac{v_{mn}}{r_0} r\right) \cos(m\varphi) \cos\left(\frac{p\pi}{l} z\right);$$

$$\dot{H}_r = -jA_э \frac{\omega_p \varepsilon_a r_0^2}{v_{mn}^2} \frac{m}{r} J_m\left(\frac{v_{mn}}{r_0} r\right) \sin(m\varphi) \cos\left(\frac{p\pi}{l} z\right);$$

$$\dot{H}_\varphi = -jA_э \frac{\omega_p \varepsilon_a r_0}{v_{mn}} J'_m\left(\frac{v_{mn}}{r_0} r\right) \cos(m\varphi) \cos\left(\frac{p\pi}{l} z\right); \qquad (3.7)$$

$$\dot{H}_z = 0.$$

где A_i - амплитудный коэффициент; v_{mn} - корень функции Бесселя; m -- порядок функции; n -- номер корня (см. табл.2); p -- число вариаций поля вдоль оси **z** резонатора: p=1 для волны E111, p=2 для волны E112, p=0 для волны E110;

$$\omega_p = 2\pi f_p.$$

Составляющие электромагнитного поля колебаний магнитного типа H_{mnp} в цилиндрическом резонаторе:

$$\dot{H}_r = jA_м \frac{r_0}{\mu_{mn}} \frac{p\pi}{l} J'_m\left(\frac{\mu_{mn}}{r_0} r\right) \cos(m\varphi) \cos\left(\frac{p\pi}{l} z\right);$$

$$\dot{H}_\varphi = -jA_м \frac{r_0^2}{\mu} \frac{p\pi}{l} \frac{m}{r} J_m\left(\frac{\mu_{mn}}{r_0} r\right) \sin(m\varphi) \left(\frac{p\pi}{l} z\right);$$

$$\dot{H}_z = -jA_м J_m\left(\frac{\mu_{mn}}{r_0} r\right) \cos(m\varphi) \sin\left(\frac{p\pi}{l} z\right);$$

$$\dot{E}_r = A_м \frac{\omega_p \mu_a r_0^2 m}{\mu_{mn}^2} \frac{m}{r} J_m\left(\frac{\mu_{mn}}{r_0} r\right) \sin(m\varphi) \sin\left(\frac{p\pi}{l} z\right);$$

$$\dot{E}_\varphi = A_м \frac{\omega_p \mu_a r_0^2 m}{\mu_{mn}^2} \frac{m}{r} J'_m\left(\frac{\mu_{mn}}{r_0} r\right) \cos(m\varphi) \sin\left(\frac{p\pi}{l} z\right); \qquad (3.8)$$

$$\dot{E}_z = 0,$$

где A_i - амплитудный коэффициент; v_{mn} - корень производной функции Бесселя; m -- порядок функции; n -- номер корня (см. табл. 1); p -- число вариаций поля вдоль оси **z** резонатора.
Для колебаний типа H_{mnp} p = 0.

Построение картин поля в резонаторах можно провести по методике, предлагаемой в [1].

Резонансная частота цилиндрического объемного резонатора для колебаний E_{mnp} и H_{mnp} определяется по следующим формулам, которые зависят от типа колебания:

Для волн типа E_{mnp}:

$$\boldsymbol{f_p = \left(c / \left[2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}\right]\right)\sqrt{\left(v_{mn} / r_0\right)^2 + \left(p\pi / l\right)^2}.} \qquad (3.9)$$

где v_{mn} берется из табл.1 .

В случае колебаний типа H_{mnp} справедливо соотношение

$$f_p = \left(c / \left[2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}\right]\right)\sqrt{\left(\mu_{mn} / r_0\right)^2 + \left(p\pi / l\right)^2}. \qquad (3.10)$$

Здесь μ_{mnp} берется из таблицы 2.

Для цилиндрического резонатора основными являются колебания, обладающие наименьшей резонансной частотой. При заданных размерах резонатора r_0 и l, как следует из соотношений (??) и (??), основные типы – H_{111} и E_{010}.

Резонансные частоты этих типов колебаний равны, если $l = 2{,}03 r_0$. . При отношении $l / r_0 \langle 2.03$ основным типом является колебание E_{010}, а при $l / r_0 \rangle 2.03$ основным будет H_{113}.

Пример 5

Для колебаний типа E_{011} в цилиндрическом резонаторе с размерами r_0 = 30мм, л = 60мм определить резонансную частоту, записать выражения для составляющих поля, изобразить картину силовых линий векторов электромагнитного поля в резонаторе. Резонатор заполнен воздухом.

Решение:

Используя (4.13), определим резонансную частоту для колебаний типа E_{011}, (m=0, n =1, p =1)

$$f_p = \left(c / \left[2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}\right]\right)\sqrt{\left(v_{01} / r_0\right)^2 + \left(\pi / l\right)^2} \text{ или}$$

$$f_p = \left(3\cdot 10^8 / 2\pi\right)\sqrt{\left(2{,}405 / 3\cdot 10^{-2}\right)^2 + \left(\pi / 6\cdot 10^{-2}\right)^2} = 4{,}57\cdot 10^9\ Гц.$$

Согласно (3.7) можно записать составляющие поля для колебания типа E_{011}:

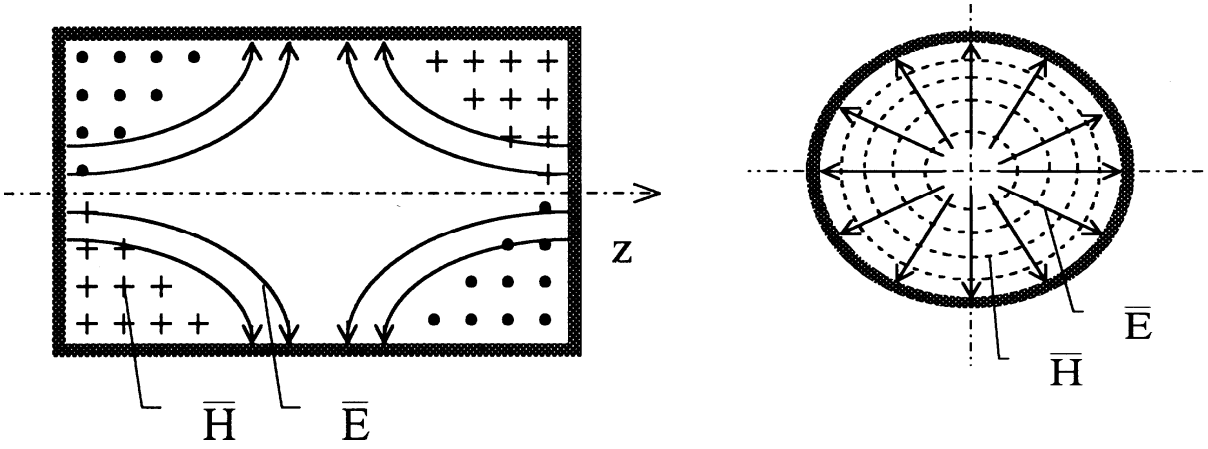
$$\dot{E}_r = -A_э \frac{\pi r_0}{l v_{01}} J_0'\left(\frac{v_{01}}{r_0} r\right)\sin\left(\frac{\pi}{l} z\right); \qquad \dot{E}_\varphi = 0;$$

$$\dot{E}_z = A_э J_0\left(\frac{v_{01}}{r_0} r\right)\cos\left(\frac{\pi}{l} z\right);$$

$$\dot{H}_r = 0; \qquad \dot{H}_\varphi = -jA_э \frac{\omega_p \varepsilon_a r_0}{v_{01}} J_0'\left(\frac{v_{01}}{r_0} r\right)\cos\left(\frac{\pi}{l} z\right); \qquad \dot{H}_z = 0,$$

Где $3\cdot10^{-2}$м; $l=6\cdot10^{-2}$м; $\nu_{01}=2{,}405$; $\omega_p=2\pi\cdot4{,}57\cdot10^9=28{,}7\cdot10^9=28{,}7\cdot10^9 c^{-1}$, $\varepsilon_\alpha=\varepsilon_0=10^{-9}/(36\pi)$Ф/м.

Согласно (4.15) вектора $\dot{\bar{E}}=\bar{1}_r\cdot\dot{E}_r+\bar{1}_z\cdot\dot{E}_z$; $\dot{\bar{H}}=\bar{1}_\varphi\cdot\dot{H}_\varphi$.
Составляющие векторов поля E , E , H не зависят от координаты 4, так как m=0, а зависят только от координаты r и z.
Картина силовых линий векторов поля колебания E011 для некоторого фиксированного момента времени изображена на рис 3.3.



3.3 Добротность объемных резонаторов

Добротность объемного резонатора Q определяется как отношение энергии электромагнитного поля , W запасенной в резонаторе, к энергии потерь $W_{пот.т}$, , теряемой за период собственных колебаний, умноженную на 2π :

$$Q=2\pi\cdot W/W_{\text{пот.т.}} \qquad (3.11)$$

Энергия потерь определяется через мощность потерь Рпот на период собственных колебаний Т, соответствующий резонансу

$$W/W_{\text{пот.т.}}=P/T_{\text{пот.т.}}=P_{\text{пот.т.}}/f_p. \qquad (3.12)$$

Подставляя выражение (3.12) в (3.11), получим

$$Q=\omega_p W/P_{\text{пот.}} \qquad (3.13)$$

Энергия, запасенная в объемном резонаторе любого типа:

$$W = \int_v \varepsilon_\alpha \frac{\left|\dot{\bar{E}}\right|^2}{2} dV \qquad \text{- энергия электрического поля} \qquad (3.14)$$

$$W = \int_v \mu_\alpha \frac{\left|\dot{\bar{H}}\right|^2}{2} dV \qquad \text{- энергия магнитного поля} \qquad (3.15)$$

Под мощностью потерь $P_{пот}$ подразумевают суммарную мощность потерь в диэлектрике $P_{пот.д.}$ и в металле $P_{пот\ м.}$ объемного резонатора.

$$P_{пот.} = P_{пот.д.} + P_{пот.м.} \qquad (3.16)$$

Учитывая выражения (3.13), соотношение (3.16) можно переписать в виде

$$Q = \omega_p W / (P_{пот.д.} + P_{пот.м.}) \qquad \text{или}$$

$$1/Q = 1/Q_М + 1/Q_Д.,$$

где добротность за счет $Q_М$ потерь в металле определяется выражением

$$Q = \omega_p W / P_{пот.м,} \qquad (3.17)$$

А добротность $Q_Д$ за счет потерь в диэлектрике –

$$Q = \omega_p W / P_{пот.д.} \qquad (3.18)$$

Мощность потерь в металле рассчитывается по формуле

$$P_{пот.м} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu_{ам}\omega}{2\sigma_м}} \int_{S_м} |\dot{H}_\tau|^2 \, dS_М. \qquad (3.19)$$

$$Q_М = \sqrt{\frac{2\omega_p \sigma_м}{\mu_{ам}} \mu_\alpha} \int_V |\dot{H}|^2 \, dV \Big/ \int_{S_м} |\dot{H}_\tau|^2 \, dS_М \qquad (3.20)$$

$$Q_д = \omega_p \varepsilon_\alpha / \sigma_д = 1/tg\delta_э, \qquad (3.21)$$

где $tg\delta_э$ тангенс угла потерь вещества, заполняющего резонатор.

Таким образом, **добротность резонатора**, обусловленная потерями в диэлектрике, **не зависит от формы резонатора, его размеров и типа колебания** и полностью определяется тангенсом угла потерь вещества.

Рассмотрим формулы, определяющие добротность резонаторов как прямоугольной, так и цилиндрической формы, обусловленную потерями в металлических стенках резонатора.

Для упрощения введем обозначение

$$a_1 = \mu_a \sqrt{2\sigma_м \omega_p / \mu_{ам}}.$$

В нижеприведенных формулах K_{0m}, , K_{0n}, K_{0p}, - символы Кронекера. Причем

K_{0m}, = 1, если m = 0; K_{0m}, =0, если m ≠ 0;

K_{0n}, =1, если n = 0; K_{0n}, =0, если n ≠ 0;

K_{0n}, =1, если p = 0; K_{0n}, =0, если p ≠ 0;

Прямоугольный резонатор:

$$Q_{Hmnp} = (a_1/4)abl\left[(m/a)^2 + (n/b)\right]\left[(m/a)^2 + (n/b)^2 + (p/l)^2\right]:$$

$$\left\{\begin{array}{l} ab(p/l)^2\left[(m/a)^2 + (n/b)^2 + (m/a)^2 l/\{(1+K_{on})b\} + (n/b)^2 l/\{(1+K_{om})a\}\right] \\ + l\left[a/(1+K_{on}) + b/(1+K_{om})\right]\left[(m/a)^2 + (n/b)^2\right]^2 \end{array}\right\};$$

$$Q_{Emnp} = \frac{(a_1/4)(1+K_{0p})}{1 + l(1+K_{0p})\left\{\left[(m/a)^2 b + (n/b)^2 a\right]/\left[m^2(b/a) + n^2(a/b)\right]\right\}}; \qquad (3.22)$$

$$Q_{Hmnp} = \frac{(a_1/2)\left[(\mu_{mn}/r_0)^2 + (p\pi/l)^2\right]1(m/\mu_{mn})^2\rfloor}{(\mu_{mn}/r_0)^2 + \left(2_p{}^2\pi^2 r_0/l^3\right) + \left[m^2 p^2\pi^2/(\mu_{mn}^2 l^2)\right]\left[1 - (2_{r0}/l)\right]}; \qquad (3.23)$$

Цилиндрический резонатор:

$$Q_{Hmnp} = \frac{(a_1/2)r_0\left[(\mu_{mn}/r_0)^2 + (p\pi/l)^2\right]\left[1-(m/\mu_{mn})^2\right]}{(\mu_{mn}/r_0)^2 + \left(2p^2\pi^2 r_0/l^3\right) + \left[m^2p^2\pi^2/\left(\mu_{mn}^2 l^2\right)\right]\left[1-(2r_0/l)\right]}; \qquad (3.24)$$

$$Q_{Emnp} = (a_1/2)l\left(1+K_{0p}\right)/\left[1+\left(1+K_{0p}\right)l/(2r_0)\right] \qquad (3.25)$$

При расчетах следует помнить, что реально достижимые цифры добротностей, как правило, несколько ниже теоретических, предсказываемых формулами (3.22---3.25), поскольку здесь не учитываются потери в трущихся контактах между боковой поверхностью и поршнем, с помощью которого осуществляется настройка резонатора. И значение добротности, по выше приведенным формулам, принято называть ненагруженной добротностью или собственной добротностью $= Q$. Значение добротности нагруженного резонатора запишется в виде Q_H

$$Q_H = Q/\left(1 + P_H / P_{\text{пот}}\right). \qquad (3.26)$$

Здесь $P_н$ – средняя мощность, отдаваемая резонатором в нагрузку, которая оказывается тем больше, чем выше коэффициент связи резонатора с внешними цепями.

Пример 6

Прямоугольный объемный резонатор с размерами: a =6см, b =3 см, l =2 см работает на основном типе колебаний. Стенки резонатора посеребрены. Проводимость серебра $Q_{\text{М}} = 6{,}1\cdot 10^7$ См/м Резонатор заполнен воздухом. Определить резонансную частоту и собственную добротность резонатора. Как изменится добротность нагруженного резонатора по сравнению с ненагруженным при условии, что средняя мощность, отдаваемая резонатором в нагрузку равна удвоенной мощности потерь в металле, из которого сделан резонатор.

Решение:

В соответствии с формулой (4.3) при заданных размерах резонатора резонансная частота минимальна для колебания типа E_{110}, следовательно, этот тип колебания является основным.

Для колебания типа E_{110} формулу (4.9) можно представить в виде

$$f_p = 0{,}5c\sqrt{(1/a)^2 + (1/b)^2}.$$

Подставляя значения a и b, определили $f_p = 5{,}6 \cdot 10^9$ Гц.

Используя (4.31), (4.33) и учитывая, что символ Кронекера К0р = 1, так как для колебания Е110 индекс р = 0, получили

$$Q_{E_{110}} = (a_1 / 4)l(1+1)/\left(1 + l(1+1)\left[(b/a + a/b)\right]\right),$$

где $a_1 = \mu_a \sqrt{2\sigma_м \omega_p / \mu_{ам}}$.

Подставляя исходные данные и учитывая, что --ам = -о, находим

$$a_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}1 \cdot 10^7 \cdot 2\pi \cdot 5{,}6 \cdot 10^9}{4\pi \cdot 10^{-7}}} 4\pi \cdot 10^{-7} = 2{,}32 \cdot 10^6 \text{м}^{-3}.$$

Добротность ненагруженного резонатора

$$Q_{Emnp} = \frac{2{,}32 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 10^{-2} / 2}{1 + 2 \cdot 2 \cdot 10^{-2} \dfrac{3 \cdot 10^{-2} / \left(6^2 \cdot 10^{-4}\right) + 6 \cdot 10^{-2} / \left(3^2 \cdot 10^{-4}\right)}{3 \cdot 10^{-2} / \left(6 \cdot 10^{-2}\right) + 6 \cdot 10^{-2} / \left(3 \cdot 10^{-2}\right)}} = 10545.$$

Согласно (3.26) добротность нагруженного резонатора $Q_H = Q / \left(1 + P_H / P_{\text{пот}}\right)$.

По условию задачи $P_H = 2P_{\text{пот}}$.

Тогда $Q_{нE011} = Q_{E011} / \left(1 + 2P_{\text{пот}} / P_{\text{пот}}\right) = Q_{E011} / 3$

или $Q_{E011} = 10545 / 3 = 3515.$

4. Указания по выполнению курсовой работы

Курсовая работа состоит из взаимосвязанных пяти задач по определению таких параметров как составляющие поля, определение критической длины волны, по выявлению основной волны, определению частоты или габаритов заданного волновода. Также на базе предлагаемого заданием волновода, строится объемный резонатор, для которого определяются такие параметры как добротность нагруженного (ненагруженного) объемного резонатора, резонансные частоты и длину объемного резонатора.

Для решения каждой задачи необходимо изучить теоретическую часть методического пособия и рассмотреть примеры.

Задание для каждого студента дается индивидуально преподавателем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Баскаков С.И. Электродинамика и распространение радиоволн. − М.: Высшая школа, 1992.

2. Федоров Н.Н. Основы электродинамики. – М.: Высшая школа, 1980.

3. Филатова Е.А., Ягодина Л.А. Методические указания к практическим занятиям по курсу "Физика (специальные разделы)". Электромагнитные волны. М.: Изд-во МЭИ, 1996.

4. Крамм М.Н. Сборник задач по основам электродинамики.- М.: Издательство МЭИ, 1997.

5. Филатова Е.А., Ягодина Л.А., Жихарева Г.В. Волноводы и объемные резонаторы: методическое пособие для бакалавров. - М.: Издательство МЭИ, 2000.

Электромагнитные поля и волны
Методические указания к выполнению курсовой работы

Составители: Г.О.Абдыллаева, Б.И.Исмаилов.

Тех. редактор ***Бейшеналиева А.И.***

Подписано к печати 20.10.2010 г. Формат бумаги 60x84 $^{1}/_{16}$.
Бумага офс. Печать офс. Объем 2 п.л. Тираж 100 экз. Заказ 289. Цена 29 с.

Бишкек, ул. Сухомлинова, 20. ИЦ “Текник” КГТУ им. И.Раззакова, т.: 54-29-43
e-mail: beknur@mail.ru