МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ

КЫРГЫЗСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ им. И.РАЗЗАКОВА

Кафедра «Высшая математика»

МАТЕМАТИКА

Лекции и типовые задания по разделу «Ряды»

БИШКЕК – 2011

«Рекомендовано»
на заседании кафедры
«Высшая математика»
им. Р. Усубакунова
Протокол № 8 от 19.04.11г.

«Одобрено»
Методическим советом
энергетического факультета

Протокол № 8 от 20.04.11г

УДК: 517.521.1(042.4)

Составители: ГОЛОВИНА В.Г., ПАХЫРОВ З.П., ТАГАЕВА С.Б.

Математика. Лекции и типовые задания по разделу «Ряды» / КГТУ им. И.Раззакова; сост.: В.Г.Головина, З.П. Пахыров, С.Б. Тагаева. – Б.: ИЦ «Текник», 2011. – 42 с.

Лекции написаны в соответствии с программой. Имеются типовые задания. Каждое задание содержит 5 задач. Составлено 30 вариантов (всего150 задач). Задачи снабжены ответами. Данная работа может быть полезна не только студентам, но и начинающим преподавателям.

Предназначены для студентов энергетического факультета кредитной системы обучения

Илл.: 4 . Библиогр.: 4 наименов.

Рецензент к.ф.-м.н., доц. Уметалиев М.У.

Введение

Ц е л ь работы – приобретение соответствующих знаний по разделу «Ряды». Освоение этого раздела требует не только основательного изучения, но и запоминания большого числа утверждений и формул. Ряды доставляют трудности особого характера, связанные с необычностью самого объекта изучения, каковым является ряд. Ряд по внешнему виду представляет «сумму бесконечного числа слагаемых». На самом же деле речь идет не об обычной сумме.

Рассмотрим отрезок длины 2.(рис.1)

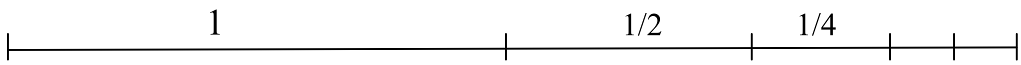

Рис. 1

Разделим его на два равных отрезка (каждый длины 1). Не трогая левого отрезка, разделим правый на два равных отрезка (каждый длины 1/2). Правый из них разделим на два равных отрезка (каждый длины 1/4). Продолжим этот процесс до бесконечности. Тогда мы приходим к разбиению отрезка длины 2 на отрезки длины 1, 1/2, 1/4, 1/8, 1/16 и т.д. Имеем

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\dots=2 \qquad (0)$$

Это рассуждение было известно еще грекам, и философ Зенон оспаривал его законность. Зенон известен нам своими «парадоксами».

Один из парадоксов утверждает, что бегущий человек никогда не сможет достичь своей цели, поскольку он должен сначала пробежать половину требуемой дистанции, затем половину оставшейся дистанции, затем снова половину оставшейся части и т.д.; таким образом, он должен пробежать бесконечное множество расстояний, а это будет продолжаться вечно.

Конечно, Зенон видел бегунов, достигавших цели. Что же хотел сказать этим парадоксом Зенон? Если он хотел сказать, что сложение бесконечного множества чисел нельзя толковать как процесс, аналогичный сложению конечного их числа, то он был прав.

Левая часть (0) есть числовой ряд. Если бы мы попытались вычислить сумму этого числового ряда, последовательно выполняя все указанные в ней сложения, то это, конечно, никогда бы не окончилось. И все же мы чувствуем, что равенство (0) в некотором смысле верно. Смысл левой части выражения (0) нам предстоит ввести самим, определить каким- то образом понятие суммы ряда. Этими и другими вопросами занимается теория рядов.

§1. Числовые ряды. Основные понятия

Определение. Ч и с л о в ы м   р я д о м называется символ вида $u_1+u_2+u_3+...+u_n+...=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$, где $u_1,u_2,u_3,...,u_n,...$ - бесконечная числовая последовательность. Числа $u_1,u_2,u_3,...,u_n,...$ - ч л е н ы   р я д а, u_n - общий член ряда.

Важным понятием теории рядов является понятие сходимости ряда.

Определение. Конечная сумма первых n членов ряда, т.е. $S_n=u_1+u_2+u_3+...+u_n$ называется n-ой ч а с т и ч н о й с у м м о й этого ряда. Если существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$, то ряд называется с х о д я щ и м с я, в противном случае- р а с х о д я щ и м с я.

Если ряд сходится, то число $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ называется с у м м о й   р я д а.

Разность $r_n=S-S_n=u_{n+1}+u_{n+2}+...$ называется о с т а т к о м   ряда (после n-го члена).

П р и м е р. По заданному общему члену $u_n=\dfrac{1}{n(n+2)}$ записать ряд и найти его сумму.

Придавая n последовательные значения $1,2,3,...$, получаем

$$n=1,\quad u_1=\frac{1}{1\cdot 3};\quad n=2,\quad u_2=\frac{1}{2\cdot 4};\quad n=3,\quad u_3=\frac{1}{3\cdot 5},....$$

Таким образом, имеем ряд $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{2\cdot 4}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+...+\dfrac{1}{n(n+2)}+...=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+2)}$.

Для определения n-ой частичной суммы этого ряда удобно разложить общий член ряда на сумму простейших дробей. Имеем $\dfrac{1}{n(n+2)}=\dfrac{A}{n}+\dfrac{B}{n+2}$, $1=A(n+2)+Bn$. Последовательно полагаем $\left.\begin{array}{l} n=0:1=2A \\ n=-2:1=-2B \end{array}\right\}\Rightarrow A=\dfrac{1}{2}, B=-\dfrac{1}{2}$. Таким образом, $\dfrac{1}{n(n+2)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+2}\right)$. Полагая в этом равенстве $n=1,2,3,...$, получаем

$$n=1,\quad u_1=\frac{1}{1\cdot 3}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right),$$

$$n=2,\quad u_2=\frac{1}{2\cdot 4}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right),$$

$$n=3,\quad u_3=\frac{1}{3\cdot 5}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right),$$

……………………………………………

$$n=n,\quad u_n=\frac{1}{n\cdot(n+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$$

Сложив почленно, получим выражение n-ой частичной суммы

$$S_n = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}-\frac{2n+3}{(n+1)(n+2)}\right)$$

Откуда $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}-\frac{2n+3}{(n+1)(n+2)}\right)=\frac{3}{4}$.

Таким образом, ряд сходится и его сумма $S=\frac{3}{4}$.

П р и м е р. Решить вопрос о сходимости ряда

$1-1+1-1+\ldots+(-1)^{n-1}+\ldots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$.

Имеем, $S_1=1,\quad S_2=0,\quad S_3=1,\quad S_4=0,\ldots,\ \lim\limits_{n\to\infty}S_n$ - не существует. Следовательно, данный ряд расходится.

П р и м е р. Решить вопрос о сходимости ряда

$a+aq+aq^2+\ldots+aq^{n-1}+\ldots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}aq^{n-1}$, который называется г е о м е т р и ч е с к о й п р о г р е с с и е й, a - первый член прогрессии, q - знаменатель прогрессии.

Известно (из школьного курса), что $S_n=\frac{a-aq^n}{1-q},\quad q\neq 1$.

а) при $|q|<1\quad \lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a-aq^n}{1-q}=\frac{a}{1-q}$,

б) при $|q|>1\quad \lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a-aq^n}{1-q}=\infty$,

в) при $q=1\quad S_n=na,\ \lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}na=\infty$,

г) при $q=-1\quad S_n=0$ при n - четном, $S_n=a$ при n - нечетном. Следовательно, при $a\neq 0$ $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ не существует. Итак,

$$\sum_{n=1}^{\infty}aq^{n-1}-\begin{cases}\text{сходится при } |q|<1, S=\dfrac{a}{1-q},\\ \text{расходится при } |q|\geq 1.\end{cases}$$

П р и м е ч а н и е. Арифметическая прогрессия $a+(a+d)+\ldots+[a+(n-1)d]+\ldots$ является расходящимся рядом при любой разности d.

Действительно, $S_n=\frac{u_1+u_n}{2}\cdot n=\frac{a+[a+(n-1)d]}{2}\cdot n=an+\frac{d}{2}n(n-1)\to\infty$, при $n\to\infty$.

§ 2. Свойства сходящихся рядов

1. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ сходится и его сумма равна S, то и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}cu_n$, где $c=const$, также сходится и его сумма равна cS, т.е. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=S\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}cu_n=cS$, где $c=const$.

Пусть S_n - частичная сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$; σ_n - частичная сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} cu_n$. Тогда $\sigma_n = cu_1 + cu_2 + cu_3 + ... + cu_n = c(u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n) = cS_n$.

Отсюда, $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} cS_n = c \lim_{n\to\infty} S_n = cS$.

Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} cu_n$ сходится и его сумма равна cS. Что и требовалось доказать.

2. Если ряды $\sum u_n$, $\sum v_n$ сходятся и имеют соответственно суммы U и V, то ряды $\sum (u_n \pm v_n)$ также сходятся и имеют соответственно суммы $U \pm V$.

Доказательство легко проводится при помощи предельного перехода от соответствующих n- ных частичных сумм.

3. Если сходится ряд $u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_{k-1} + u_k + u_{k+1} + ... + u_n + ...,$ (1)

то сходится и ряд $u_{k+1} + u_{k+1} + ... + u_n + ...$ (2)

и обратно, если сходится ряд (2), то сходится и ряд (1). Другими словами: на сходимость ряда не влияет отбрасывание любого конечного числа его первых членов.

Пусть S_k - сумма отброшенных членов ряда (1), S_n - частичная сумма ряда (1), σ_{n-k} - сумма $(n-k)$ первых членов ряда (2). Тогда, $S_n = S_k + \sigma_{n-k}$. (3)

Пусть ряд (1) сходится и имеет сумму S, т.е. $\lim_{n\to\infty} S_n = S$. Тогда из (3) $\lim_{n\to\infty} \sigma_{n-k} = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_k) = S - S_k$, т.е. ряд (2) сходится.

Пусть ряд (2) сходится и имеет сумму σ, т.е. $\lim_{n\to\infty} \sigma_{n-k} = \sigma$. Тогда из (3) $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (S_k + \sigma_{n-k}) = S_k + \sigma$, т.е. ряд (1) сходится.

4. Если в сходящемся ряде произвольно объединить соседние члены в группы, не нарушая порядка членов, то составленный таким образом ряд будет сходиться и имеет ту же сумму, что и первоначальный.

П р и м е р (парадокс). Каждое число a равно 0. С одной стороны имеем $a - a + a - a + ... = (a - a) + (a - a) + ... = 0$, с другой стороны, $a - a + a - a + ... = (a - a) - (a - a) - ... = a$. Сравнивая их, получим $a = 0$.

Таким образом, в рядах не всегда можно вводить скобки. Ряд $a - a + a - a + ...$- расходящийся.

§ 3. Необходимый признак сходимости ряда

Т е о р е м а. Если ряд $\sum u_n$ сходится, то $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

Доказательство.

Пусть $S = \lim_{n\to\infty} S_n$, $u_n = S_n - S_{n-1}, \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0.$

Не следует упускать из виду, что условие $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ является необходимым для сходимости ряда, но не достаточным. Это означает, что существуют расходящиеся ряды, для которых $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

Для подтверждения рассмотрим ряд $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}+...=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, который называется г а р м о н и ч е с к и м. Его общий член стремится к нулю при $n\to\infty$: $\lim_{n\to\infty}u_n=0$.

Покажем, что гармонический ряд расходится.

В самом деле, если бы гармонический ряд сходился, то имели бы $\lim_{n\to\infty}(S_{2n}-S_n)=\lim_{n\to\infty}S_{2n}-\lim_{n\to\infty}S_n=S-S=0.$

С другой стороны, $S_{2n}-S_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}>\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+...+\frac{1}{2n}=n\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}$, $S_{2n}-S_n>\frac{1}{2}$. Отсюда следует, что равенство $\lim_{n\to\infty}(S_{2n}-S_n)=0$ невозможно. Следовательно, гармонический ряд расходится.

С л е д с т в и е (достаточный признак расходимости ряда).

Если $\lim_{n\to\infty}u_n\neq 0$, то ряд $\sum u_n$ расходится.

Действительно, если бы ряд сходился, то $\lim_{n\to\infty}u_n=0$, что противоречит условию.

П р и м е р. Решить вопрос о сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n}{n+1}$.

Имеем $u_n=\frac{2n}{n+1}$, $\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n+1}=2.$ Следовательно, данный ряд расходится.

§ 4. Достаточные признаки сходимости знакоположительных рядов

Доказывать сходимость или расходимость каждого ряда, а также вычислять сумму сходящегося ряда можно, опираясь непосредственно на определения сходимости и суммы. Однако такой путь оказывается неудобным из-за трудности явного вычисления частичных сумм ряда. Нередко бывает, что при исследовании рядов значения частичных сумм не представляют интереса и после решения задачи превращаются в «отходы производства». Более того, иногда не нужна даже сумма ряда, а все исследования ведутся лишь ради решения вопроса о сходимости или расходимости ряда. Поэтому полезны признаки, позволяющие решать вопрос о сходимости ряда без нахождения его суммы.

Ограничимся рассмотрением лишь положительных рядов.

Ряд $u_1+u_2+u_3+...+u_n+...$, все члены которого удовлетворяют неравенству $u_n\geq 0$, называется п о л о ж и т е л ь н ы м рядом.

Рассмотрим наиболее часто встречающиеся признаки сходимости и расходимости рядов.

1. Признаки сравнения рядов

Т е о р е м а. Если даны два положительных ряда

$$u_1+u_2+u_3+...+u_n+..., \tag{4}$$

$$v_1+v_2+v_3+\ldots+v_n+\ldots, \qquad (5)$$

причем $u_n \le v_n$ при любом n, то:

а) из сходимости ряда (5) следует сходимость ряда(4), причем сумма ряда (4) не превосходит суммы ряда (5),

б) из расходимости ряда (4) следует расходимость ряда (5).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots=(S_u)_n$, $v_1+v_2+v_3+\ldots+v_n+\ldots=(S_v)_n$.

Так как в этих рядах нет отрицательных членов, то с увеличением n не будут убывать последовательности $(S_u)_n$ и $(S_v)_n$. Так как ряд (5) сходится, то его сумма S_v будет удовлетворять неравенству $(S_v)_n < S_v$. По условию $u_n \le v_n$, следовательно, $(S_u)_n \le (S_v)_n$, а поэтому и подавно $(S_u)_n < S_v$, т.е. последовательность $(S_u)_n$ с возрастанием n не убывает и ограничена. На основании теоремы о существовании предела возрастающей ограниченной последовательности заключаем, что $(S_u)_n$ имеет предел при $n\to\infty$. Следовательно, ряд (4) сходится, причем $\lim\limits_{n\to\infty}(S_u)_n = S_u \le S_v$.

Пусть ряд (4) расходится, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty}(S_u)_n=\infty$. Так как $(S_v)_n \ge (S_u)_n$, то $\lim\limits_{n\to\infty}(S_v)_n=\infty$, т.е. ряд (5) также расходится.

Отметим, что для сравнения часто используются ряды:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ - геометрическая прогрессия,

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}\begin{cases} -\,сходящийся\;при\;\alpha>1 \\ -\,расходящийся\;при\;\alpha\le 1\end{cases}$,- обобщенный гармонический ряд (ряд Дирихле).

П р и м е р. Исследовать ряды на сходимость

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 3^{n-1}}$

Р е ш е н и е. Общий член данного ряда $u_n=\frac{1}{n\cdot 3^{n-1}}$, $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n\cdot 3^{n-1}}=0$, т.е. необходимый признак сходимости выполняется. Рассмотрим вспомогательный сходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{n-1}}$. Имеем $\frac{1}{n\cdot 3^{n-1}} \le \frac{1}{3^{n-1}}\ \forall n\in(1,\infty)$. Следовательно, данный ряд сходится.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}$

Р е ш е н и е. Так как с увеличением знаменателя дробь уменьшается, то общий член данного ряда $v_n=\frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}>\frac{1}{\sqrt{n^2}}=\frac{1}{n}=u_n$, но ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$- гармонический, расходящийся, следовательно, данный ряд расходится.

П р и м е ч а н и е. Сходимость или расходимость ряда не нарушается, если отбросить или приписать к нему любое конечное число членов. Действительно, если ряд сходится, то от таких операций может изменится лишь его сумма. Если же ряд расходится, то сумма конечного числа слагаемых не сделает его сходящимся. Поэтому указанный признак может быть применим и в том случае, если $u_n \le v_n$ будет выполняться, начиная с некоторого $n > N$.

2. Предельный признак сравнения

Т е о р е м а. Если $u_n \ge 0, v_n \ge 0$ $(n = 1,2,3,...)$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = A > 0$, то ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ одновременно сходятся или расходятся.

П р и м е р. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+4n}}$.

Р е ш е н и е. Сравним с гармоническим рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Имеем $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{\sqrt{n^2+4n}} : \frac{1}{n}) = 1$, следовательно, данный ряд расходится.

Применение признаков сравнения при исследовании сходимости рядов часто бывает затруднительным из-за необходимости составлять вспомогательные ряды. Общих приемов для этого и годных для всех случаев не существует. Используются и другие достаточные признаки.

3. Признак Даламбера

Т е о р е м а. Если ряд $\sum u_n$ с положительными членами таков, что существует $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$, то при: 1) $q < 1$ ряд сходится; 2) $q > 1$ ряд расходится; 3) $q = 1$ вопрос о сходимости остается нерешенным.

П р и м е р. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$

Р е ш е н и е. Имеем $u_n = \frac{1}{n!}$, $u_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0 < 1$. Следовательно, данный ряд сходится.

4. Радикальный признак Коши.

Т е о р е м а. Если ряд $\sum u_n$ с положительными членами таков, что существует $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = q$, то при: 1) $q < 1$ ряд сходится; 2) $q > 1$ ряд расходится; 3) $q = 1$ вопрос о сходимости остается нерешенным.

Отметим, что сила признаков Даламбера и радикального Коши одинакова, т.к. основная идея доказательства одна и та же.

П р и м е р. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{3n+1}\right)^n$.

Р е ш е н и е. Имеем $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2n}{3n+1}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{3n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{3+1/n}=\frac{2}{3}<1$. Следовательно, данный ряд сходится.

5.Интегральный признак Коши

Т е о р е м а. Рассмотрим ряд $\sum u_n$ $(u_n>0)$, члены которого являются значениями непрерывной функции $f(x)$ при целых значениях аргумента x: $u_1=f(1), u_2=f(2),\dots,u_n=f(n),\dots$ и пусть $f(x)$ монотонно убывает в интервале $[1,\infty)$. Тогда $\sum u_n$ и $\int_1^{\infty}f(x)dx$ одновременно сходятся или расходятся.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть несобственный интеграл $\int_1^{\infty}f(x)dx$ сходится, покажем, что предел частичных сумм ряда существует и конечен, т.е. $\lim_{n\to\infty}S_n=S$, где $S_n=u_1+u_2+\dots+u_n=f(1)+f(2)+\dots+f(n)$. Рассмотрим криволинейную трапецию (рис. 2), ограниченную кривой $y=f(x)$, с основанием от $x=1$ до $x=n$, где n- произвольное целое положительное число. Площадь ее (по геометрическому смыслу определенного интеграла) равна $I_n=\int_1^n f(x)dx$.

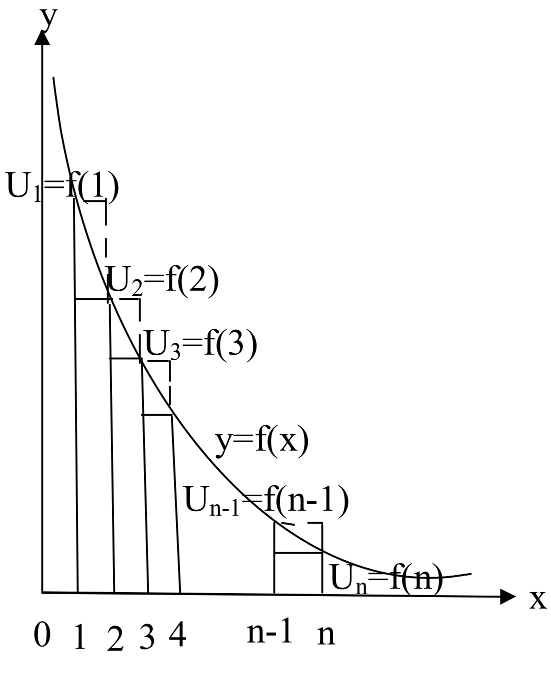

Рис.2

Рассмотрим две ступенчатые фигуры. Одна из них вписана в криволинейную трапецию и ее площадь равна:

$$f(2)+f(3)+\dots+f(n)=S_n-f(1)=S_n-u_1,$$

вторая описана около нее и площадь ее равна

$$f(1)+f(2)+\dots+f(n-1)=S_n-f(n)=S_n-u_n.$$

Имеем $S_n-u_1<I_n<S_n-u_n$. Отсюда следует, что

$$I_n+u_n<S_n<I_n+u_1. \qquad (6)$$

Заметим, что I_n и S_n возрастают вместе с n, т.к. $f(x)$- положительная функция.

Пусть несобственный интеграл сходится $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = I$. Учитывая, что $I_n < I$, из правой части неравенства (6), имеем $S_n < I_n + u_1 < I + u_1$. Следовательно, частичные суммы ряда S_n ограничены сверху, а т.к. S_n возрастают с ростом n, то в силу теоремы о существовании конечного предела возрастающей последовательности, ограниченной сверху, имеем $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, т.е. ряд сходится.

Пусть несобственный интеграл расходится. Тогда $I_n \to \infty$ при $n \to \infty$ и из левой части неравенства (6) заключаем, что $S_n \to \infty$, т.е. ряд расходится.

П р и м е р. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$.

Р е ш е н и е. Имеем $u_n = \dfrac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$. Заменяя целочисленный аргумент общего члена ряда на x, получим функцию $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)\ln^2(x+1)}$. Эта функция непрерывна, положительна и убывает на $[1,\infty)$. Поэтому может быть применен интегральный признак Коши:

$\int\limits_1^{\infty} \dfrac{1}{(x+1)\ln^2(x+1)} = \lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_1^{b} \dfrac{1}{(x+1)\ln^2(x+1)} = -\lim\limits_{b\to\infty} \dfrac{1}{\ln(x+1)}\Bigg|_1^b = \dfrac{1}{\ln 2}$. Данный ряд сходится.

П р и м е ч а н и е. Иногда вопрос о сходимости числового ряда решается нерационально. В частности, приступая к исследованию на сходимость, применяют тот или иной достаточный признак сходимости, не проверив предварительно выполняется ли необходимый признак.

П р и м е р. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{3n^2+1}$.

Р е ш е н и е. Проверяем выполнение необходимого признака $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{3n^2+1} = \dfrac{1}{3} \neq 0$. Следовательно, ряд расходится.

§5. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница

Определение. Ряд $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^{n-1} u_n + \ldots,$ (7)
где $u_n > 0, n = 1,2,\ldots$ называется з н а к о ч е р е д у ю щ и м с я р я д о м.

Признак Лейбница: если члены знакочередующегося ряда (7) монотонно убывают по абсолютной величине, т.е. $u_1 > u_2 > u_3 > u_4 > \ldots > u_n > u_{n+1} > \ldots > 0,$ (8) и $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, то ряд (7) сходится, причем его сумма по абсолютной величине не превосходит первого члена.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим частичную сумму четного числа членов ряда (7)

$$S_{2m} = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + u_{2m-1} - u_{2m}.$$

Сгруппируем ее двумя способами

$$S_{2m} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \ldots + (u_{2m-1} - u_{2m}), \tag{9}$$

$$S_{2m}=u_1-\left[(u_2-u_3)+(u_4-u_5)+\ldots+(u_{2m-2}-u_{2m-1})+u_{2m}\right]. \qquad (10)$$

Так как члены монотонно убывают по абсолютной величине, то выражения в круглых скобках положительны. Следовательно, как видно из (9), S_{2m} монотонно возрастает с увеличением m. С другой стороны, выражение в квадратных скобках равенства (10) положительно. Следовательно, S_{2m} все время остается меньше u_1. Таким образом, последовательность S_{2m} монотонно возрастающая, ограниченная сверху, следовательно, имеет предел: $\lim\limits_{m\to\infty} S_{2m}=S\le u_1$.

Далее $S_{2m+1}=S_{2m}+u_{2m+1}$. Так как по условию $\lim\limits_{m\to\infty} u_{2m+1}=0$, то и $\lim\limits_{m\to\infty} S_{2m+1}=S$, т.е. частичные суммы ряда имеют один и тот же предел независимо от их четности или нечетности. Таким образом, ряд (7) сходится и его сумма не больше первого члена. Знак S совпадает со знаком первого члена ряда.

П р и м е р. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$.

Р е ш е н и е. Абсолютные значения членов ряда монотонно убывают

$$\frac{1}{n\ln n}>\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)},\ (n>1).$$

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}=0.$$

Следовательно, ряд сходится и его сумма будет меньше первого члена, т.е. $S<\dfrac{1}{2\ln 2}$.

П р и м е ч а н и е. Отметим существенность монотонного убывания членов ряда в признаке сходимости Лейбница. Так, для ряда

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{2n}+\ldots$$

Отсутствует монотонное убывание членов ряда и ряд расходится. Действительно, если бы он сходился, то сходился бы (согласно сочетательному свойству сходящихся рядов) и ряд

$(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{4})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{6})+\ldots+(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n})+\ldots$, т.е.

$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{2n}+\ldots=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots\right)$, но он гармонический и расходится. Следовательно, данный ряд расходится.

§6. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость

Дан ряд $u_1+u_2+u_3+u_4+\ldots+u_n+\ldots$, (11)

Члены ряда - произвольные действительные числа (любого знака).

Составим ряд из абсолютных величин членов ряда (11)

$$|u_1|+|u_2|+|u_3|+|u_4|+\ldots+|u_n|+\ldots, \qquad (12)$$

Т е о р е м а. Если сходится ряд (12), составленный из абсолютных величин членов данного ряда (11), то сходится и данный ряд (11).

Обозначим через S_n n-ю частичную сумму ряда (11) $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + ... + u_n$, сумму членов с положительными знаками, входящими в S_n, обозначим S_n^+, а сумму абсолютных значений отрицательных членов- через S_n^-. Тогда будем иметь

$$S_n = S_n^+ - S_n^- \tag{13}$$

Сумму n- членов ряда (12) обозначим через σ_n

$$\sigma_n = |u_1| + |u_2| + |u_3| + |u_4| + ... + |u_n|.$$

Тогда запишем $\sigma_n = S_n^+ + S_n^-$. Так как ряд (12) сходится, то имеем $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma$. S_n^+ и S_n^- есть суммы положительных слагаемых и, следовательно, будут монотонно возрастать, оставаясь ограниченными, т.к. $S_n^+ \le \sigma_n < \sigma$, $S_n^- \le \sigma_n < \sigma$. Поэтому существуют пределы последовательностей S_n^+ и S_n^- при $n \to \infty$. Следовательно, на основании равенства (13) существует $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_n^+ - \lim_{n\to\infty} S_n^-$ Таким образом, ряд (11) сходится.

О п р е д е л е н и е. Знакопеременный ряд называется а б с о л ю т н о с х о д я щ и м с я, если сходится ряд, составленный из абсолютных величин его членов. Сходящийся знакопеременный ряд называется у с л о в н о с х о д я щ и м с я, если ряд, составленный из абсолютных величин его членов, расходится.

П р и м е р. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^3}$ абсолютно сходящийся, т.к. ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ сходится (обобщенный гармонический ряд, $\alpha = 3$).

Среди знакопеременных рядов абсолютно сходящиеся ряды занимают особое место: на абсолютно сходящиеся ряды переносятся основные свойства конечных сумм, в частности, свойство переместительности- если ряд сходится абсолютно, то он остается абсолютно сходящимся при любой перестановке его членов, при этом его сумма не изменяется.

Если же ряд сходится условно, то можно соответствующей перестановкой членов получить ряд, условно сходящийся к любому наперед заданному числу и даже получить расходящийся ряд.

П р и м е р (парадокс). Величина числа $\ln 2$ не изменяется при умножении на 2.

Известно, $\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + ...$ $(*)$

Умножая ряд $(*)$ на 2, получим $2\ln 2 = 2 - 1 + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{2}{5} - \frac{1}{3} + \frac{2}{7} - ...$

Объединим члены с одинаковыми знаменателями и расположим полученные числа в порядке возрастания знаменателей:

$$2\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - ... \qquad (**)$$

Из $(*)$ и $(**)$ заключаем $\ln 2 = 2\ln 2$.

Таким образом, в условно сходящихся рядах нельзя переставлять члены ряда.

§7. Остаток ряда и его оценка

Дан сходящийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n , \qquad (14)$$

где S - его сумма; r_n - остаток, $r_n = S - S_n$, т.е. $r_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots$

Если ряд (14) сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$.

Действительно, $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = \lim\limits_{n\to\infty}(S - S_n) = S - \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S - S = 0$.

При замене суммы S ряда его частичной суммой S_n абсолютная погрешность равна $\Delta_S = |S - S_n| = |r_n|$.

В приближенных расчетах встречаются задачи:

1. Требуется найти приближенное значение суммы ряда, просуммировав заданное число «n» членов ряда и оценить погрешность, которая при этом допускается, т.е. оценить величину $|r_n|$.

2. Задана точность ε. Требуется найти сумму ряда приближенно так, чтобы ошибка не превышала ε. В этом случае решают неравенство $|r_n| < \varepsilon$.

Для одних рядов неравенство $|r_n| < \varepsilon$ выполняется, если взять небольшое значение «n», такие ряды называются б ы с т р о с х о д я щ и м и с я. Для других рядов надо брать «n» довольно большим, такие ряды называются м е д л е н н о с х о д я щ и м и с я. Например, для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ $|r_n| < 10^{-6}$ при $n > 9$, а для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ $|r_n| < 10^{-6}$ при $n \geq 10^6$, что практически невозможно. Мы будем рассматривать сравнительно быстро сходящиеся ряды.

Итак, надо уметь найти r_n. Это мы умеем делать лишь для немногих сходящихся рядов (геометрическая прогрессия). Поэтому научимся оценивать остаток ряда.

О ц е н к а о с т а т к а з н а к о ч е р е д у ю щ е г о с я р я д а. Если знакочередующийся ряд сходится по признаку Лейбница, то его n-й остаток по абсолютной величине не превосходит модуля первого из отброшенных членов, т.е. $|r_n| \leq u_{n+1}$.

Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n$ сходится по признаку Лейбница. Тогда n-й остаток ряда $r_n = \pm(u_{n+1} - u_{n+2} + u_{n+3} - \ldots)$ является суммой знакочередующегося ряда. На основании признака Лейбница имеем $|r_n| \leq u_{n+1}$.

О ц е н к а о с т а т к а з н а к о п о л о ж и т е л ь н о г о р я д а. Если все члены сходящегося знакоположительного ряда

$$\sum u_n \qquad (15)$$

не превосходят соответствующих членов сходящегося знакоположительного ряда

$$\sum v_n \,, \qquad (16)$$

т.е. $0 < u_n \le v_n$, $n = 1,2,3,...,$ то n-й остаток ряда (15) не превосходит n- го остатка ряда (16).

Обозначим n- е остатки рядов (15) и (16) соответственно через r_n^u и r_n^v, т.е. $r_n^u = u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \dots$, $r_n^v = v_{n+1} + v_{n+2} + v_{n+3} + \dots$. Каждый из этих остатков есть сумма сходящегося знакоположительного ряда. Так как по условию $u_{n+1} \le v_{n+1}, u_{n+2} \le v_{n+2},...,$ то на основании признака сравнения $r_n^u \le r_n^v$.

О ц е н к а о с т а т к а з н а к о п е р е м е н н о г о р я д а. Если знакопеременный ряд (11) абсолютно сходится, то абсолютная величина его n- го остатка не превосходит n- го остатка ряда, составленного из абсолютных величин членов данного ряда.

Пусть сходится ряд (12). Рассмотрим остатки рядов (11) и (12), именно: $r_n = u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \dots$, $r_n' = |u_{n+1}| + |u_{n+2}| + |u_{n+3}| + \dots$. При любом p имеем $|u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \dots + u_{n+p}| \le |u_{n+1}| + |u_{n+2}| + |u_{n+3}| + \dots + |u_{n+p}|$.

Переходя в этом неравенстве к пределу при $p \to \infty$, получим $\lim\limits_{p\to\infty} |u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \dots + u_{n+p}| \le \lim\limits_{p\to\infty} \left[|u_{n+1}| + |u_{n+2}| + |u_{n+3}| + \dots + |u_{n+p}|\right]$ или $|r_n| \le r_n'$.

§8. Общие замечания

Чтобы успешно использовать теорию числовых рядов на практике, необходимо повторить теорию пределов, таблицу интегралов, несобственные интегралы с бесконечным верхним пределом.

При использовании признака Даламбера не допускать ошибок при нахождении члена u_{n+1}, который получается из члена u_n заменой n на $(n+1)$, например, $u_n = \dfrac{n^n}{(2n)!}$, то $u_{n+1} = \dfrac{(n+1)^{(n+1)}}{[2(n+1)]!}$.

Вопрос о сходимости числового ряда надо решать рационально. В начале проверить выполняется ли необходимый признак, а затем проверить выполнение одного из достаточных признаков.

Необходимый признак сходимости нельзя принимать за достаточный- это распространенная ошибка.

Иногда для исследования вопроса о сходимости ряда используют комбинацию признаков. Например, исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n^2} \dfrac{1}{\sqrt{9^n + 2\cdot 3^n + 1}}$.

Преобразуем общий член данного ряда $u_n = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{\sqrt{\left(3^n+1\right)^2}} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{3^n+1}$, отсюда

$$u_n < \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{3^n}.$$

К ряду с общим членом $v_n = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{3^n}$ применим радикальный признак Коши $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{v_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}{3} = \frac{l}{3} < 1$.

Таким образом, ряд $\sum v_n$ сходится. На основании признака сравнения заключаем, что данный ряд сходится.

§9. Функциональные ряды

Определение. Ряд $u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + ... + u_n(x) + ...,$ (17)
члены которого являются функциями аргумента x и имеют общую область определения, называется ф у н к ц и о н а л ь н ы м р я д о м.

Например, $x + x^2 + x^3 + ... + x^n + ... = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$,

$$\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + ... + \frac{1}{n}\sin nx + ... = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\sin nx.$$

Пусть x_0 принадлежит области определения функции $u_n(x)$. Положим в (17) $x = x_0$, получим числовой ряд $u_1(x_0) + u_2(x_0) + u_3(x_0) + ... + u_n(x_0) + ...$ (18)

Определение. Если ряд (18) сходится (расходится), то x_0 называется точкой сходимости (расходимости) функционального ряда (17).

Определение. Совокупность всех точек сходимости функционального ряда называется о б л а с т ь ю с х о д и м о с т и.

Если x_0 - точка сходимости ряда (17), то можно говорить о его сумме в точке x_0: $u_1(x_0) + u_2(x_0) + u_3(x_0) + ... + u_n(x_0) + ... = S(x_0)$.

В области сходимости функционального ряда (17) каждому значению x соответствует определенная сумма, именно $S(x_0), S(x_1), ...,$ где x_0, $x_1, ...$ принадлежат области сходимости функционального ряда (17). Так что сумма функционального ряда есть функция $S(x)$ аргумента x, определенная в области его сходимости. Вне области сходимости функциональный ряд не имеет суммы.

П р и м е р. Определить область сходимости функционального ряда $x + x^2 + x^3 + ... + x^n + ... = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$.

Р е ш е н и е. Все члены данного функционального ряда определены для всех x. Они образуют геометрическую прогрессию со знаменателем x, которая сходится при $|x|<1$. Таким образом, областью сходимости данного функционального ряда является $-1<x<1$.

П р и м е р. Найти область сходимости функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+x^2}$.

Р е ш е н и е. $\frac{1}{n^2+x^2}<\frac{1}{n^2}$ при любых x, а ряд $\sum\frac{1}{n^2}$ сходится, следовательно, данный функциональный ряд сходится при любом x, областью его сходимости является множество всех вещественных чисел.

§10. Понятие о равномерной сходимости. Основные свойства равномерно сходящихся рядов

Рассмотрим функциональный ряд (17). Пусть X - область его сходимости, $S(x)$- сумма; $S(x)=S_n(x)+r_n(x)$, где $S_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)$ - частичная сумма; $r_n(x)$ - остаток ряда; $r_n(x)=S(x)-S_n(x)$.

<u>Определение</u>. Функциональный ряд (17) называется р а в н о м е р н о с х о д я щ и м с я в о б л а с т и X, если для любого $\varepsilon>0$ найдется такое целое положительное число $N=N(\varepsilon)$, что при $n\geq N$ выполняется неравенство $|r_n(x)|<\varepsilon$ для всех $x\in X$ (рис.2). Если же для некоторого ε этому условию нельзя удовлетворить для всех x сразу ни при каком N, то говорят, что ряд (17) в области X сходится неравномерно.

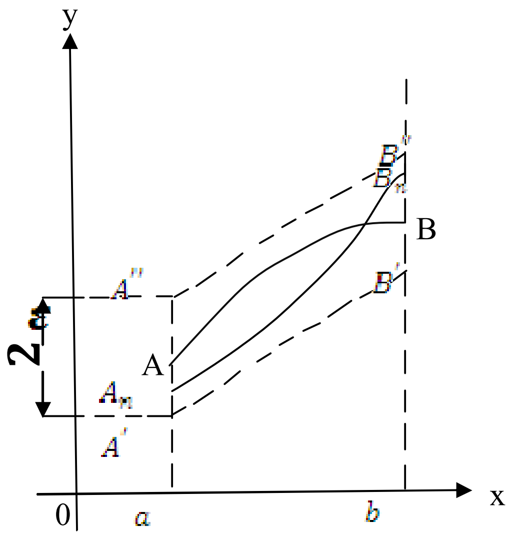

Рис.3.AB – график суммы S(x) ряда, сходящегося в области $[a,b]$; A_nB_n - график $S_n(x)$

При равномерной сходимости ряда в области $[a,b]$ все линии A_nB_n, начиная с номера $N(\varepsilon)$, помещаются целиком внутри полосы $A'B'A''B''$. Этого не будет при неравномерной сходимости.

П р и м е р. Показать, что ряд

$$\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+2}+\frac{1}{x^6+3}-\frac{1}{x^8+4}+\ldots$$

сходится

равномерно при всех значениях x.

Р е ш е н и е:

Ряд сходится по признаку Лейбница $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{x^{2n}+n}=0.$

Следовательно, остаток оценивают с помощью неравенства $|r_n(x)|<|u_{n+1}(x)|$, т.е. $|r_n(x)|<\frac{1}{x^{2(n+1)}+n+1}<\frac{1}{n+1},\forall x$.

Решим неравенство $\frac{1}{n+1} \le \varepsilon$.

Имеем $n \ge \frac{1}{\varepsilon} - 1$, взяв $N(\varepsilon) \ge \frac{1}{\varepsilon} - 1$,
приходим к неравенству $|r_n(x)| < \varepsilon$.
Действительно, ряд сходится равномерно.

П р и з н а к В е й е р ш т р а с с а. Если члены функционального ряда (17) удовлетворяют в области X неравенствам $|u_n(x)| \le C_n \quad (n = 1,2,3,...)$, (19)
где C_n - члены сходящегося положительного числового ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n = C_1 + C_2 + C_3 + ... + C_n + ..., \tag{20}$$

то ряд (17) сходится в X равномерно.

При наличии неравенства (19) говорят, что ряд (17) м а ж о р и р у е т с я рядом (20) или ряд (20) служит м а ж о р а н т н ы м рядом для (17).

П р и м е р. Функциональный ряд $-\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 2x}{2^2} - \frac{\cos 3x}{3^2} + ... + (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2} + ...$ равномерно сходится в промежутке $(-\infty, \infty)$, т.к. его члены при любом x не превосходят по абсолютному значению соответствующих членов сходящегося положительного числового ряда $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2} + ...$.

Основные свойства равномерно сходящихся рядов

Известно, что сумма конечного числа непрерывных функций- непрерывна. Справедливо ли подобное утверждение и для случая бесконечного числа слагаемых?
1. Если функциональный ряд из непрерывных функций на (a,b) равномерно сходится на (a,b), то и сумма есть непрерывная функция на (a,b).
Известно, что интеграл от суммы конечного множества функций равен сумме интегралов от отдельных слагаемых, т.е. такую сумму можно интегрировать почленно. Возникает желание перенести это правило на сумму бесконечных рядов. Но всегда ли это возможно?
2. Равномерно сходящийся ряд на (a,b) можно почленно интегрировать.
Вопрос о дифференцировании ряда решается так.
3.Если функциональный ряд (17) сходится в промежутке (a,b) и производные его членов непрерывны в этом промежутке, то ряд (17) можно почленно дифференцировать при условии, что полученный ряд

$$u_1'(x) + u_2'(x) + ... + u_n'(x) + ... \tag{21}$$

будет равномерно сходящимся в данном промежутке. Сумма ряда (21) будет производной от суммы ряда (17).

§11. Степенные ряды, их сходимость

О п р е д е л е н и е. С т е п е н н ы м р я д о м называется функциональный ряд вида:

$$a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+...+a_n(x-a)^n+..., \qquad (22)$$

где $a_0, a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$- постоянные, называемые коэффициентами ряда; a- любое число.

При $a=0$ имеем

$$a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n+.... \qquad (23)$$

Будем оперировать рядами вида (23), т.к. переход от (22) к (23) сводится к подстановке $x-a=y$.

Т е о р е м а А б е л я. Если степенной ряд (23) сходится в какой- либо точке x_0, то он сходится абсолютно и равномерно при любом x, удовлетворяющем неравенству $|x|<|x_0|$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть x_0- точка сходимости ряда (23), то числовой ряд $a_0+a_1x_0+a_2x_0^2+...+a_nx_0^n+...=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx_0^n$ сходится. В силу этого $\lim_{n\to\infty}a_nx_0^n=0$.

Отсюда $|a_nx_0^n|\le M, \forall n$. (24)

Положим $\left|\frac{x}{x_0}\right|=q,$ (25)

т. к. $|x|<|x_0|$, то $q<1$.

Для общего члена ряда (23), согласно (25) и (24), имеем

$$|a_nx^n|=|a_nx_0|^n\cdot\left|\frac{x}{x_0}\right|^n=|a_nx_0|^nq^n\le Mq^n.$$

А ряд с общим членом Mq^n при $q<1$сходится, поэтому согласно признаку сравнения ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_nx^n|$сходится. Следовательно, ряд (25) сходится абсолютно и равномерно при $|x|<|x_0|$.

Следствия из теоремы Абеля.

1. Если x_0- точка сходимости, $x_0\ne 0$, то отрезок $(-|x_0|,|x_0|)$сплошь состоит из точек абсолютной сходимости.

1. Для каждого степенного ряда существует определенное число $R>0$, что ряд (23) абсолютно сходится при $|x|<R$и расходится при $|x|>R$.

Число Rназывается р а д и у с о м с х о д и м о с т и. Если ряд сходится в единственной точке x_0, то $R=0$. Если ряд сходится при любом x, то $R=\infty$.

2. Область сходимости ряда (23) есть промежуток $(-R,R)$, где R- радиус сходимости. На концах при $x=-R$ и $x=R$вопрос о сходимости решается отдельно в каждом конкретном случае. Вопрос о нахождении радиуса сходимости ряда решается так:

если для степенного ряда (23) существует $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho\ne 0$, то $R=\frac{1}{\rho}$.

Составим ряд из абсолютных величин членов ряда (23)

$$|a_0|+|a_1||x|+|a_2||x|^2+...+|a_n||x|^n+....$$

Применим к нему признак Даламбера

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}||x|^{n+1}}{|a_n||x|^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}|x| = \rho|x|$$

Тогда ряд (23) сходится для всех x, для которых $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \rho|x| < 1$, т.е. $|x| < \frac{1}{\rho}$ и ряд (23) расходится для $|x| > \frac{1}{\rho}$. Следовательно, $\left(-\frac{1}{\rho}, \frac{1}{\rho}\right)$ есть интервал сходимости, а $R = \frac{1}{\rho}$.

Аналогично, можно показать, применяя радикальный признак Коши, что

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}.$$

П р и м е р. Найти область сходимости ряда $1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{n} + \ldots$.

Р е ш е н и е. $a_n = \frac{1}{n}, a_{n+1} = \frac{1}{n+1}, R = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = 1$.

Следовательно, интервал сходимости $(-1,1)$. Исследуем сходимость на границе: при $x = -1$ ряд $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$ сходится, при $x = 1$ ряд $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$ расходится.

Таким образом, областью сходимости является отрезок $[-1,1)$.

П р и м е р. Найти радиус сходимости ряда $\frac{3x}{\sqrt{2}} + \frac{3^2x^2}{\sqrt{2^2}} + \ldots + \frac{3^nx^n}{\sqrt{2^n}} + \ldots$.

Р е ш е н и е. На основании радикального признака Коши можно утверждать, что степенной ряд будет сходиться абсолютно для тех значений x, для которых $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{3^n|x|^n}{\sqrt{2^n}}} = \frac{3|x|}{\sqrt{2}}$ будет меньше единицы, т.е. $\frac{3|x|}{\sqrt{2}} < 1$ или $|x| < \frac{\sqrt{2}}{3}$.

Следовательно, радиус сходимости данного ряда $R = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

П р и м е р. Найти область сходимости ряда $\frac{x-2}{1\cdot 2} + \frac{(x-2)^2}{2\cdot 2^2} + \ldots + \frac{(x-2)^n}{n\cdot 2^n} + \ldots$.

Р е ш е н и е. Здесь $u_n(x) = \frac{(x-2)^n}{n\cdot 2^n}$, $u_{n+1}(x) = \frac{(x-2)^{n+1}}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}$.

Ряд будет сходиться абсолютно для тех значений, для которых имеет место неравенство

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{|x-2|^{n+1}n2^n}{|x-2|^n(n+1)2^{n+1}} = \frac{|x-2|}{4} < 1$, т.е. для значений x, для которых $|x-2| < 2$. Отсюда, $0 < x < 4$.

При $x=0$ получим ряд $-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{(-1)^n}{n}+\ldots$, сходящийся в силу признака Лейбница. При $x=4$ имеем гармонический расходящийся ряд $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$.

О т в е т. $[0,4)$

§12. Действия со степенными рядами

1. Два сходящихся степенных ряда с радиусами сходимости соответственно r_1 и r_2 можно почленно складывать, вычитать или перемножать по правилу умножения многочленов, причем радиусы сходимости полученных рядов не меньше, чем меньшее из r_1 и r_2.
2. Если два сходящихся ряда имеют одинаковые суммы и области сходимости, то коэффициенты этих рядов равны.

Основные свойства степенных рядов

1. Если $(-R,R)$- область сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, то ряд сходится равномерно $\forall x \in [a,b] \in (-R,R)$.
2. Степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ можно почленно дифференцировать и интегрировать в области сходимости.

§13. Ряды Тейлора и Маклорена

Нам теперь известно, что сумма степенного ряда в интервале сходимости этого ряда является непрерывной и бесконечно дифференцируемой функцией. Изучим обратную задачу: какие функции и в каких областях представимы в виде суммы степенного ряда?

Пусть степенной ряд (22) сходится к функции $f(x)$. Обозначим радиус сходимости этого ряда через R. Тогда для всех значений x, удовлетворяющих неравенству $|x-a|<R$, имеет место равенство

$$f(x)=a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+\ldots+a_n(x-a)^n+\ldots, \tag{27}$$

причем, функция $f(x)$ будет непрерывной и бесконечно дифференцируемой на интервале $|x-a|<R$.Установим зависимость между $f(x)$ и коэффициентами ряда (22). Положим в (27) $x=a$, получим $f(a)=a_0$.

Затем последовательно дифференцируя равенство (27), и каждый ряд полагая $x=a$, получим

$$f'(x)=a_1+2a_2(x-a)+3a_3(x-a)^2+4a_4(x-a)^3+\ldots+na_n(x-a)^{n-1}+\ldots,$$

$$a_1=f'(a),$$

$$f''(x)=2a_2+3\cdot 2a_3(x-a)+4\cdot 3a_4(x-a)^2+\ldots+n(n-1)a_n(x-a)^{n-2}+\ldots,\ f''(a)=2!a_2,$$

$$a_2=\frac{f''(a)}{2!},$$

$$f'''(x)=3\cdot 2a_3+4\cdot 3\cdot 2a_4(x-a)+\ldots+n(n-1)(n-2)a_n(x-a)^{n-3}+\ldots,\ f'''(a)=3!a_3,$$

$$a_3=\frac{f'''(a)}{3!},\ldots,\ a_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Подставим найденные значения коэффициентов в (27), получим

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+...+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+..., \qquad (28)$$

Степенной ряд (28) называется р я д о м Т е й л о р а функции $f(x)$, к которой он сходится. Если в (28) $a=0$, то ряд Тейлора функции $f(x)$ принимает вид $f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+...+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+...$, и называется р я д о м М а к л о р е н а функции $f(x)$.

Необходимо особо обратить внимание, что при выводе формулы (28) предполагалось, что ряд (27) сходится к функции $f(x)$ и это позволило выразить коэффициенты ряда (27) через значения производных функции $f(x)$ в точке $x=a$.

Если некоторая функция $f(x)$ имеет производные всех порядков при $x=a$, то мы формально составим ряд Тейлора этой функции

$$f(x)\sim f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+...+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+....$$

Здесь поставили знак $\sim$ между $f(x)$ и ее формально составленным рядом Тейлора, т.к. этот ряд может не сходиться к функции $f(x)$, он может быть расходящимся или может сходиться к другой функции.

П р и м е р.

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, x\neq 0, \\ 0 \quad ,x=0. \end{cases}$$

Все производные этой функции в точке $x=0$ равны нулю. Действительно, $f'(x)=\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}$ при $x\neq 0$ и $f'(0)=0$, т.к. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{t}{e^{t^2}}=0$ (положили $\frac{1}{x}=t$).

Аналогично, можно убедиться, что $f''(0)=f'''(0)=...=f^{(n)}(0)=0$ и т. д. Следовательно, все коэффициенты Тейлора функции $f(x)$ при $x=0$ равны 0. Соответствующий ряд Тейлора состоит из членов, равных нулю, значит сходится, но не к данной функции $f(x)$, а к функции тождественно равной 0.

Выясним при каких условиях сумма ряда Тейлора данной функции совпадает с функцией, для которой этот ряд составлен.

Напомним, что функция, которая имеет в некоторой окрестности точки $x=a$ производные до $(n+1)$ порядка включительно, может быть представлена по формуле Тейлора

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+...+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_n(x), \qquad (29)$$

где $R_n(x)$ - остаточный член формулы Тейлора, $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$; ξ - некоторое среднее значение между a и x.

Т е о р е м а. Для того, чтобы бесконечно дифференцируемая функция $f(x)$ в окрестности $x = a$ разлагалась в ряд Тейлора необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0. \qquad (30)$$

Пусть функция представима рядом Тейлора (28) в интервале $|x-a| < R$. Из его сходимости следует, что остаток ряда

$$r_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(x-a)^k$$

стремится к нулю при $n \to \infty$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x) = 0$. Формула Тейлора для $f(x)$ в окрестности точки $x = 0$ имеем вид (29). Сравнивая (28) и (29), замечаем, что $R_n(x) = r_n(x)$, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

Пусть теперь выполнено условие (30), т.е.

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty}\left[f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \right] = \lim_{n\to\infty}\left[f(x) - S_n(x)\right] = 0.$$

Смысл этого равенства в том, что разность между функцией и частичной суммой $S_n(x)$ и ее ряда Тейлора стремится к нулю при $n \to \infty$, что означает, что ряд сходится к функции $f(x)$.

§14. Разложение функций в степенной ряд

Разложить функцию $f(x)$ в степенной ряд, расположенный по степеням $(x-a)$ - значит составить ряд вида $a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n + \ldots$, у которого радиус сходимости не равен нулю, а сумма тождественно равна данной функции всюду внутри промежутка сходимости.

Если разложение функции в какой- либо степенной ряд вообще возможно, то оно является разложением именно в ряд Тейлора.

Пусть $f(x) = C_0 + C_1(x-a) + C_2(x-a)^2 + \ldots + C_n(x-a)^n + \ldots, \qquad (31)$

где стоящий справа ряд сходится в некотором сегменте $[a-R, a+R]$ к функции $f(x)$. Тогда этот ряд является рядом Тейлора, т.е. $C_n = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$.

Применим к (31) «n» раз теорему о почленном дифференцировании степенного ряда, получим

$$f^{(n)}(x) = n!C_n + \frac{(n+1)!}{1!}C_{n+1}(x-a) + \frac{(n+2)!}{2!}C_{n+2}(x-a)^2 + \ldots.$$

Положим $x = a$, можно рекомендовать следующий порядок действий:

1. Найти производные $f'(x), f''(x), \ldots, f^{(n)}(x), \ldots$,
2. Вычислить $f'(a), f''(a), \ldots, f^{(n)}(a), \ldots$,
3. Составить формально ряд Тейлора,
4. Найти область сходимости полученного ряда,
5. Доказать, что в области сходимости остаточный член равен нулю, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

I. Р а з л о ж е н и е в р я д М а к л о р е н а ф у н к ц и и e^x. Для разложения функции e^x в ряд Маклорена находим последовательные производные и затем значения функции и ее производных для $x=0$: $f(x)=e^x, f'(x)=e^x, \ldots, f^{(n)}(x)=e^x$, $f(0)=f'(0)=\ldots=f^{(n)}(0)=1$.

По формуле Маклорена имеем

$e^x=1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\ldots+\frac{1}{n!}x^n+R_n(x)$, где $R_n(x)=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\xi}$; ξ находится между 0 и x.

Составим ряд Маклорена для e^x

$1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\ldots+\frac{1}{n!}x^n+\ldots$.

Пользуясь признаком Даламбера, имеем

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|x|\cdot n!}{(n+1)!}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|x|}{n+1}=0, R=\infty$, поэтому для всех значений x

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}=0,$$

(необходимый признак сходимости числового ряда) и, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\xi}=0.$$

Итак, $e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots, \left(-\infty,\infty\right)$.

2. Р а з л о ж е н и е с и н у с а и к о с и н у с а.

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots, \left(-\infty,\infty\right),$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots, \left(-\infty,\infty\right)$$

Примечание. Особенности разлагаемой функции отражаются и на свойствах ее ряда. Так, $\sin x$ - нечетная, а $\cos x$ - четная, соответственно получаем, что ряд для $\sin x$ состоит лишь из нечетных степеней x, а для $\cos x$ - из одних лишь четных степеней x.

3. Б и н о м и н а л ь н ы й р я д $\left(\alpha\in R, \alpha\neq 0\right)$

$$(1+x)^{\alpha}=1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\ldots,$$

$|x|<1$

Примечание. Разложение функции в ряд Тейлора (или Маклорена), вообще говоря, должно сопровождаться исследованием того, имеет ли место равенство $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$, т.к. только при его выполнении ряд Тейлора, соответствующий данной функции, сходится к ней. Исследование остаточного члена часто бывает затруднительно. Иногда удается обойти эти затруднения на основании теоремы единственности разложения функции в степенной ряд. Для этого используют известные разложения в комбинации с правилами сложения, вычитания, умножения рядов и свойствами об интегрировании и дифференцировании степенных рядов.

4. Разложение логарифма. Имеем

$$\frac{1}{1-t}=1+t+t^2+...+t^n+..., |t|<1$$

Почленно интегрируя, получим

$\int\limits_0^x \frac{dt}{1-t}=\int\limits_0^x dt+\int\limits_0^x tdt+\int\limits_0^x t^2dt+...+\int\limits_0^x t^n dt+...$ или $-\ln(1-t)\Big|_0^x = x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+...+\frac{x^n}{n}+...,$

$$\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-...-\frac{x^n}{n}-... . \qquad (32)$$

Заменим в этом разложении x на $(-x)$, получим

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-...+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+..., |x|<1. \qquad (33)$$

Вычисляя почленно (32) из равенства (33), получим

$$\ln(1+x)-\ln(1-x)=2(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+...),\ \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}=x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+..., |x|<1.$$

5. Разложение в ряд $arctgx$. Если в геометрической прогрессии

$$\frac{1}{1-t}=1+t+t^2+...+t^n+..., |t|<1,$$

$(-t)$ заменить через t^2, то получим ряд:

$\frac{1}{1+t^2}=1-t^2+t^4-t^6+t^8-...+(-1)^n t^{2n}+...,$ сходящийся для $|t^2|<1$, следовательно, и $|t|<1$. Проинтегрируем этот ряд в пределах от 0 до x, где $|x|<1$, получим

$$\int\limits_0^x \frac{dt}{1+t^2}=\int\limits_0^x dt-\int\limits_0^x t^2dt+\int\limits_0^x t^4dt-\int\limits_0^x t^6dt+...+(-1)^n\int\limits_0^x t^{2n}dt+..., \text{т.е.}$$

$$arctgx=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+...+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+... .$$

На границах интервала сходимости,

при $x=1$: $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-...,$ при $x=-1$: $-1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{9}+...,$

полученные знакочередующиеся числовые ряды сходятся (по признаку Лейбница). Следовательно, справедливо разложение

$$arctgx=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+...+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+..., [-1,1].$$

6. Разложение $\arcsin x$. Чтобы разложить $\arcsin x$ в ряд Маклорена, воспользуемся тем, что его производную

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

разложим в биномиальный ряд

$$(1+t)^\alpha=1+\frac{\alpha}{1!}\cdot t-\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\cdot t^2-\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}\cdot t^3+..., |t|<1$$

Полагая $\alpha=-\frac{1}{2}$ и $t=-x^2$, имеем

$$\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-x^2\right)}{1!}+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-x^2\right)^2}{2!}+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\left(-x^2\right)^3}{3!}+\ldots,\ |x|<1,$$

или после упрощения

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\frac{x^2}{2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4+\ldots+\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n}x^{2n}+\ldots,\ |x|<1.$$

Проинтегрируем написанный ряд в пределах от 0 до x ($|x|<1$), получим

$$\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int_0^x dx+\int_0^x\frac{x^2}{2}dx+\int_0^x\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4dx+\ldots+,\text{ т.е.}$$

$$\arcsin x=x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^7}{7}+\ldots\text{ или}$$

$$\arcsin x=\frac{x}{1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^7}{7}+\ldots+\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots,\ |x|<1.$$

Можно убедиться, что на границах интервала соответствующие числовые ряды будут расходящимися. Приведенные разложения, а также интервалы их применения следует помнить, т.к. многие другие функции могут быть разложены в ряды с их помощью.

§15. Некоторые применения степенных рядов

1. Приближенное вычисление значений функций

Пусть известно, что функция $f(x)$ в окрестности точки x разлагается в ряд Тейлора. Тогда приближенное значение $f(x)$ в любой точке этой окрестности может быть вычислено по частичной сумме этого ряда. Возникающую при этом ошибку можно оценивать либо записав остаточный член в формуле Тейлора, либо непосредственно оценивая остаток ряда. На практике оценка ряда оказывается более удобной, т.к. использование остаточного члена предполагает знание производной нужного порядка. А часто удобно получать разложение функции в ряды, не отыскивая производные этих функций, а применяя готовые разложения.

Пример. Вычислить $\sqrt{e}$ с точностью до 10^{-3}.

Решение. Для любого x имеет место разложение

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}+\ldots$$

При $x=\frac{1}{2}$ имеем $e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}=1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1!}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2!}+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{(n-1)!}+\ldots$

Оценим погрешность приближения с помощью остаточного члена, именно

$R_n(x)=\frac{e^{\xi}}{n!}x^n$, где ξ лежит между 0 и x.

При $x=\frac{1}{2}$ имеем $R_n\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{e^{\xi}}{n!}\left(\frac{1}{2}\right)^n,\quad 0<\xi<\frac{1}{2}.$

Для достижения нужной нам точности, потребуем, чтобы $|R_n| < 10^{-3}$.

Имеем $|R_n| = \left| \dfrac{e^{\xi}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n}{n!} \right| < \dfrac{e^{\max \xi}}{2^n \cdot n!} = \dfrac{e^{\frac{1}{2}}}{2^n \cdot n!} < \dfrac{e}{2^n \cdot n!} < \dfrac{3}{2^n \cdot n!}$. (в числителе использовали неравенство $e^{\frac{1}{2}} < e < 3$).

Замечаем, что, начиная с $n = 5, |R_n| < 10^{-3}$.

Действительно, $|R_5| = \dfrac{1}{1280} < 10^{-3}$.

Следовательно, для вычисления $\sqrt{e}$ с требуемой точностью надо взять $n = 5$;

$\sqrt{e} \approx 1 + \dfrac{1}{22} + \dfrac{1}{2^2 \cdot 2!} + \dfrac{1}{2^3 \cdot 3!} + \dfrac{1}{2^4 \cdot 4!} + \dfrac{1}{2^5 \cdot 5!} \approx 1{,}648$, (все слагаемые надо брать с точностью до 10^{-4}).

П р и м е р (парадокс). Любое положительное число равно отрицательной бесконечности, любое отрицательное число равно положительной бесконечности.

Из ряда $\dfrac{1}{1-a} = (1-a)^{-1} = 1 + a + a^2 + a^3 + \ldots$ при $a = 3$ получим $-\dfrac{1}{2} = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \ldots = \infty$, а из ряда $-\dfrac{1}{1-a} = -(1-a)^{-1} = -(1 + a + a^2 + a^3 + \ldots)$ при $a = 3$ получим $\dfrac{1}{2} = -(1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \ldots) = -\infty$.

Необходимо принимать во внимание область сходимости ряда. Именно, $\dfrac{1}{1-a} = 1 + a + a^2 + a^3 + \ldots$ справедливо при $|a| < 1$.

2. Интегрирование функций

Пусть надо найти интеграл $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$, причем известно разложение подынтегральной функции в ряд Маклорена, пределы интегрирования лежат внутри интервала сходимости ряда. Тогда имеем право интегрировать почленно этот ряд. В результате получится ряд Тейлора для функции $F(x)$ с тем же радиусом сходимости, что и ряд для подынтегральной функции $f(t)$.

П р и м е р. Вычислить $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \dfrac{dx}{1+x^4}$. Неопределенный интеграл выражается в элементарных функциях $\int \dfrac{dx}{1+x^4} = \dfrac{1}{4\sqrt{2}} \ln \dfrac{x^2 + x\sqrt{2} + 1}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} - \dfrac{\sqrt{2}}{4} arctg \dfrac{x\sqrt{2}}{1+x^2} + C$.

Это выражение мало удобно для вычислений. Подсчитаем данный интеграл приближенно. Разложим подынтегральную функцию в ряд

$$\frac{1}{1+x^4}=1-x^4+x^8-x^{12}+\dots,$$

как геометрическую прогрессию со знаменателем $-x^4$, получим

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{1+x^4}=\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^5\frac{1}{5}+\left(\frac{1}{2}\right)^9\frac{1}{9}-\dots.$$

Ограничимся двумя членами ряда, тогда получим

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{1+x^4}=\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^5\frac{1}{5}\approx 0{,}4938\,.$$

При этом ошибка не превосходит третьего члена

$$\left(\frac{1}{2}\right)^9\frac{1}{9}\approx 0{,}0002\,.$$

3. Приближенное интегрирование дифференциальных уравнений

При помощи разложений функций в степенные ряды можно приближенно интегрировать разнообразные дифференциальные уравнения. Не вдаваясь в сложные теоретические соображения, и не касаясь многочисленных практических приемов, мы ограничимся лишь некоторыми примерами.

П р и м е р 1. (применим способ последовательных дифференцирований). Найти первые три члена разложения в степенной ряд частного решения уравнения $y''=y\cos x+x$, удовлетворяющего условиям $y(0)=1,\ y'(0)=0.$

Р е ш е н и е. Решение ищем в виде ряда Маклорена

$$y(x)=y(0)+\frac{y'(0)}{1!}x+\frac{y''(0)}{2!}x^2+\frac{y'''(0)}{3!}x^3+\dots, \qquad (34)$$

Первые два коэффициента известны из начальных условий, $y''(0)$ найдем из данного уравнения, используя начальные условия:

$$y''(0)=y(0)\cos 0+0=1,\ y''(0)=1.$$

Следующие коэффициенты найдем, продолжая дифференцировать данное уравнение $y'''=y'\cos x-y\sin x+1,\ y'''(0)=\cos 0-y(0)\sin 0+1=1$. Подставим значения $y(0),\ y'(0),\ y''(0),\ y'''(0)$ в (34), получим $y(x)\approx 1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}$.

П р и м е р 2. (применим способ неопределенных коэффициентов). Найти решение уравнения $y''-xy=0$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=0,\ y'(0)=1$.

Решение ищем в виде ряда

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\dots+a_nx^n+\dots \qquad (35)$$

на основании начальных условий находим $a_0=0,\ a_1=1.$

Дважды дифференцируем ряд

$$y''=2a_2+3\cdot 2a_3x+\dots+n(n-1)a_nx^{n-2}+\dots$$

Подставляем в данное уравнение вместо y и y'' их разложения, получает тождество

$$2a_2 + 3\cdot 2a_3 x + ... + n(n-1)a_n x^{n-2} + ... = a_0 x + a_1 x^2 + a_2 x^3 + ... + a_{n-3}x^{n-2} + ...$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, находим $a_2 = 0,\ a_3 = 0,\ 4\cdot 3a_4 = 1, ...,\ n(n-1)a_n = a_{n-3}$.

Поэтому $a_4 = \dfrac{1}{3\cdot 4},\ a_5 = 0,\ a_6 = 0,\ a_7 = \dfrac{1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7},\ a_8 = 0,\ \ a_9 = 0,\ a_{10} = \dfrac{1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot 9\cdot 10}$.

Замечаем, что

$$a_{2m-1} = a_{2m} = 0,\ a_{2m+2} = \frac{1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot ...\cdot 3m(3m+1)}.$$

Подставляя найденные значения коэффициентов в (35), получим

$$y = x + \frac{1}{3\cdot 4}x^4 + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7}x^7 + ... + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot ...\cdot 3m(3m+1)}x^{3m+1} + ...$$

С помощью признака Даламбера можно убедиться в том, что этот ряд сходится на всей числовой оси, значит представляет искомое решение при всех x.

§16. Тригонометрические ряды, их применение

Во многих технических задачах возникает необходимость представлять произвольные функции через простейшие периодические функции. Такие задачи возникают в электротехнике: представить ток, изменяющийся по сложному закону $I = I(t)$, через простые синусоидальные токи. Примерами периодических процессов могут служить движения шатуна и поршня в двигателях, явления, связанные с распространением электромагнитных колебаний и многие другие.

Математическим аппаратом для исследования таких задач служат тригонометрические ряды.

Определение. Тригонометрическим рядом называется функциональный ряд

$$\frac{a_0}{2} + a_1\cos x + b_1\sin x + a_2\cos 2x + b_2\sin 2x + ... + a_n\cos nx + b_n\sin nx + ... \tag{36}$$

Числа $\dfrac{a_0}{2}, a_1, b_1, ..., a_n, b_n, ...$ называются *коэффициентами ряда* (36).

В отличие от степенного ряда в тригонометрическом ряду вместо степеней x: $x^0, x, x^2, ..., x^n, ...$ выбраны тригонометрические функции: $\dfrac{1}{2}, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, ..., \cos nx, \sin nx, ...$, которые достаточно просты и хорошо изучены.

В дальнейшем нам понадобятся равенства:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos px\cdot\cos kx dx = \begin{cases} 0, \text{åñëè } p \neq k; \\ \pi, \text{åñëè } p = k \end{cases} \tag{37}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin px\cdot\sin kx dx = \begin{cases} 0, \text{åñëè } p \neq k; \\ \pi, \text{åñëè } p = k \end{cases} \tag{38}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin px \cdot \cos kx dx = 0 \qquad (39)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx = 0\,,\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin px dx = 0\,, \qquad (40)$$

где p и k - любые целые числа.

Убедиться в справедливости этих равенств предоставим читателю.

§ 17. Ряд Фурье, его сходимость

Ряд (36) часто записывают так:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \qquad (41)$$

Так как члены ряда (41) имеют общий период $T = 2\pi$, то и сумма ряда, если он сходится, также является периодической функцией с периодом 2π.

Допустим, что функция $f(x)$ есть сумма этого ряда:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \qquad (42)$$

В таком случае говорят, что функция $f(x)$ разлагается в тригонометрический ряд. Предположим, что этот ряд сходится равномерно на $[-\pi;\pi]$ и определим его коэффициенты. Так как равномерно сходящийся на отрезке ряд можно почленно интегрировать на нем, то

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx \right).$$

Но так как $\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx dx = 0$ (см.(40)), то

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx = \frac{a_0}{2} x \Big|_{-\pi}^{\pi} = a_0 \pi$$

Отсюда $a_0 = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$ (43)

Пусть k - натуральное число. Для нахождения коэффициента a_k умножим ряд (42) почленно на $\cos kx$. Полученный ряд

$f(x)\cos kx = \dfrac{a_0}{2} \cos kx + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx \cos kx + b_n \sin nx \cos kx)$ в силу свойств равномерно сходящихся рядов является равномерно сходящимся на $[-\pi;\pi]$. Интегрируя его, получим

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos kx dx \right) \qquad (44)$$

Но $\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx = 0$ на основании (40),и вследствие равенств (37) и (39) под знаком суммы отличен от нуля только один интеграл при $n = k$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kxdx = \pi$$

Поэтому равенство (44) запишется в виде

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kxdx = a_k\pi \text{, откуда } a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kxdx \qquad (45)$$

Аналогично, умножая обе части равенства (42) на $\sin kx$ и интегрируя на $[-\pi;\pi]$ на основании равенств (38), (39) и (40) получим

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kxdx \qquad (46)$$

Таким образом, если периодическая функция $f(x)$ с периодом 2π является суммой равномерно сходящихся на $[-\pi;\pi]$ тригонометрического ряда (41), то коэффициенты этого ряда определяются по формулам (43), (45), (46). По этим формулам можно вычислять все коэффициенты ряда для любого натурального k. Коэффициенты ряда, определяемые по формулам (43), (45), (46) называются **коэффициентами Фурье**. Тригонометрический ряд (41), коэффициенты которого определяются по формулам (43), (45), (46) называется **рядом Фурье**, соответствующим функции $f(x)$.

Таким образом, если периодическая функция $f(x)$ является суммой равномерно сходящегося тригонометрического ряда, то этот ряд является ее рядом Фурье.

При выводе формул (44), (45), (46) мы предполагали, что $f(x)$ разлагается в равномерно сходящийся тригонометрический ряд (41). Если такого предположения не делать, а допустить, что для функции $f(x)$ существуют все интегралы, стоящие в правых частях формул (44), (45), (46), то по этим формулам можно вычислить коэффициенты a_0, a_k, b_k и составить тригонометрический ряд (41), который представляет собой ряд Фурье, соответствующий данной функции.

Является ли построенный таким образом ряд Фурье сходящимся и если он сходится, то имеем ли мы право утверждать, что он сходится именно к функции $f(x)$, с помощью которой вычислялись коэффициенты ряда?

Подобный вопрос возникал при изучении степенных рядов.

Оказывается, что сходимость ряда Фурье к заданной функции имеет место для широкого класса функций. Достаточные условия сходимости ряда Фурье, и, следовательно, возможность разложения функций в ряд Фурье дается теоремой Дирихле. Прежде чем сформулировать эту теорему, введем два определения.

О п р е д е л е н и е. Функция $f(x)$ называется **кусочно-монотонной** на $[a,b]$, если этот отрезок можно разбить на конечное число отрезков, внутри каждого из которых функция либо только возрастает, либо только убывает, либо постоянна.

О п р е д е л е н и е. Функция $f(x)$ называется **удовлетворяющей условиям Дирихле** на $[a,b]$, если: 1) функция непрерывна на $[a,b]$ или же имеет на нем конечное число точек разрыва первого рода; 2) функция кусочно- монотонна на $[a,b]$.

Теорема Дирихле (достаточные условия разложимости функции $f(x)$ в ряд Фурье). Пусть периодическая функция $f(x)$ с периодом 2π удовлетворяет на любом отрезке условиям Дирихле. В таком случае ряд Фурье, соответствующий этой функции, сходится во всех точках числовой оси. При этом в каждой точке непрерывности функции $f(x)$ сумма ряда $S(x)$ каждой точке непрерывности функции $f(x)$ сумма ряда $S(x)$ равна значению функции в этой точке. В каждой точке x_0 разрыва функции сумма ряда равна среднему арифметическому предельных значений функции при $x \to x_0$ слева и справа, т.е.

$$S(x_0) = \frac{1}{2}\left[\lim_{x\to x_0-0} f(x) + \lim_{x\to x_0+0} f(x)\right].$$

Доказательство приводить не будем.

П р и м е р. Функцию

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ 1, & 0 < x < \pi \end{cases}$$

разложить в тригонометрический ряд Фурье. Построить график функции $f(x)$ и график суммы $S(x)$ полученного ряда.

Р е ш е н и е. Ряд Фурье имеет вид

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right),$$

где $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 1dx = 1$,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 1\cdot\cos nxdx = \frac{1}{\pi n}\sin nx\Big|_0^{\pi} = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 1\cdot\sin nxdx = -\frac{1}{\pi n}\cos nx\Big|_0^{\pi} = \frac{1}{\pi n}\left(1-\cos \pi n\right) = \frac{1}{\pi n}\left[1-(-1)^n\right] =$$

$$= \begin{cases} 0, & n = 2m, \\ \dfrac{2}{\pi n}, & n = 2m-1 \end{cases}$$

Итак, ряд Фурье для данной функции имеет вид

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left[1-(-1)^n\right]\sin nx = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{2m-1}\sin(2m-1)x; \quad -\pi < x < 0 \text{ и } 0 < x < \pi$$

Сумма ряда $S(x)$ имеет вид

$$S(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & x=-\pi,\\ 0, & -\pi<x<0,\\ \frac{1}{2}, & x=0,\\ 1, & 0<x<\pi,\\ \frac{1}{2}, & x=\pi\end{cases}\qquad S(x+2\pi)=S(x)$$

Графики функции $f(x)$ и суммы $S(x)$ полученного ряда представлены на рис. 4.

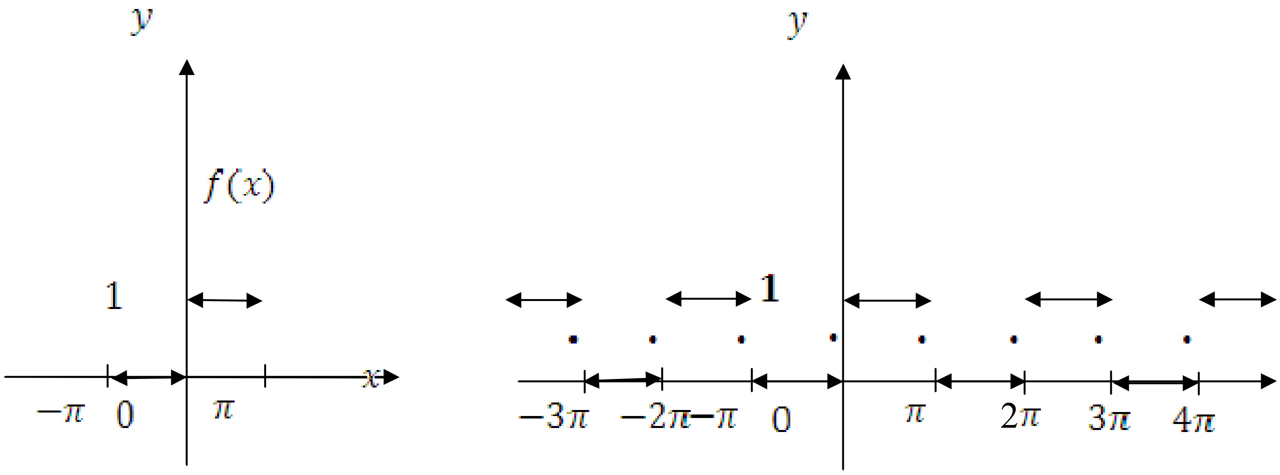

Рис.4

§18. Разложение в ряд Фурье функций с периодом $2l$

Этот случай сводится только что к изученному материалу. Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условиям Дирихле и имеет период $2l$. Вводя новую переменную z с помощью подстановки $z=\frac{\pi}{l}x$ можно показать, что ряд Фурье для $f(x)$ будет иметь вид

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi}{l}x+b_k\sin\frac{k\pi}{l}x\right), \tag{47}$$

где $a_0=\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}f(x)dx$, $a_k=\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{k\pi}{l}xdx$, $b_k=\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{k\pi}{l}xdx$ (48)

§19. Ряды Фурье для четных и нечетных функций

Вспомним некоторые свойства четных и нечетных функций.

1) Произведение четной функции на четную или нечетной на нечетную, есть функция четная.

2) Произведение четной функции на нечетную, есть функция нечетная.

3) Если $f(x)$ - четная, то $\int\limits_{-l}^{l} f(x)dx = 2\int\limits_{0}^{l} f(x)dx$.

4) Если $f(x)$ - нечетная, то $\int\limits_{-l}^{l} f(x)dx = 0$.

Допустим, что нужно разложить в ряд Фурье четную $2l$ - периодическую функцию $f(x)$. Так как $\cos kx$ - четная функция, а $\sin kx$ - функция нечетная, то $f(x)\cdot\cos kx$ - функция четная, а $f(x)\cdot\sin kx$ - функция нечетная (свойства 1) и 2)). На основании свойств 3) и 4) получим, что формулы (48) примут вид

$$a_0 = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)dx = \frac{2}{l}\int\limits_{0}^{l} f(x)dx,$$

$$a_k = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{k\pi}{l}xdx = \frac{2}{l}\int\limits_{0}^{l} f(x)\cos\frac{k\pi}{l}xdx,$$

$$b_k = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{k\pi}{l}xdx = 0.$$

Следовательно, ряд Фурье для четной функции имеет вид $\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k\cos\frac{k\pi}{l}x$.

Четная функция разлагается в ряд по косинусам.

Если требуется разложить в ряд Фурье нечетную функцию $f(x)$, то $f(x)\cdot\cos\frac{k\pi}{l}x$ - функция нечетная, а $f(x)\cdot\sin\frac{k\pi}{l}x$ - четная функция (свойства 1) и 2)). Поэтому $a_0 = a_k = 0$, $b_k = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{k\pi}{l}xdx = \frac{2}{l}\int\limits_{0}^{l} f(x)\sin\frac{k\pi}{l}xdx$.

Ряд Фурье для нечетной функции имеет вид

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k\sin\frac{k\pi}{l}x$, то есть нечетная функция разлагается в ряд только по синусам.

§20. Типовые задания

Задание 1.

Решить вопрос о сходимости рядов:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{n+1}\right)^n$ Ответ: расходится; 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2\cdot 2^n}{5^n}$ Ответ: сходится;

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{3^n}$ Ответ: сходится; 4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4n^3-5}{2n^3+1}$ Ответ: расходится;

5. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$ Ответ: расходится; 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$ Ответ: сходится;

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+1)}{n+1}$ Ответ: расходится; 8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}$ Ответ: сходится;

9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\cdot n!}{n^n}$ Ответ: расходится; 10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n(3n+4)}$ Ответ: расходится;

11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{\sqrt{4n+1}}$ Ответ: расходится; 12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n!}$ Ответ: сходится;

13. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^3 n}$ Ответ: сходится; 14. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{arctgn}{1+n^2}$ Ответ: сходится;

15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2\cdot 8^n}{(n^2+3)\cdot 5^n}$ Ответ: расходится; 16. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n^2+1}{4n^2-3}\right)^n$ Ответ: сходится;

17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3\cdot 3^n}{2^n}$ Ответ: расходится; 18. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+1}{5^n}$ Ответ: сходится;

19. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{2n^3+3}$ Ответ: сходится; 20. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{arctg^2 n}{1+n^2}$ Ответ: сходится;

21. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{4^n}$ Ответ: расходится; 22. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^2 n}{n}$ Ответ: расходится;

23. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{2}$ Ответ: расходится; 24. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot n!}{n}$ Ответ: расходится;

25. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+n-1}{(n+1)(3n-1)}$ Ответ: сходится; 26. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{\sqrt{2n-3}}$ Ответ: расходится;

27. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{n!}$ Ответ: сходится; 28. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$ Ответ: сходится;

29. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+n^2)arctgn}$ Ответ: сходится; 30. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3\cdot 3^n}{(n^2+1)\cdot 5^n}$ Ответ: сходится;

Задание 2

Решить вопрос об абсолютной сходимости рядов:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}$ Ответ: сходится абсолютно;
2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\ln(n+1)}{n+1}$ Ответ: сходится условно;
3. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{(3n+1)^2}$ Ответ: сходится абсолютно;
4. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{3^n}{(n+1)^n}$ Ответ: сходится абсолютно;
5. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{5}{\sqrt{8n+3}}$ Ответ: сходится условно;
6. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{6n+5}{2^n}$ Ответ: сходится абсолютно;
7. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{3^n}{(n+1)!}$ Ответ: сходится абсолютно;

8. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n+5}{(n+1)(n+4)}$ Ответ: сходится условно;

9. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n+9}{n^4}$ Ответ: сходится абсолютно;

10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)\ln^4(n+1)}$ Ответ: сходится абсолютно;

11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(n^3+2)\cdot 5^n}$ Ответ: сходится абсолютно;

12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n^2}{n^3+3}$ Ответ: сходится условно;

13. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{3n+2}{(n+3)^4}$ Ответ: сходится абсолютно;

14. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{6^n}{(n+2)!}$ Ответ: сходится абсолютно;

15. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sqrt{n}}{n+1}$ Ответ: сходится условно;

16. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{(n+1)!}$ Ответ: сходится абсолютно;

17. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n}$ Ответ: сходится условно;

18. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{5n+1}$ Ответ: сходится условно;

19. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^n}{(n+1)^n}$ Ответ: сходится абсолютно;

20. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2n-1}$ Ответ: сходится условно;

21. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n-1)^3}$ Ответ: сходится абсолютно;

22. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+1)}$ Ответ: сходится условно;

23. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n\cdot 2^n}$ Ответ: сходится абсолютно;

24. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{\sqrt{n}}$ Ответ: сходится условно;

25. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot 2}{\sqrt{3n-1}}$ Ответ: сходится условно;

26. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}\cdot(n+2)}{4^n}$ Ответ: сходится абсолютно;

27. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{4^n}{n!}$ Ответ: расходится;

28. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot n}{(n+1)(n+2)}$ Ответ: расходится;

29. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}(n+3)}{n^2}$ Ответ: сходится условно;

30. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}n}{n^2+1}$ Ответ: сходится условно.

Задание 3

Найти область сходимости рядов:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{\sqrt{n}}$ Ответ: $[1;3)$; 2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n^3}$ Ответ: $[0;2]$;

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{\sqrt{n}\cdot 2^n}$ Ответ: $[1;5)$; 4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{2^n}$ Ответ: $(0;4)$;

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{(n+1)\cdot 5^n}$ Ответ: $[-2;8)$; 6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{n(2n-1)}$ Ответ: $[-2;0]$;

7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-4)^n}{\sqrt{n+1}}$ Ответ: $[3;5)$; 8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\frac{(x-1)^n}{2^n}$ Ответ: $(-1;3)$;

9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{3n+2}$ Ответ: $(-3;-1)$; 10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^n}{n\cdot n!}$ Ответ: $(-\infty;\infty)$;

11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{(2n+1)\cdot 3^n}$ Ответ: $[-2;4)$; 12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{(2n+1)\cdot n^2}$ Ответ: $[4;6]$;

13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-4)^n}{(n+1)!}$ Ответ: $(-\infty;\infty)$; 14. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{4n-5}$ Ответ: $[-4;-2)$;

15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{(n+3)\cdot 2^n}$ Ответ: $[-3;1)$; 16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+4)^n}{\sqrt{n}}$ Ответ: $[-3;1)$;

17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n^2}$ Ответ: $[2;4]$; 18. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{\sqrt{n}\cdot 3^n}$ Ответ: $[-4;2)$;

19. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{3^n}$ Ответ: $(0;6)$; 20. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n\cdot 4^n}$ Ответ: $[-6;2)$;

21. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n\cdot(4n+1)}$ Ответ: $[2;4]$; 22. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{\sqrt{n+2}}$ Ответ: $[0;2)$;

23. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+2}\cdot\frac{(x+1)^n}{3^n}$ Ответ: $(-4;2)$; 24. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{3n+1}$ Ответ: $[2;4)$;

25. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{(n+1)!}$ Ответ: $(-\infty;\infty)$; 26. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-4)^n}{(2n-1)\cdot 2^n}$ Ответ: $[2;6)$;

27. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-6)^n}{(n+1)\cdot n}$ Ответ: $[5;7]$; 28. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n^3}$ Ответ: $[1;3]$;

29. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n-5}$ Ответ: $[2;4)$; 30. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{(n+1)\cdot 3^n}$ Ответ: $[-6;0)$

Задание 4

Разложить в ряд Маклорена функции и указать интервал сходимости полученного ряда:

1. $f(x)=e^{x^2}$ Ответ: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!}$, $(-\infty;\infty)$
2. $f(x)=2^x$ Ответ: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^{n-1}2\cdot x^n}{(n-1)!}$, $(-\infty;\infty)$
3. $f(x)=\cos^2 x$ Ответ: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2x)^{2n-2}}{(2n-2)!}$, $(-\infty;\infty)$
4. $f(x)=x\sin x$ Ответ: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{(2n-1)!}$, $(-\infty;\infty)$
5. $f(x)=e^{-2x}$ Ответ: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}2^{n-1}}{(n-1)!}x^{n-1}$, $(-\infty;\infty)$
6. $f(x)=arctg2x$ Ответ: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2x)^{2n-1}}{2n-1}$, $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$
7. $f(x)=\sin\frac{x}{2}$ Ответ: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n-1}$, $(-\infty;\infty)$
8. $f(x)=x^2\cos x$ Ответ: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2(n+1)}}{(2n)!}$, $(-\infty;\infty)$
9. $f(x)=x^2e^x$ Ответ: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{n!}$, $(-\infty;\infty)$
10. $f(x)=\sin 3x$ Ответ: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(3x)^{2n-1}}{(2n-1)!}$, $(-\infty;\infty)$
11. $f(x)=\frac{1}{1-3x}$ Ответ: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(3x)^{n-1}$, $\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$
12. $f(x)=\ln(1+2x)$ Ответ: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2x)^n}{n}$, $\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$
13. $f(x)=\sin^2 x$ Ответ: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2x)^{2n}}{(2n)!}$, $(-\infty;\infty)$
14. $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ Ответ: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-2}$, $(-1;1)$
15. $f(x)=\frac{1}{1+2x}$ Ответ: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(2x)^{n-1}$, $\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$
16. $f(x)=e^{-x^2}$ Ответ: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{2n}}{n!}$, $(-\infty;\infty)$
17. $f(x)=e^{2x}$ Ответ: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(2x)^{n-1}}{(n-1)!}$, $(-\infty;\infty)$
18. $f(x)=\ln(10+x)$ Ответ: $\ln 10+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n\cdot 10^n}$, $(-1;1)$

19. $f(x)=\sqrt{1+x^2}$ Ответ: $1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-3)x^{2n}}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n-2)\cdot 2n}$, $(-1;1)$

20. $f(x)=3^x$ Ответ: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^{n-1}3\cdot x^n}{(n-1)!}$, $(-\infty;\infty)$

21. $f(x)=x\cos x$ Ответ: $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{2n+1}}{(2n)!}$, $(-\infty;\infty)$

22. $f(x)=e^{-x/3}$ Ответ: $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^n}{3^n\cdot n!}$, $(-\infty;\infty)$

23. $f(x)=arctg3x$ Ответ: $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(3x)^{2n-1}}{2n-1}$, $\left[-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right]$

24. $f(x)=\cos(x/2)$ Ответ: $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{2n}}{4^n\cdot(2n)!}$, $(-\infty;\infty)$

25. $f(x)=\frac{1}{1+x^3}$ Ответ: $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot x^{3n}$, $(-1;1)$

26. $f(x)=x\cdot e^x$ Ответ: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{(n)!}$, $(-\infty;\infty)$

27. $f(x)=\cos 3x$ Ответ: $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(3x)^{2n}}{(2n)!}$, $(-\infty;\infty)$

28. $f(x)=\frac{1}{1+3x}$ Ответ: $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot(3x)^n$, $\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$

29. $f(x)=\ln(1+3x)$ Ответ: $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(3x)^n}{n}$, $\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right]$

30. $f(x)=\frac{1}{1+4x}$ Ответ: $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot(4x)^n$, $\left(-\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right)$

Задание 5

Разложить в ряд Фурье функции:

1. $f(x)=2$, $0\le x\le 2$, по синусам Ответ: $\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2}$

2. $f(x)=x$, $-1\le x\le 1$ Ответ: $\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\pi nx$

3. $f(x)=x$, $-\pi\le x\le 0$, по косинусам Ответ: $2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cos nx$

4. $f(x)=\frac{1}{2}|x|$, $-2\le x\le 2$ Ответ: $\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2}$

5. $f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi\le x\le 0\\ 2, & 0\le x\le\pi\end{cases}$ Ответ: $\frac{1}{2}+\frac{6}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin(2n-1)x$

6. $f(x)=x$, $0\le x\le 1$, по косинусам Ответ: $\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos\pi(2k+1)x$

7. $f(x)=1,\ -1\le x\le 0$, по синусам Ответ: $\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin(2n-1)\pi x$

8. $f(x)=|x|,\ -\pi\le x\le \pi$ Ответ: $\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x$

9. $f(x)=x,\ 0\le x\le 1$, по синусам Ответ: $\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin \pi n x$

10. $f(x)=x+\pi,\ -\pi\le x\le \pi$ Ответ: $\pi+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$

11. $f(x)=\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2},\ 0\le x\le \pi$, по косинусам Ответ: $\frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\cos(2n+1)x$

12. $f(x)=x,\ -\pi\le x\le \pi$ Ответ: $-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n}\sin nx$

13. $f(x)=2x-3,\ -3\le x\le 3$ Ответ: $-3+\frac{12}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{\pi n x}{3}$

14. $f(x)=5x-1,\ -5\le x\le 5$ Ответ: $-1+\frac{50}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{\pi n x}{5}$

15. $f(x)=|x|,\ -1\le x\le 1$ Ответ: $\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\cos(2n+1)\pi x$

16. $f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi\le x\le 0\\ 1, & 0\le x\le \pi\end{cases}$ Ответ: $\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\sin(2n+1)x$

17. $f(x)=\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2},\ 0\le x\le \pi$, по синусам Ответ: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}\sin 2nx$

18. $f(x)=\frac{\pi-x}{2},\ 0\le x\le 2\pi$ Ответ: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin nx$

19. $f(x)=x^2,\ -\pi\le x\le \pi$ Ответ: $4+\frac{\pi^2}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$

20. $f(x)=x^2,\ 0\le x\le 2\pi$ Ответ: $\frac{4\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}-4\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$

21. $f(x)=x^2,\ 0\le x\le \pi$, по синусам Ответ: $\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left\{\frac{\pi^2}{n}+\frac{2}{n^3}\left[(-1)^n-1\right]\right\}\sin nx$

22. $f(x)=x^3,\ -\pi\le x\le \pi$ Ответ: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left\{\frac{12}{n^3}-\frac{2\pi^2}{n}\right\}\sin nx$

23. $f(x)=\begin{cases}1, & -\pi\le x\le 0\\ 3, & 0\le x\le \pi\end{cases}$ Ответ: $2+\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\sin(2n+1)x$

24. $f(x)=|x|,\ -2\le x\le 2$ Ответ: $1-\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\cos\left[(2n+1)\pi x/2\right]$

25. $f(x)=e^x-1,\ 0<x<2\pi$ Ответ: $\frac{e^{2\pi}-1}{\pi}\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos nx}{1+n^2}-\frac{n\sin nx}{1+n^2}\right)\right]-1$

26. $f(x)=e^x,\ -1<x<1$ Ответ: $sh1\left[1+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos\pi nx-\pi n\sin\pi nx}{1+n^2\pi^2}\right]$

27. $f(x)=\sin x,\ 0\le x\le\pi$ Ответ: $\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{1-(2n)^2}\cos 2nx+\frac{1}{2}\right]$

28. $f(x)=\cos x,\ 0<x<\pi$ Ответ: $-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2n}{1-(2n)^2}\sin 2nx\right]$

29. $f(x)=x\cdot(\pi-x)$, по синусам, $0\le x\le\pi$ Ответ: $\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^3}\sin(2n-1)x$

30. $f(x)=|x|,\ (-3;3)$ Ответ: $\frac{3}{2}-\frac{12}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\cos\frac{(2n+1)\pi x}{3}$

Литература

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. – М.: Наука, 1970-1985г., т.2.
2. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. – М.: Наука, 1978.
3. Марусич А.И., Головина В.Г., Ормонбеков Т.О. Наглядно- иллюстративные материалы по высшей математике. Фрунзе, 1989.
4. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. – М.: Высшая школа, 1980.

Оглавление

Математика
Лекции и типовые задания по разделу «Ряды»
Составители: ***Головина В.Г., Пахыров З.П., Тагаева С.Б.***

Тех. редактор ***Субанбердиева Н.Е.***

Подписано к печати 11.05.2011 г. Формат бумаги $60x84^1/_{16}$.
Бумага офс. Печать офс. Объем 2,62 п.л. Тираж 100 экз. Цена 42 с. Заказ 177

Бишкек, ул. Сухомлинова, 20. ИЦ “Текник” КГТУ им. И.Раззакова, т.: 54-29-43
e-mail: beknur@mail.ru