УДК.624.073.02 (575.2) (04)

РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ИЗГИБА ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ПЛИТЫ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ С УЧЕТОМ НЕПОЛНОГО КОНТАКТА С ОСНОВАНИЕМ

А.Т. Маруфий – канд. техн. наук, проф.

The numerical realization of a problem of semi-extreme bend on an elastic foundation with allowance for incomplete contact with the foundation, is shown

В работе [1, 2] рассмотрена задача изгиба полубесконечной плиты на упругом основании с учетом неполного контакта с основанием (рис. 1), где получено точное аналитическое решение задачи методом обобщенных решений и интегральных преобразований Фурье [3].

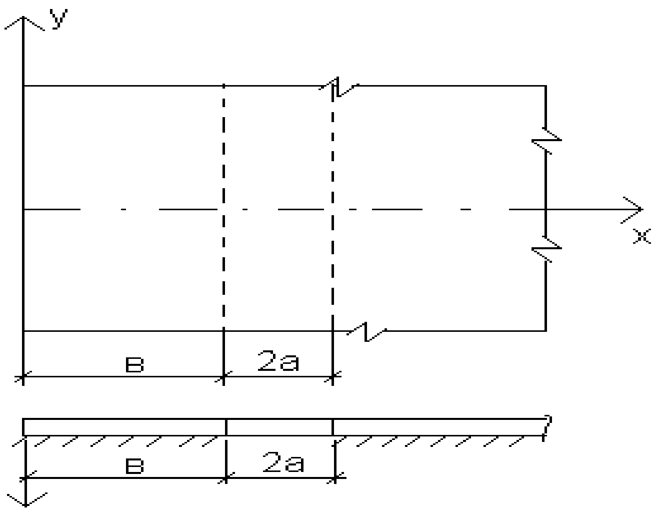

Рис. 1.

Дифференциальное уравнение изгиба в безразмерных координатах и функциях имеет вид:

$$\nabla\nabla W(x,y) + [\theta(x-в-2a) + \theta(в-x)]W(x,y) = q_i(x,y)\cdot \qquad (1)$$

Здесь $q(x,y) = \sum_{i=0}^{1} q(x,y)$, q_0 – функция приложенной к плите внешней нагрузки; $\theta(z)$ – функция Хевисайда;

$q_1 = L[A(y) \cdot \delta(x)]$, где L – оператор граничных условий при свободном опирании плиты $L(x, y) = -\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)$.

Введение функции $q_1(x, y)$ в правую часть уравнения (1), учитывающей разрывы функции $W(x, y)$ и её производных, позволяет применить для решения этого уравнения двумерное преобразование Фурье и получить в результате интегральное уравнение относительно функции $W(x, y)$

$$W(x,y) - \frac{2}{\pi} \int_{в}^{в+2a} W(t,\eta) \int_{0}^{\infty} K(x,\eta,t) \cos\eta y d\eta dt + \frac{1}{\pi^2} \int_{0}^{\infty} A_1(\eta) \alpha_0(\eta,x) \cos\eta y d\eta = \tag{2}$$
$$= W_{\infty}(x,y)$$

Ядро этого уравнения

$$K(x,\eta,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\eta^1+1}}[\varphi_1(\eta,x)\psi_1(\eta,t) + \varphi_2(\eta,x)\psi_2(\eta,t)] & x \ge t \\ \dfrac{1}{\sqrt{\eta^1+1}}[\varphi_1(\eta,t)\psi_1(\eta,x) + \varphi_2(\eta,t)\psi_2(\eta,x)] & x \le t, \end{cases} \tag{3}$$

где

$$\varphi_1(\eta,x) = e^{-Ax}(B\cos Bx + A\sin Bx),\ \psi_1(\eta,t) = chAt \cdot \cos Bt$$
$$\varphi_2(\eta,x) = e^{-Ax}(B\sin Bx - A\cos Bx),\ \psi_2(\eta,t) = shAt \cdot \sin Bt \tag{4}$$
$$AB = \sqrt{\frac{\sqrt{\eta^4+1} \pm \eta^2}{2}}.$$

Правой частью уравнения (2) является функция прогиба $W_{\infty}(x, y)$ бесконечной плиты, лежащей на сплошном основании без отверстия при действии на плиту приложенной к ней нагрузки.

Применив к уравнению (2) преобразование Фурье по координате Y, в результате получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода относительно функции $W(x,\eta)$, трансформанты Фурье функции прогиба плиты.

$$W(x,\eta) - \int_{в}^{в+2a} W(t,\eta)K(x,\eta,t)dt = W_{\infty}(x,\eta) + \frac{1}{2\pi} A_1(\eta)\alpha_0(\eta,x), \tag{5}$$

где $\alpha_0(\eta,x) = M_2(\eta,x) + \nu\eta^2 M_0(\eta,x)$

$$M_0(\eta,x) = \frac{2}{\pi} \frac{e^{-Ax}}{\sqrt{\eta^4+1}} (B\cos Bx + A\sin Bx);$$
$$M_2(\eta,x) = \frac{2}{\pi} e^{-Ax}(B\cos Bx - \sin Bx); \tag{6}$$

$W_{\infty}(x,\eta)$ – трансформанта Фурье функции $W_{\infty}(x, y)$.

В уравнение (4) входит ещё одна неизвестная функция $A_1(\eta)$, которая может быть определена из граничных условий на краю плиты (x = 0). Поэтому, используя выражение (3), запишем уравнение (5) при $x \le b$.

$$W(x,\eta)=W_{\infty}(x,\eta)+C_1(\eta,b,a)\psi_1(\eta,x)+C_2(\eta,b,a)\psi_2(\eta,x)+\frac{1}{2\pi}A_1(\eta)\alpha_0(\eta,x) \tag{7}$$

Здесь обозначено

$$C_i(\eta,b,a)=\frac{1}{\sqrt{\eta^4+1}}\int\limits_b^{b+2a}W(t,\eta)\varphi_i(\eta,t)dt \tag{8}$$

Предположим, что плита лежит свободно на упругом основании, тогда на краю плиты x=0 следует удовлетворить условиям

$$M_x(0,x)=0; \quad N_x(0,y)=0.$$

Второе условие удовлетворяется автоматически, а первое условие запишем в преобразованном виде:

$$\left[W''_{xx}(x,\eta)-\nu\eta^2W(x,\eta)\right]_{x=0}=0 \tag{9}$$

Подставив (7) в (9) и произведя необходимые операции, определим функцию $A_1(h)$

$$A_1(\eta)=-2\pi\left[M_{x\infty}(0,\eta)+(1-\nu)\eta^2C_1(\eta,b,a)+C_2(\eta,b,a)\right]\mathcal{E}^{-1}(\eta) \tag{10}$$

$$\mathcal{E}(\eta)=\frac{\pi}{2}B\left[2(1-\nu\eta^2)+\frac{1+(1-\nu)\eta^4}{\sqrt{\eta^4+1}}\right] \tag{11}$$

Подставив (11) в (7), получим

$$W(x,\eta)=f_1(x,\eta)+C_1(\eta,b,a)\beta_1(\eta,x)+C_2(\eta,b,a)\beta_2(\eta,x) \tag{12}$$

Здесь

$$\begin{aligned} &f_1(x,\eta)=W_\infty(x,\eta)-\varepsilon^{-1}(\eta)\cdot M_{x\infty}(0,\eta),\\ &\beta_1(x,\eta)=\psi_1(\eta,x)-(1-\nu)\varepsilon^{-1}(\eta)\cdot\alpha_0(\eta,x),\\ &\beta_2(x,\eta)=\psi_2(\eta,x)-\varepsilon^{-1}(\eta)\cdot\alpha_0(\eta,x).\end{aligned} \tag{13}$$

Значение функции $M_{x\infty}(0,\eta)$ зависит от приложенной к плите нагрузки. Если в центре плиты сосредоточенная сила P, то

$$M_{x\infty}(0,\eta)=\frac{PB}{4}\frac{(\sqrt{\eta^4+1}+\nu\eta^2)}{\sqrt{\eta^4+1}}. \tag{14}$$

Если в центре плиты на площадке 2c 2d приложена равномерная нагрузка q, то

$$M_{x\infty}(0,\eta)=\left\{e^{-AC}\sin BC+\frac{\nu\eta^2}{(\eta^4+1)}[1-e^{-AC}(\eta^2\sin BC+\cos BC)]\right\}\frac{\sin\eta d}{\eta}. \tag{15}$$

Для определения функции $C_i(\eta,b,a)$ используем известную процедуру решения интегральных уравнений с вырожденным ядром. Умножим обе части (12) последовательно на $\varphi_i(\eta,x)$ (i = 1,2), проинтегрируем от b до (b+2a), найдём, что

$$\begin{aligned} &C_1(\eta,b,a)=\lambda_1\lambda^{-1},\ C_2(\eta,b,a)=\lambda_2\lambda^{-1},\\ &\lambda=[1-\Phi_{11}(\eta,b,a)][1-\Phi_{22}(\eta,b,a)]+\Phi_{12}(\eta,b,a)\Phi_{21}(\eta,b,a),\\ &\lambda_1=\Phi_1(\eta,b,a)[1-\Phi_{22}(\eta,b,a)]+\Phi_{21}(\eta,b,a)\Phi_2(\eta,b,a),\\ &\lambda_{12}=\Phi_2(\eta,b,a)[1-\Phi_{11}(\eta,b,a)]+\Phi_{12}(\eta,b,a)\Phi_1(\eta,b,a).\end{aligned} \tag{16}$$

Здесь обозначено

$$\Phi_i(\eta,b,a)=\frac{1}{\sqrt{\eta^4+1}}\int\limits_b^{b+2a} W_\infty(t,\eta)\varphi_i(t,\eta)dt,$$

$$\Phi_{ik}(\eta,b,a)=\frac{1}{\sqrt{\eta^4+1}}\int\limits_b^{b+2a} \psi_i(t,\eta)\varphi_k(t,\eta)dt, \qquad (i=1,2,\ k=1,2). \tag{17}$$

Теперь рассмотрим решение уравнения (5), если точка ***x*** находится над отверстием в грунте, т.е. $x \le b \le (b+2a)$

В этом случае

$$W(x,\eta)=W_\infty(x,\eta)+\frac{\varphi_1(\eta,x)}{\sqrt{\eta^4+1}}\int\limits_b^x W(t,\eta)\psi_1(\eta,t)dt+\frac{\varphi_2(\eta,x)}{\sqrt{\eta^4+1}}\int\limits_b^x W(t,\eta)\psi_2(\eta,t)dt+$$
$$+\frac{\psi_1(\eta,x)}{\sqrt{\eta^4+1}}\int\limits_x^{b+2a} W(t,\eta)\varphi_1(\eta,t)dt+\frac{\psi_2(\eta,x)}{\sqrt{\eta^4+1}}\int\limits_x^{b+2a} W(t,\eta)\varphi_2(\eta,t)dt\,\frac{1}{2\pi}A_1(\eta)\alpha_0(\eta,x). \tag{18}$$

Функция $A_1(\eta)$ уже определена в (10). Значения $W(x,\eta)$ могут быть определены в ряде точек x численным способом, решая систему алгебраических уравнений, к которой сводится уравнение (18).

И, наконец, если точка x находится за отверстием, то уравнение (5) опять становится уравнением с вырожденным ядром и его решение имеет следующий вид:

$$W(x,\eta)=W_\infty(x,\eta)+\sum_{i=1}^{2} C_i(\eta,b,a,)\varphi_i(\eta,x), \tag{19}$$

здесь

$$C_i(\eta,b,a)=\frac{1}{\sqrt{\eta^4+1}}\int\limits_b^{b+2a} W(t,\eta)\psi_i(\eta,t)dt \qquad (i=1,2) \tag{20}$$

Значения коэффициента $C_i(\eta,b,a)$ могут быть также определены из соотношений типа (16), однако при этом

$$\Phi_i(\eta,b,a)=\frac{1}{\sqrt{\eta^4+1}}\int\limits_b^{b+2a} W_\infty(t,\eta)\psi_i(\eta,t)dt. \tag{21}$$

После определения трансформанты Фурье $W(x,\eta)$ по формулам (12), (18) и (19) можно определить функцию прогибов $W(x,y)$ для различных положений координаты x по отношению к отверстию, произведя обратное преобразование

$$W(x,y)=\int\limits_0^\infty W(x,\eta)\cos\eta y d\eta \tag{22}$$

или

$$W(x,y)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty E\cos\xi x\cos\eta y\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_b^{b+2a} W(t,\eta)\cos\xi t dt d\xi d\eta+W_\infty(x,y)-$$
$$-\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty EA_1(\eta)(\xi^2+\nu\eta^2)\cos\xi x\cos\eta y d\xi d\eta \tag{23}$$

Дифференцируя это выражение, можно определить изгибающие моменты и поперечные силы в плите.

$$M_x(x,y) = -\left(\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty E(\xi^2+\nu\eta^2)\cos\xi x\cos\eta y\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_b^{b+2a} W(t,\eta)\cos\xi x dtd\xi d\eta + \right.$$
$$+ M_{\infty x}(x,y) - \frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty EA_1(\eta)(\xi^2+\nu\eta^2)^2\cos\xi x\cos\eta y d\xi d\eta, \tag{24}$$

$$M_x(x,y) = -\left(\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty E(\nu\xi^2+\eta^2)\cos\xi x\cos\eta y\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_b^{b+2a} W(t,\eta)\cos\xi t dtd\xi d\eta + \right.$$
$$+ M_{\infty x}(x,y) - \frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty EA_1(\eta)(\xi^2+\nu\eta^2)^2\cos\xi x\cos\eta y d\xi d\eta, \tag{25}$$

$$Q_x(x,y) = -\left(\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty E\left[\xi^2+(\lambda-\nu)\xi\eta^2\right]\cos\xi x\cos\eta y\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_b^{b+2a} W(t,\eta)\cos\xi t dtd\xi d\eta + \right.$$
$$+ Q_{\infty x}(x,y) - \frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty EA_1(\eta)(\xi^2+\nu\eta^2)\left[\xi^2+(2-\nu)\xi\eta^2\right]\cos\xi x\cos\eta y d\xi d\eta, \tag{26}$$

$$Q_y(x,y) = -\left(\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty E\left[\xi^3+(2-\nu)\eta\xi^2\right]\cos\xi x\cos\eta y\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_b^{b+2a} W(t,\eta)\cos\xi t dtd\xi d\eta + \right.$$
$$+ Q_{\infty y}(x,y) - \frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty EA_1(\eta)(\xi^2+\nu\eta^2)[\xi^3+(2-\nu)\eta\xi^2]\cos\xi x\cos\eta y d\xi d\eta. \tag{27}$$

Результаты численной реализации приведены на рис. 2–4.

На рис. 2 приведено значение максимальных прогибов в полубесконечной плите, нагруженной сосредоточенной единичной силой в точке x = 0, y = 0. Из него видно, что с увеличением ширины траншеи прогибы увеличиваются, а при ширине 0,6 прогиб достигает величины 0.7293, что в 1.68 раза превышает прогиб в этой же точке полубесконечной плиты, полностью опирающейся на основание.

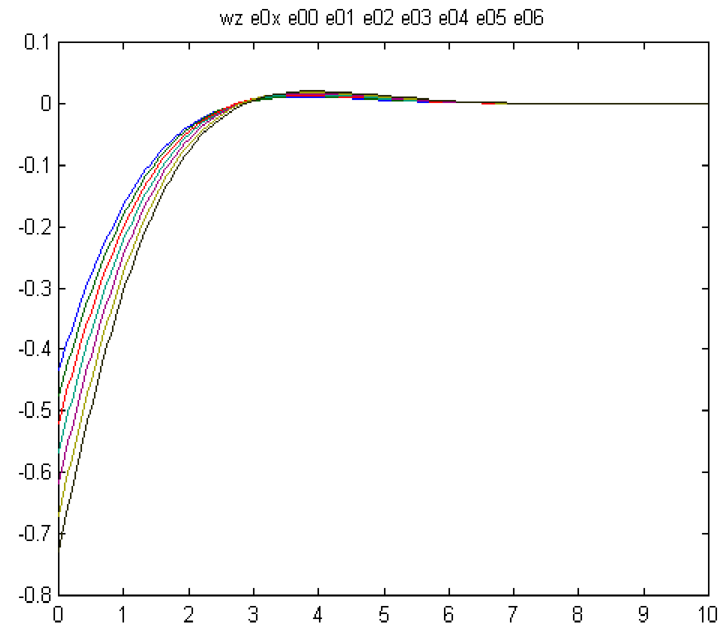

Рис. 2.

На рис. 3 и 4 приведены значения изгибающих моментов $M_x(x,y)$ и $M_y(x,y)$ для тех же случаев расположения траншей. Характер эпюр $M_x(x,y)$ примерно одинаков для плиты с полным опиранием и для плит с траншеями различной ширины, но все же значения моментов увеличиваются с увеличением ширины траншеи (рис. 3). Наибольший изгибающий момент $M_x(x,y)$ увеличился в 1,46 раза при абсциссе x = 1. Наибольший изгибающий момент $M_y(x,y)$ (рис. 4) увеличивается незначительно – в 1,08 раза.

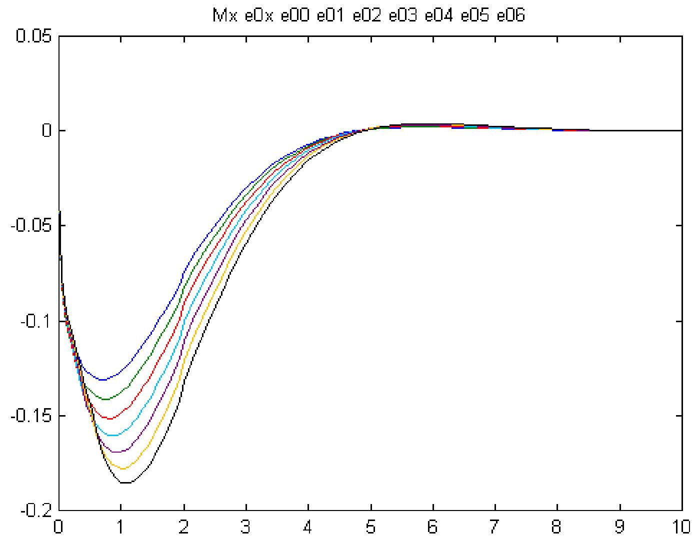

Рис. 3.

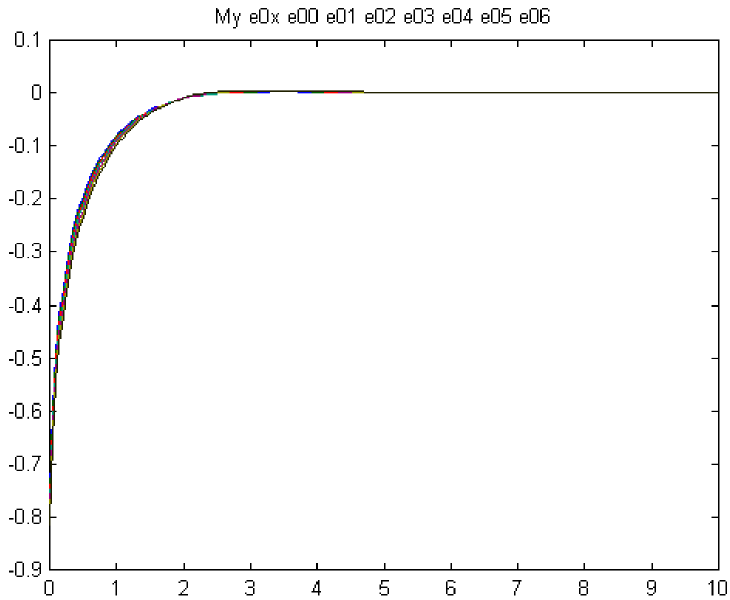

Рис. 4.

Литература

1. *Маруфий А.Т.* Расчет краевых участков плит, лежащих на упругом основании при отсутствии основания на части плиты // Научн. вестн. ФерГУ. – 1996. – № 1. – С. 65–69.
2. *Маруфий А.Т.* Расчет плит на упругом основании при отсутствии основания под частью плиты // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 1999. – № 4. – С. 27–31.
3. *Травуш В.И.* Метод обобщенных решений в задачах изгиба плит на линейно-деформируемом основании // Строительная механика и расчет сооружений. – 1982. – №1.