

УДК 539.374 (575.2) (04)

## О КРИТЕРИИ ТЕКУЧЕСТИ АНИЗОТРОПНЫХ МАТЕРИАЛОВ

*И.В. Гончарова* – ст. преподаватель

New criteria of anisotropic materials plasticity on an example of zirconium alloy are given

Конструкционные материалы, как малоуглеродистые стали, алюминиевые, титановые, циркониевые сплавы и др., в состоянии поставки обладают упругой анизотропией. Это их свойство предопределяет характер пластического течения, наблюдаемого в опытах на одно- и двухосное растяжение тонкостенных трубчатых образцов ( $\sigma_z$ ,  $\sigma_\varphi$ ,  $\sigma_r$  – осевое, окружное и радиальное напряжения,  $z$ ,  $\varphi$  и  $r$  – направления соответственно вдоль оси, по касательной к цилиндрической образующей и по радиусу трубки). Как выяснилось [1], почти при каждом виде напряженного состояния в момент возникновения текучести происходит плоскопластическая деформация, которую можно интерпретировать как результат скольжений по площадкам главных касательных напряжений  $\tau_{ij}$  ( $i, j = z, \varphi, r$ ). Причем в зависимости от изменения вида напряженного состояния, характеризуемого отношением  $k = \sigma_z/\sigma_\varphi$ , деформация чистого сдвига от скольжений по одной из «площадок скольжения» сменяется подобной деформацией от скольжения по другой из этих трех площадок. Такое поведение анизотропных материалов позволяет моделировать возникновение текучести локальными (идеализированными) скольжениями по площадкам главных касательных напряжений. Тогда критерий текучести можно представить, используя концепцию скольжения и указанную механику поведения ортотропного материала.

Данное явление более подробно рассмотрено на примере циркониевого сплава Циркалой-2 [2], или циркониум-олово, известного как высокоанизотропный материал.

Испытанию подвергались тонкостенные цилиндрические образцы, находящиеся под влиянием осевого растяжения и внутреннего

давления. Образцы нагружали до величины остаточной деформации от 0,05 до 0,2%. Затем их разгружали и повторно нагружали до разрушения. Напряженно-деформированное состояние образцов исследовали от одноосного продольного растяжения до растяжения в окружном направлении. Отношение осевого напряжения  $\sigma_z$  к окружному напряжению  $\sigma_\varphi$  при пропорциональном нагружении задавали следующими значениями:  $\infty$ , 2,5; 1; 0,5; 0.

При исследовании получены диаграммы напряженно-деформированного состояния образцов.

При этом материал считался упруго изотропным, поэтому компоненты тензора упругих деформаций определяли по формулам:

$$\begin{aligned}\varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_\varphi + \sigma_r)], \\ \varepsilon_\varphi &= \frac{1}{E} [\sigma_\varphi - \nu(\sigma_z + \sigma_r)], \\ \varepsilon_r &= \frac{1}{E} [\sigma_r - \nu(\sigma_z + \sigma_\varphi)].\end{aligned}\quad (1)$$

где  $E$  – модуль Юнга,  $\nu$  – коэффициент Пуассона,  $\varepsilon_z$ ,  $\varepsilon_\varphi$ ,  $\varepsilon_r$  – компоненты соответственно осевой, окружной и радиальной деформации.

С помощью полученных в эксперименте диаграмм зависимости напряжения от деформации при различных видах напряженного состояния, а также используя формулы для определения компонент тензора упругих деформаций и учитывая условие несжимаемости материала от пластической деформации, нами определены компоненты пластических деформаций в направлении трех главных осей ( $\varepsilon_{zp}$ ,  $\varepsilon_{\varphi p}$ ,  $\varepsilon_{rp}$ ).

Пластические деформации в трех главных направлениях  
(приведена копия таблицы из работы [2])

№	$\frac{\sigma_z}{\sigma_\varphi}$									
		$\sigma_z$	34,3	36,5	38,5	40	45	47,5		
6	$\infty$	$\varepsilon_{zp}$	0,0250	0,050	0,075	0,1	0,2850	0,470		
		$\varepsilon_{\varphi p}$	-0,018	-0,03	-0,05	-0,07	-0,195	-0,295		
		$\varepsilon_{rp}$	-0,007	-0,02	-0,025	0,03	-0,09	-0,1750		
9	$\infty$	$\sigma_z$	36,6	39,84	42	43,8	48	54		
		$\varepsilon_{zp}$	0,025	0,05	0,075	0,1	0,2	0,46		
		$\varepsilon_{\varphi p}$	-0,015	-0,025	-0,04	-0,055	-0,1	-0,23		
		$\varepsilon_{rp}$	-0,01	-0,025	-0,035	-0,045	-0,1	-0,23		
11	0	$\sigma_\varphi$	41,8	47,3	50,05	50,6				
		$\varepsilon_{zp}$	-0,0025	-0,015	-0,028	-0,035				
		$\varepsilon_{\varphi p}$	0	0,025	0,05	0,057				
		$\varepsilon_{rp}$	-0,0025	-0,01	-0,022	-0,022				
17	0	$\sigma_\varphi$	48,2	50,2	51,2	52,5				
		$\varepsilon_{zp}$	-0,0225	-0,035	-0,0425	-0,0525				
		$\varepsilon_{\varphi p}$	0,025	0,05	0,075	0,1				
		$\varepsilon_{rp}$	-0,0025	-0,015	-0,0325	-0,0475				
12	1	$\sigma_z$	47,5	52	55	57,5	60	65	70	72,5
		$\varepsilon_{zp}$	0,025	0,05	0,075	0,1	0,135	0,24	0,385	0,5
		$\varepsilon_{\varphi p}$	0	0	0	0	0	0	0	0
		$\varepsilon_{rp}$	-0,025	-0,05	-0,075	-0,1	-0,135	-0,2	-0,491	-0,67
10	1	$\sigma_z$	47	52,4	55,8	58,4	62	64	66	
		$\varepsilon_{zp}$	0,025	0,05	0,075	0,1	0,12	0,1475	0,2075	
		$\varepsilon_{\varphi p}$	0	0	0	0	0	75	500	
		$\varepsilon_{rp}$	-0,025	-0,05	-0,075	-0,1	-0,12	-0,155	-0,2575	
13	0,5	$\sigma_z$	64,8	67,5	70	72,5	74			
		$\varepsilon_{zp}$	0	-0,003	-0,011	-0,022	-0,064			
		$\varepsilon_{\varphi p}$	0,05	0,088	0,144	0,2240	0,324			
		$\varepsilon_{rp}$	-0,05	-0,085	-0,132	-0,202	-0,26			

		Продолжение таблицы								
15	0,5	$\sigma_z$	60	62,5	65	67,5	70	72		
		$\varepsilon_{zp}$	0	0	0	-60	-200	-340		
		$\varepsilon_{\text{ггп}}$	0,024	0,038	0,06	0,072	0,1480	0,24		
		$\varepsilon_{\text{ггп}}$	-0,024	-0,038	-0,06	-0,06	-0,1280	-0,216		
8	2,5	$\sigma_z$	35	40	42	44	46	48	49	
		$\varepsilon_{zp}$	0,0125	0,035	0,04	0,055	0,075	0,0975	0,1125	
		$\varepsilon_{\text{ггп}}$	-0,0015	-0,0075	-0,0125	0,0175	-0,025	-0,036	-0,045	
		$\varepsilon_{\text{ггп}}$	-0,011	-0,0275	0,0275	-0,0325	-0,05	-0,0615	-0,0675	
14	2,5	$\sigma_z$	35	40	42	44	46	48	50	52
		$\varepsilon_{zp}$	0,02	0,045	0,065	0,08	0,011	0,145	0,19	0,270
		$\varepsilon_{\text{ггп}}$	-0,005	-0,0175	-0,0225	-0,025	-0,035	-0,05	-0,075	-0,105
		$\varepsilon_{\text{ггп}}$	-0,015	-0,0275	-0,0425	-0,055	-0,075	-0,095	-0,115	-0,165

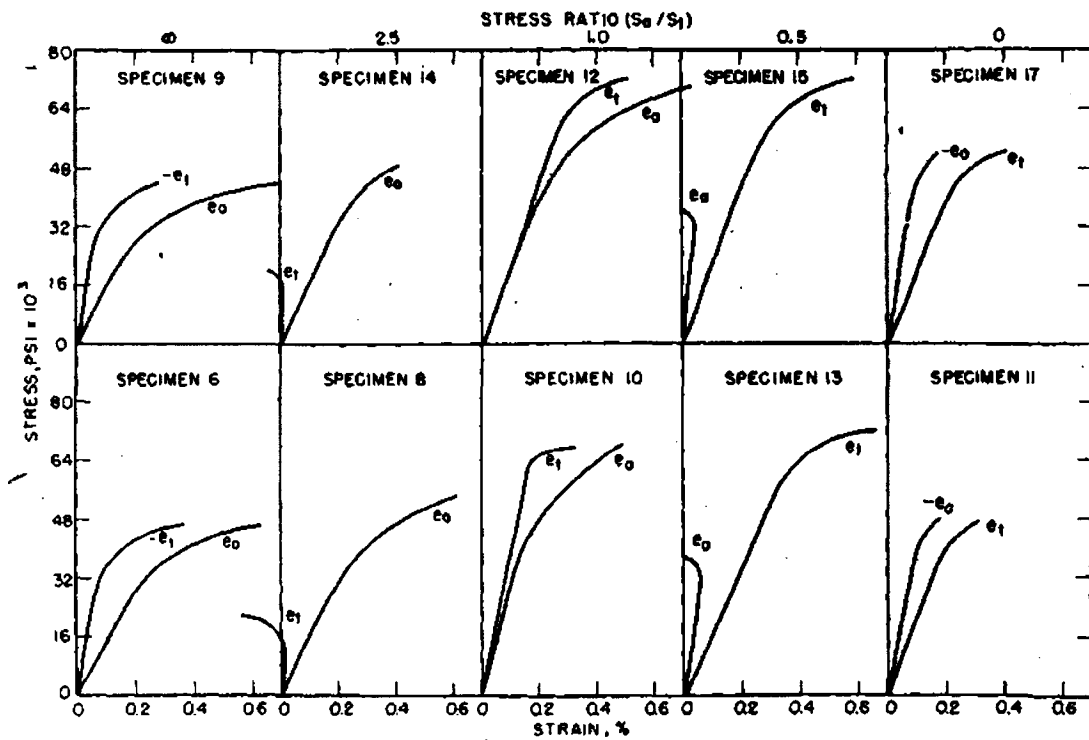


Рис. 1. Диаграммы напряженно-деформированного состояния образцов (приведена копия диаграмм из работы [2]).

В таблице приведены указанные деформации при различных напряженных состояниях для разных уровней напряжений. По значениям этих деформаций затем строили кривые текучести по допуску на наибольшую главную пластическую деформацию от 0,025 до 0,2%.

Анализ таблицы показывает несоответствие полученных указанным выше способом результатов со сделанным предположением о начальной изотропии материала: например, при равном двухосном растяжении ( $k=1$ ) происходит плоскопластическая деформация, что невозможно в случае начальной упругой изотропии. Напротив, данные таблицы соответствуют упруго анизотропному материалу. При этом, как следует, из диаграмм напряженно-деформированного состояния (рис. 1) и таблицы, упругие постоянные ( $E$  и  $\nu$ ), входящие в (1), принимались различными для разных образцов при одном и том же напряженном состоянии.

Обычно же, для того чтобы принять величины  $E$  и  $\nu$  действительно как константы материала, необходимо брать среднее значение постоянных (найденных при испытании разных образцов), либо учитывать погрешность, с которой определяются упругие постоянные. Использование неусредненных параметров материала равносильно тому, что механические свойства сплава меняются от образца к образцу и не явно изменяется допуск на остаточную деформацию, назначаемый для определения условного предела текучести.

На основании приведенного выше, примем сплав Циркалой-2 начально упруго анизотропным. Анизотропный материал должен удовлетворять обобщенному закону Гука. Согласно закону в рассматриваемом случае напряженно-деформированного состояния при наличии ортотропной симметрии компоненты тензора упругих деформаций определяются по формулам:

$$\begin{aligned} \varepsilon_z &= \frac{1}{E_z} \sigma_z - \frac{\nu_{\varphi z}}{E_\varphi} \sigma_\varphi; \\ \varepsilon_\varphi &= \frac{1}{E_\varphi} \sigma_\varphi - \frac{\nu_{z\varphi}}{E_z} \sigma_z \end{aligned} \quad (2)$$

Для ортотропного материала (если главные направления анизотропии совпадают с

направлениями главных напряжений) должно выполняться условие симметрии [3]:

$$E_z \nu_{\varphi z} = E_\varphi \nu_{z\varphi} \quad (3)$$

Нами установлено, что упругие константы материала, входящие в обобщенный закон Гука, удовлетворяют условию ортотропии.

Для ортотропных сплавов часто принимается классическое квадратичное условие текучести Мизеса-Хилла.

$$H_0 (\sigma_z - \sigma_\varphi)^2 + F_0 (\sigma_\varphi - \sigma_r)^2 + G_0 (\sigma_r - \sigma_z)^2 = 1, \quad (4)$$

где  $H_0$ ,  $F_0$ ,  $G_0$  – параметры начальной анизотропии материала, которые определяются по известным пределам текучести  $\sigma_i^T$  в направлении главных осей ( $i = z, \varphi, r$ ).

Но в рассматриваемом случае предел текучести в радиальном направлении  $\sigma_r^T$  экспериментально определить невозможно. Как показано в [4], можно воспользоваться ассоциированным с условием (4) законом текучести, из которого вытекает:

$$(\sigma_r^T)^{-2} = (\sigma_\varphi^T)^{-2} + (1 - 2\nu_{z\varphi}) (\sigma_z^T)^{-2}, \quad (5)$$

где  $\sigma_z^T$ ,  $\sigma_\varphi^T$ ,  $\sigma_r^T$  – пределы текучести соответственно в осевом, окружном и радиальном направлениях. Здесь  $\nu_{z\varphi}$  означает отношение приращений поперечной к продольной пластической деформации при осевом растяжении в момент возникновения текучести. Однако экспериментальное определение этого отношения по испытаниям стандартных образцов дает большой разброс в его значениях, что обусловлено значительной неоднородностью начальной пластической деформации растягиваемых образцов и неустойчивостью процесса ее развития.

Для начально изотропных пластических материалов приемлемым является условие пластичности М.Я. Леонова [5], которое отражает существующую при наступлении текучести в этих материалах зависимость между максимальным ( $\tau_{\max}$ ) и октаэдрическим ( $\tau_0$ ) касательными напряжениями:

$$\tau_{\max} = B - k\tau_0, \quad (6)$$

где  $B$  и  $k$  – постоянные.

По аналогии с этим в [1] считалось, что для ортотропного материала начальное условие текучести в каждой плоскости симметрии можно представить в виде:

$$\tau_{ij} = B_{ij} - k\tau_* \quad (i, j = z, \varphi, r), \quad (7)$$

где  $\tau_{ij}$  – главные касательные напряжения,  $B_{ij}$  и  $k$  – постоянные,  $\tau_*$  – эквивалентное касательное напряжение, зависящее от параметров начальной анизотропии, определяемых по из-

вестным пределам текучести в трех главных направлениях. Здесь снова возникают проблемы в определении предела текучести в радиальном направлении и необходимо использовать ассоциированный закон текучести. Поэтому предложено в качестве критерия текучести использовать зависимость между главными касательными напряжениями и октаэдрическим касательным напряжением  $\tau_{ij} = f(\tau_0)$  ( $i, j = z, \varphi, r$ ).

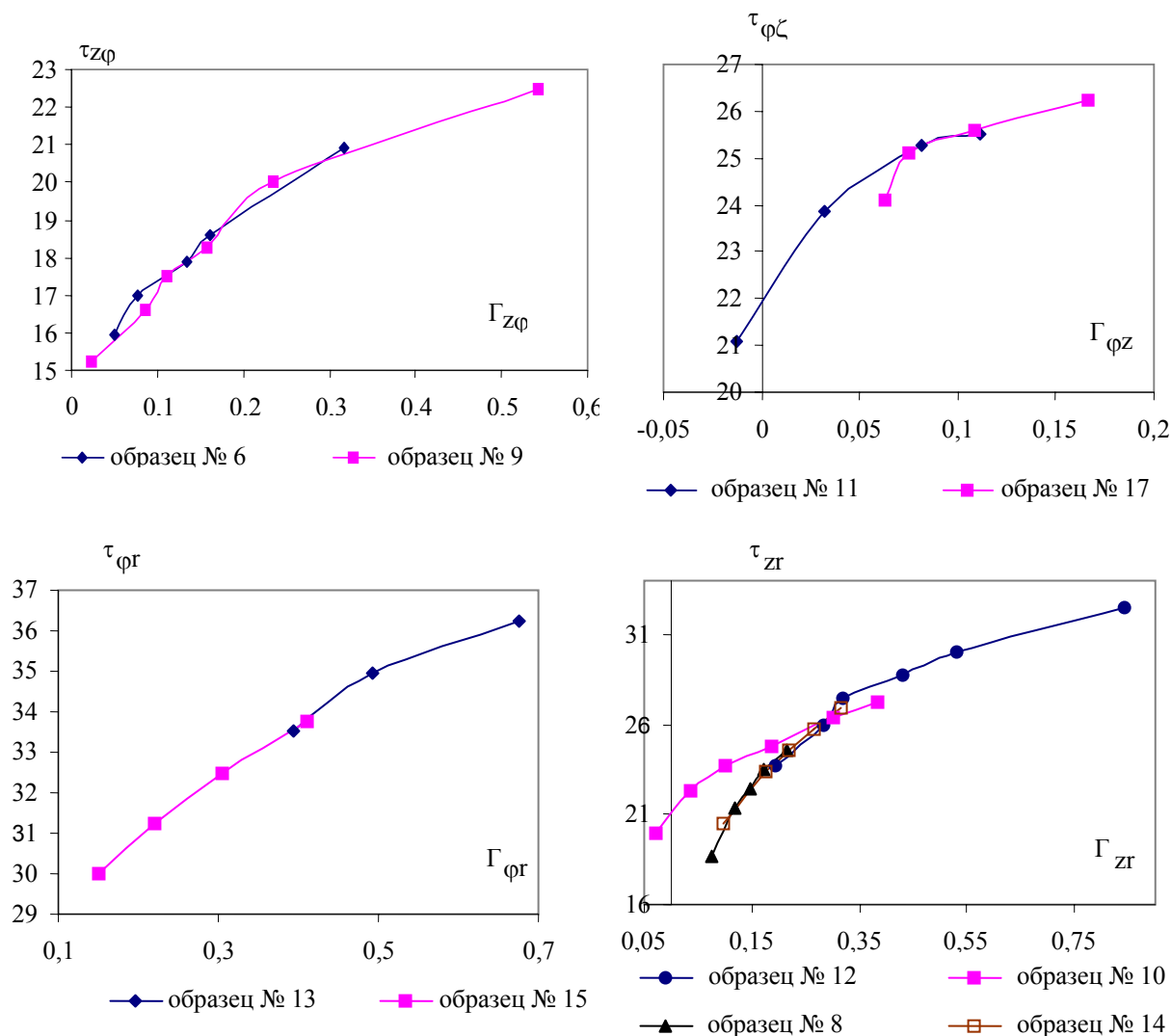


Рис. 2. Зависимости между главными касательными напряжениями и главными пластическими сдвигами.

Для этого исходные диаграммы  $\sigma_z(\varepsilon_z)$ ,  $\sigma_\varphi(\varepsilon_\varphi)$  перестраиваем в координатах  $\tau_{ij}(\Gamma_{ij})$  ( $\Gamma_{ij}$  – главные сдвиги) (см. рис. 2. – для образцов № 6 и № 9 построены зависимости  $\tau_{z\varphi}(\Gamma_{z\varphi})$ , для № 11, 17 –  $\tau_{\varphi z}(\Gamma_{\varphi z})$ , для № 13 и 15 –  $\tau_{\varphi r}(\Gamma_{\varphi r})$ , для № 12, 10, 8, 14 –  $\tau_{zr}(\Gamma_{zr})$ ) и назначаем допуск на наибольшую из этих главных деформаций сдвига.

Это позволяет учитывать пластическую деформацию от взаимодействия двух главных напряжений. При этом, согласно изложенным модельным представлениям, пластическая деформация может возникать не обязательно от скольжений по площадке максимального касательного напряжения, а от скольжений по одной из двух других площадок главных касательных напряжений (в частности, одновременно по двум). Такая же особенность присуща и условию Треска для анизотропных материалов, которое [6] не всегда можно трактовать как условие максимальных касательных напряжений.

Кроме того, при этом нет необходимости доопределять предел текучести, выраженный

через нормальные напряжения, указывая дополнительно площадку, по которой происходит скольжение и вид напряженного состояния, как это предлагалось вначале в [1].

Как известно [7], для уменьшения влияния разброса экспериментальных данных при сравнении диаграмм деформирования при каком-либо виде напряженного состояния используется следующий способ. Диаграммы деформирования конкретных образцов приводятся к номинальной диаграмме путем умножения напряжения на соответствующий поправочный коэффициент при одной и той же величине пластической деформации; иначе говоря, все отдельные диаграммы “стягиваются” к одной (номинальной для данного материала). Этот прием был использован при построении приведенных на рис. 2 диаграмм зависимостей главных касательных напряжений от главных пластических сдвигов. Указанные поправочные коэффициенты (обозначаемые как  $m(\text{№})$ , где № – номер образца) оказались такими:  $m(6) = 0.93$ ,  $m(9) = 1$ ,  $m(12) = 1$ ,  $m(10)=0.85$ ,  $m(11)=1.11$ ,  $m(17)=1$ ,  $m(13)=1.035$ ,  $m(15)=1$ ,  $m(8)=1.07$ ,  $m(14)=1.17$ .

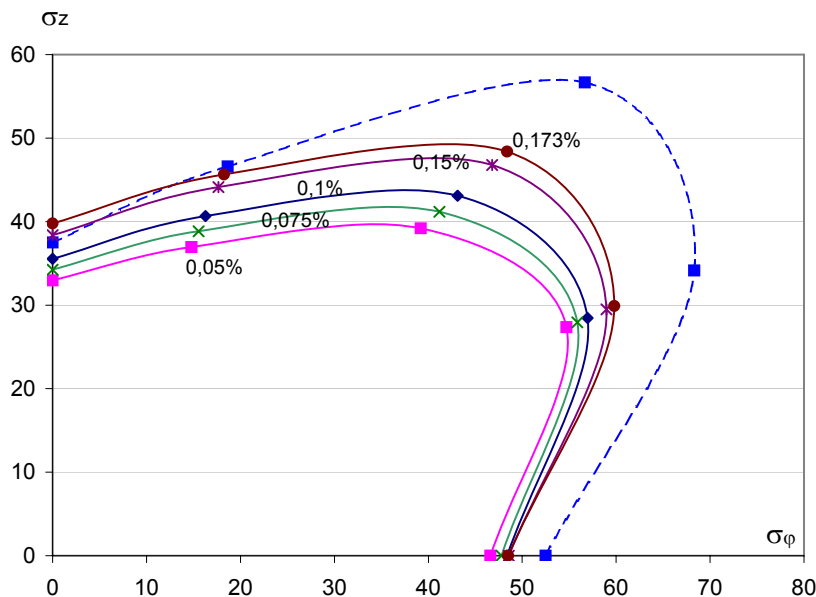


Рис. 3. Поверхности текучести, построенные по допуску на наибольшую главную деформацию сдвига (пунктирной линией показана кривая текучести, построенная по допуску 0,1% на наибольшую главную деформацию).

Полученные таким образом приведенные диаграммы  $\tau_{ij}(G_{ij})$  были использованы, как отмечено выше, для установления аналитического представления критерия текучести рассматриваемого материала в виде зависимости  $\tau_{ij} = f(\tau_0)$ .

В результате найдено:

$$\begin{aligned} \tau_{zr} &= a_1\tau_0 + b_1 \quad (a_1 = 0.8582, \quad b_1 = 5.4831), \\ \tau_{\varphi r} &= a_2\tau_0 + b_2 \quad (a_2 = 1.223, \quad b_2 = 0.0401), \\ \tau_{z\varphi} &= \tau_{\varphi z} = a_3\tau_0 \quad (a_3 = 1.0607). \end{aligned} \quad (8)$$

Для построения кривой текучести в координатах  $\sigma_z \sim \sigma_\varphi$  зависимости (8) были использованы для возврата к исходным зафиксированным в опыте значениям этих напряжений ( $\sigma_z, \sigma_\varphi$ ), путем очевидной соответствующей операции умножения на коэффициенты  $1/m(N_2)$ .

Анализ кривых текучести, построенных по новому методу, показывает, что предел текучести при равном двухосном нагружении выше, чем при одноосном. Но он ниже предела текучести, найденного по допуску на наибольшую главную деформацию ( $\varepsilon_i, i = z, \varphi, r$ ) (см. рис.3). Это объясняется тем, что в последнем случае не учитывается взаимодействие главных деформаций, т.е. тем самым не отражается последовательность возникновения и развития локальных сдвигов (скольжений).

Таким образом, при формулировке критерия текучести анизотропного материала необ-

ходимо учитывать кинематику начальной пластической деформации, которая, в свою очередь, зависит от параметров упругой анизотропии.

#### Литература

1. Рычков Б.А. Концепция скольжения и механика ортотропного материала //Изв. АН России. МТТ. 1996. №1. – С. 70–79.
2. Mehan R.L. Effect of Combined Stress on Yield and Fracture Behavior of Zircaloy-2 // Journal of Basic Engineering. (TRANS.ASME Ser. D.). – 1961. – XII. – Vol. 83. – №4. – P. 499–512.
3. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука, 1977. – 415 с.
4. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. – М.: Машиностроение, 1975. – 398 с.
5. Леонов М.Я., Нисневич Е.Б., Рычков Б.А. Плоская теория пластичности, основанная на синтезе скольжений // Изв. АН СССР. МТТ. – 1979. – №6. –С. 43–49.
6. Лебедев А.А., Косарчук В.В., Ковальчук Б.И. Исследование скалярных и векторных свойств анизотропных материалов в условиях сложного напряженного состояния. Об условиях текучести анизотропных материалов // Проблемы прочности. – 1982. – №3. – С. 25–31.
7. Budiansky B., Dow N.F., Peters R.W., Shepherd R.P. Experimental studies of polyaxial stress-strain lows of plasticity // Proc. 1-st U.S. Nat. Congr. Appl. Mech. – Chicago, Illinois, 1951. – New York, ASME, 1952. – P. 503 – 512.