УДК 517.968 (575.2) (04)

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ НЕЛОКАЛЬНЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ТИПА АЛЛЕРА

Т.Д. Омуров – докт. физ.-матем. наук, проф.
Т.Ж. Мудунов – преподаватель

The applied problems connected with dynamics of soil moisture and underground waters are reduced to the local or inverse boundary problems for various case studies of the Allera equation.

Прикладные задачи, связанные с динамикой почвенной влаги и грунтовой воды, редуцируются к локальным, нелокальным или обратным граничным задачам для различных частных случаев уравнения типа Аллера [1]:

$$U_y = \frac{\partial}{\partial x}\left(DU_x + AU_{xy}\right) \equiv \frac{\partial}{\partial x}\Pi(x,y)\,, \tag{1}$$

очевидно, если известен

а) поток $\Pi(0,y)=f(y)$ влаги по поверхности x=0 почвы для любого момента времени $y \in [0,T]$, то уравнение (1) представляется в виде [1]:

$$AU_{xy} + DU_x = \frac{\partial}{\partial y}\int_0^x U(\xi,y)d\xi + f(y)\,, \tag{2}$$

где 0<A, D – гладкие функции, (для простоты D=A=const).

Пусть известен

б) глубинный ход влажности в начальный момент

$$u(x,0)=0,\ 0\le x\le h\,;$$

в) распределение влаги на поверхности почвы

$$u_y(0,y)+u(0,y)=(L\tau)(y), \quad y\in[0,T]\,, \tag{3}$$

где
$$(L\tau)(y)=\int_0^y K(y,s)\tau(s)ds + p(y)\tau(y)\,,$$

или же
$$u(0,y)=\int_0^y e^{-(y-s)}(L\tau)(s)ds\,,$$

$$K(y,s)\in C^{0,1}(D_0),\quad K(y,y)\ge d>0,\ p(y)=(T-y)^2,\ \forall y\in[0,T]\,,$$
$$D_0=\{(y,s): 0\le s\le y\le T\},$$

причем $\tau(y)\in C\ [0,T],\ \tau(0)=\tau_0=const, u\ \tau(y)$ – неизвестная функция. При этом задается дополнительная информация о решении при $x=x_0\in(0,h)$ или же $x=h$. Например, в нашем случае пусть при x=h:

$$u_y(h,y)+u(h,y)=\varphi(y)\in C\ [0,T]\,, \tag{4}$$

$\varphi(0)=0$, $\varphi(y)$ – известная функция. Тогда в указанных выше условиях требуется определить: распределение влаги $u(x,y)\in C^{1,1}(D)$ в почвенном слое $0\le x\le h$ для всех времен $y\in[0,T]$ и $\tau(x)\in C\ [0,T],\ D=[0,h]x[0,T]$, т.е. пару функций $(u;\tau)\in\Omega=\left(C^{1,1}(D);C[0,T]\right)$.

Для решения поставленной задачи воспользуемся интегральным преобразованием вида:

$$u(x,y)=\int_0^y e^{-(y-s)}Z(x,s)ds,\ \forall(x,s)ds,\forall(x,y)\in D\,, \tag{5}$$

где $Z(x,y)\in C^{1,0}(D)$ – новая искомая функция, удовлетворяющая уравнению

$$Z(x,y)=\varphi(y)-\frac{1}{A}\left\{(HZ)(x,y)\Big|_{x=h}-(HZ)(x,y)\right\}\equiv(Gz)(x,y)\,, \tag{6}$$

$$(HZ)(x,y)\equiv\int_0^x\int_0^y\left(Z(\xi,y)-\int_0^y e^{-(y-s)}Z(\xi,s)ds\right)d\xi\nu\,.$$

Разрешимость исходной задачи относительно u(x,y) зависит от разрешимости (6). Прежде чем исследуем (6), докажем следующую лемму.

Лемма 1. Пусть $Z\in C^{1,0}(D)$, причем

$$\left\|Z_x^{(i)}(x,y)\right\|_C\le r_i=const,\quad\forall(x,t)\in D,(i=0,1)\,. \tag{7}$$

Тогда

$$\left\|u_{xy}^{(i)}(x,y)\right\|_C\le\gamma_i,\quad\forall(x,t)\in D,(i=0,1,2)\,. \tag{8}$$

<u>Доказательство.</u> Из леммы видно, что при $Z\in C^{1,0}(D)$ требуется доказать (8). Принадлежность $Z\in C^{1,0}(D)$ докажем с учетом системы (6) отдельно. Главным условием этой леммы является (8). Так как по условию u(x,y) определяется в виде (5), то

$$\begin{cases} u_x=\int_0^y e^{-(y-s)}Z_x(x,s)ds,\\ u_y=Z(x,y)-\int_0^y e^{-(y-s)}Z(x,s)ds,\\ u_{yx}=Z_x-\int_0^y e^{-(y-s)}Z_x(x,s)ds. \end{cases} \tag{9}$$

Оценивая (5), (4)

$$\left|u(x,y)\right|\le\left(1-e^{-y}\right)\cdot\left\|Z(x,y)\right\|_C\le M_0r_0\,,$$

$$\left|u_x(x,y)\right|\le\left(1-e^{-y}\right)\cdot\left\|Z_x(x,y)\right\|_C\le M_0r_1\,,$$

$$\left|u_y(x,y)\right|\le\left(1-e^{-y}\right)\cdot\left\|Z(x,y)\right\|_C+\left\|Z(x,y)\right\|_C\le M_1r_0\,,$$

$$\left|u_{xy}(x,y)\right|\le\left\|Z_x(x,y)\right\|_C+\left(1-e^{-y}\right)\cdot\left\|Z_x(x,y)\right\|_C\le M_1r_1\,.$$

Поэтому, переходя по норме $C^{1,1}(D)$, получим

$$\left\|u_{xy}^{(i)}(x,y)\right\|_C \le \gamma_i,\ (i=\overline{0,2}),\quad \gamma_0 = M_0 r_0,\ \gamma_1 = \overline{M_1},\ \overline{M}_1 = \max\left(M_0 r_1, M_0 r_1\right),\ \gamma_2 = M_1 r_1,$$

что и требовалось доказать.

Далее, чтобы использовать лемму 1, должны выяснить условия разрешимости (6) в $C^{1,0}(D)$. С этой целью покажем, что Z(x,t) ограничено в смысле $C^{1,0}(D)$.

Оценим (6)

$$\left\|Z(x,y)\right\|_C \le \frac{1}{A}h^2\left(2-\mathrm{e}^{-y}\right)\frac{1}{2}\left\|Z(x,y)\right\|_C + T_0, \tag{10}$$

где
$$T_0 = \sup_{[0,T]}\left|f(y)\right|.$$

Если
$$q = \frac{1}{2A}h^2\left(2-e^{-y}\right) < 1, \tag{11}$$

то
$$\left\|z(x,y)\right\|_C \le (1-q)^{-1}T_0 = \gamma_0, \tag{12}$$

а это всегда возможно, так как 0<A=const можем выбрать в виде

$$A \ge h^2. \tag{13}$$

В самом деле, из (11) имеем

$$q = \frac{1}{2A}h^2\left(2-e^{-y}\right) \le \frac{1}{2h^2}h^2\left(2-e^{-y}\right) = \frac{1}{2}\left(2-e^{-y}\right) < 1,$$

так как $2-e^{-y} < 2,\quad y \in [0,T]$.

Также имеем

$$\left\|Z_x(x,y)\right\|_C \le h\left(2-e^{-y}\right)\left\|Z(x,y)\right\|_C \le T_1 \cdot (1-q)^{-1}T_0 = \gamma_1,$$

$$T_1 = h\left(2-e^{-y}\right), \tag{14}$$

т.е. $Z_x^{(i)}(x,y)$ равномерно ограничено на [0,T], (i=0,1). С другой стороны, q является коэффициентом Липшица оператора G, а это означает, что G – сжимающий оператор. Кроме того, $GS_r \subseteq S_r$, где

$$S_r = \left\{Z \in C^{1,0}(D) : |Z| \le \gamma_0 = const,\ \forall (x,t) \in D\right\},$$

когда

$$\left\|GO\right\|_C = \left\|\varphi(y)\right\|_C \le (1-q)\gamma_0. \tag{15}$$

Действительно

$$\left\|GZ\right\|_C = \left\|GZ - GO\right\|_C + \left\|GO\right\|_C \le q\left\|Z\right\|_C + (1-q)\gamma_0 = q,$$

т.е. $GS_r \subseteq S_r$. Поэтому на основе теоремы Банаха [1] существует единственное решение (6).

Лемма 2. Если $A \ge h^2$, то система (6) разрешима в $C^{1,0}(D)$.

В самом деле, когда выполняется (13), то имеет место (11) и $GS_r \subseteq S_r$ с учетом (15). Тогда на основе теоремы Банаха получим доказательство леммы 2.

Теорема 1. В условиях лемм (2), (1) существует единственная функция

$$u(x,t) \in C^{1,1}(D).$$

Далее, учитывая (2) и (6), получим [3]:

$$p(y)\tau(y) + \int_0^y K(y,s)\tau(s)ds = (GZ)(0,y) \equiv F(y), \tag{16}$$

$$F(0) = 0,\quad F(y) \in C[0,T] \tag{17}$$

имеет место условие (в).

Заметим, что функция F(y), входящяя в уравнение (16) определяется единственным образом на [0,T] с условием (17), так как $z(x,y)\in C^{1,0}(D)$ единственна на D. Следовательно, можем доказать, что и функция $\tau(y)\in C[0,T]$ единственна и регуляризуема в этом же классе функций.

Воспользуемся условием (в). Тогда (16) эквивалентным образом представляется в виде:

$$p(y)V'(y)+K_0(y)V(y)=F(y)+\int_0^y K_s(y,s)V(s)ds\,, \tag{18}$$

$$\int_0^y \tau(s)ds=V(y),\quad V(0)=0\,, \tag{19}$$

$$K_0(y)\equiv K(y,y)\geq\alpha>0\,.$$

Искомая функция $\tau(y)\in C[0,T]$ и существует в этой области. Поэтому для системы (18), (19) введем регуляризирующую задачу вида:

$$\begin{cases}(\varepsilon+p(y))V'_\varepsilon(y)+K_0(y)V_\varepsilon(y)=F(y)+\int_0^y K_s(y,s)V_\varepsilon(s)ds, & (20)\\ V_\varepsilon(0)=0, & \\ \delta\tau_\delta(y)+\int_0^y \tau_\delta(s)ds=V_\varepsilon(y)+\delta\tau(0), & (21)\end{cases}$$

где $\delta,\varepsilon\in(0,1)$ – малые параметры.

Учитывая

$$\begin{cases}V'_\varepsilon(y)+\dfrac{1}{\varepsilon+p(y)}K_0(y)V_\varepsilon(y)=f_0(y),\\ V_\varepsilon(0)=0,\end{cases} \tag{22}$$

$W(y,s,\varepsilon)\equiv e^{-\int_s^y\frac{K_0(\nu)d\nu}{\varepsilon+p(\nu)}},\ \left|W(y,0,\varepsilon)\right|\leq e^{-\int_0^y\frac{\alpha}{\varepsilon+p(s)}ds}$ (22) преобразуется к виду

$$V_\varepsilon(y)=\int_0^y W(y,s,\varepsilon)\frac{1}{\varepsilon+p(s)}\left\{F(s)+\int_0^s K(s,\nu,V_\varepsilon(\nu))d\nu\right\}ds\,. \tag{23}$$

Чтобы решить (22), (21), вначале исследуем (21). Для этого оценим (21):

$$\left|V_\varepsilon(y)\right|\leq\frac{1}{\alpha}\left(1-e^{-\int_0^y\frac{\alpha}{\varepsilon+p(s)}ds}\right)\left\{M_0+M_1\int_0^y\left|V_\varepsilon(s)\right|ds\right\},$$

или

$$\left\|V_\varepsilon(y)\right\|_C\leq\frac{1}{\alpha}M_0e^{Q_0T},\quad\forall y\in[0,T]\,, \tag{24}$$

где $M_0=\sup\limits_{[0,T]}\left|F(y)\right|,\quad M_1=\sup\limits_{D_0}\left|K_s^{(i)}(y,s)\right|,\quad(i=0,1),\quad Q_0=\dfrac{1}{\alpha}M_1\,.$

Далее, с учетом

$$V_\varepsilon(y)=V(y)+\xi_\varepsilon(y),\quad y\in[0,T]\,, \tag{25}$$

из (23) получим

$$\xi_\varepsilon(y)=\int_0^y W(y,s,\varepsilon)\frac{1}{\varepsilon+p(s)}\left\{\int_0^s K_\nu(s,\nu)V_\varepsilon(\nu)d\nu-\varepsilon V'(s)\right\}ds\ . \tag{26}$$

Утверждение 1. При указанных условиях (26) однозначно разрешимо в $C\,[0,T]$, причем $\xi_\varepsilon \underset{\varepsilon\to 0}{\to} 0,\quad \forall y\in[0,T]$.

<u>Доказательство.</u> В самом деле, из (26) получим

$$\left|\xi_\varepsilon(y)\right|\le\frac{1}{\alpha}\left(1-e^{-\int_0^y\frac{ds}{\varepsilon+p(s)}}\right)M_1\int_0^y\left|\xi_\varepsilon(\nu)\right|d\nu+\left|\Psi(y,\varepsilon)\right|, \tag{27}$$

где

$$\left|\Psi(y,\varepsilon)\right|\equiv\left|\varepsilon\int_0^y W(y,s,\varepsilon)\frac{1}{\varepsilon+p(s)}V'(s)ds\right|\le\varepsilon\frac{1}{\alpha}\left(1-e^{-\int_0^y\frac{ds}{\varepsilon+p(s)}}\right)r\le\varepsilon\frac{1}{\alpha}r\ ,$$

$$\forall y\in[0,T]\,,$$

$$\Pi_r=\left\{V(y):\left|V^{(i)}(y)\right|\le r,(i=0,1),V(y)=\int_0^y\tau(s)ds,V'(y)=\tau(y)\right\},$$

$$r_0=\frac{1}{\alpha}r\ .$$

Поэтому из (27) с учетом неравенства Гронуолла-Беллмана получим

$$\left|\xi_\varepsilon(y)\right|\le\varepsilon r_0 e^{Q_0T}\underset{\varepsilon\to 0}{\to}0,\quad\forall y\in[0,T]\,. \tag{28}$$

Единственность доказывается методом от противного (это очевидно). Утверждение доказано.

Следствие 1. В условиях утверждения 1 имеет место

$$\left\|V_\varepsilon(y)-V(y)\right\|_C\le\varepsilon r_0e^{Q_0T}\ . \tag{29}$$

Действительно, учитывая (25), (28), получим (29):

$$V_\varepsilon(y)\underset{\varepsilon\to 0}{\to}V(y),\quad y\in[0,T]\,.$$

Теорема 2. Если имеют место условия теоремы 1, следствие 1, то

$$\left\|\tau_\varepsilon(y)-\tau(y)\right\|_C\le N_0(\delta,\varepsilon)\,. \tag{30}$$

<u>Доказательство.</u> Пусть $R(y,s,\delta)$ – резольвента ядра $\left(-\frac{1}{\delta}\right)$:

$$R\left(y,s,\delta\right)=-\frac{1}{\delta}e^{-\frac{1}{\delta}(y-s)},\quad\left(s\le y\right).$$

Тогда (21) приводится к виду:

$$M_\delta(y)=-\frac{1}{\delta}\int_0^y e^{-\frac{1}{\delta}(y-s)}\frac{1}{\delta}\left(V_\varepsilon(s)-V(s)\right)ds+\frac{1}{\delta}\left(V_\varepsilon(y)-V(y)\right)+\Delta(\delta,\tau)\,, \tag{31}$$

где

$$\Delta(\delta,\tau)=e^{-\frac{1}{\delta}y}\left(\tau(y)-\tau(0)\right)-\frac{1}{\delta}\int_0^y e^{-\frac{1}{\delta}(y-s)}\left(\tau(s)-\tau(y)\right)dy\,,$$

$$\tau_\delta(y)=\tau(y)+\mu_\delta(y)\,,\quad y\in[0,T]\,,$$

причем

$$\left\|\Delta(\delta,\tau)\right\| \le 4\|\tau\|_C e^{-\frac{1}{\delta^{1-\beta}}} + \omega_{\varepsilon}\left(\delta^{\beta}\right),$$

$$0<\beta<1, \quad \omega_\tau(\delta^\beta) = \sup_{|y-s|\le\delta^\beta}\left|\tau(y)-\tau(s)\right|.$$

Следовательно, оценивая (31), имеем

$$\left\|\mu_\delta(y)\right\|_C \le \frac{1}{\delta}2\varepsilon e^{Q_0T} + \left\|\Delta(\delta,\tau)\right\|_C \equiv N_0(\delta,\varepsilon) \underset{\substack{\delta\to 0\\ \varepsilon\to 0}}{\to} 0, \ \forall y\in[0,T], \tag{32}$$

если $\dfrac{\varepsilon}{\delta_\varepsilon}\to 0.$ $\left(\varepsilon\to 0,\delta\to 0\right)$. Теорема доказана, так как

$$\tau_\delta(y) \underset{\delta\to 0}{\to} \tau(y), \ \forall y\in[0,T].$$

Теорема 3. При условиях теоремы 2 функция u(0,y) устойчива относительно $\tau(y)\in C\ [0,T]$.

Действительно, учитывая

$$u_\delta(0,y) = \int_0^y e^{-(y-s)}\left(L\tau_\delta\right)(s)ds,$$

и (13), получим

$$\left|u_\delta(0,y)-u(0,y)\right| = \left|\int_0^y e^{-(y-s)}\left(\left(L\tau_\delta\right)(s)-\left(L\tau\right)(s)\right)ds\right| \le$$

$$\le \left(Q_1+M_1T\right)\left(1-e^{-y}\right)\cdot\left\|\tau_\delta(y)-\tau(y)\right\|_C \le Q_2\cdot N_0\left(\delta,\varepsilon\right), \quad \forall y\in[0,T],$$

где $Q_1 = \sup\limits_{[0,T]}\left|p(y)\right|, \quad Q_2 = \left(Q_1+M_1T\right)\left(1-e^{-T}\right)$, что требовалось доказать.

Литература

1. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1976. – 527 с.
2. *Нахущев А.М., Борисов В.Н.* Краевые задачи для нагруженных параболических уравнений и их приложения к прогнозу уровня грунтовых вод // Дифференц. уравнения. – 1977. – Т.VIII. – №1. – С. 105–110.
3. *Омуров Т.Д.* Методы регуляризации интегральных уравнений Вольтерра первого и третьего рода. – Бишкек: Илим, 2003. – 162 с.