УДК 62- 50: 681.513.5 (575.2) (04)

УПРАВЛЕНИЕ В МАГИСТРАЛЬНОЙ МОДЕЛИ ПОТРЕБЛЕНИЯ С КВАДРАТИЧНЫМ КРИТЕРИЕМ ОПТИМАЛЬНОСТИ

В.Ф. Бабак – докт. техн. наук, проф.
З.К. Иманалиев – канд. техн. наук, доц.
Ж.Т. Баракова – ст. преподаватель

Problems of a control in a main consumption model with quadratic optimal criterion are being considered. The authors propose a program to calculate optimal trajectory of the consumption growth.

Как известно, одной из моделей планирования рыночной экономики, не ограничивающей рост, предложение рабочей силы и ставящих своей целью максимизацию уровня потребления, является магистральная модель потребления.

Рассмотрим магистральную модель потребления, которая представляет собой балансовое соотношение [2,3]:

$$b\frac{dx}{dt} = (1-a)x - \omega, \qquad x \geq 0, \tag{1}$$

$$x(0) = x_0, \tag{2}$$

где $x-$ количество валовой продукции, производимой в единицу времени; $a-$ коэффициент производственных материальных затрат; $b-$ коэффициент приростной фондоемкости.

Процесс распределения валового продукта описывается уравнением (1), а интенсивность валового выпуска в начальный момент времени – равенством (2).

Из условия $b\dfrac{dx}{dt} \geq 0$ вытекает ограничение на величину потребления ω:

$$0 \leq \omega \leq (1-a)x. \tag{3}$$

Чтобы определить наиболее эффективный путь экономического роста, т.е. выбрать из множества допустимых процессов наилучший, требуется задать функционал J, определяющий качество процесса.

Критерий, предусматривающий рост потребления и возможность наращивать определенный экономический потенциал к конечному моменту времени, может быть выражен функционалом:

$$J = \frac{\alpha}{2}\int_0^T e^{-\delta t}\omega^2 dt + \beta x\ (T) \to \min. \tag{4}$$

Здесь функция полезности – квадратическое и подынтегральное выражение $e^{-\delta t}\omega^2 -$ дисконтированное потребление; $\delta-$ норма дисконтирования.

Весовые коэффициенты α, β говорят о приоритете, который имеет каждый из этих слагаемых. Если мы отдаем предпочтение потреблению, то $\alpha > \beta$, а если – накоплению производственного потенциала, то $\alpha < \beta$.

Считав величины b, δ параметрами, перепишем уравнение (1) в следующей форме:

$$\dot{x} = \frac{1-a}{b} x - \frac{1}{b} \omega . \tag{5}$$

Теперь сформулируем следующую задачу.

Задача 1. Найти минимум величины (4) при ограничениях (2), (3), (5).

Если воспользоваться терминологией, введенной в [1], для постановки задачи управления, то соотношение (1) или (5) представляет собой состояние, $\omega -$ управление, $x -$ состояние системы. Затем определим такое управление ω при ограничениях (2), (3), (5). Решению этой задачи должно удовлетворить условие (3). Существование такого решения в данном случае зависит прежде всего от выбора нормы дисконтирования σ и параметра b. Покажем это. Введем функцию Гамильтона:

$$H = e^{-\delta t} \left\{ p \left(\frac{1-a}{b} x - \frac{1}{b} \omega \right) + \frac{\alpha}{2} \omega^2 \right\}. \tag{6}$$

Записываем необходимое условие экстремума [5]:

$$\frac{\partial H}{\partial \omega} = e^{-\delta t} \left(-\frac{p}{b} + \alpha \omega \right) = 0. \tag{7}$$

Отсюда будем иметь:

$$\omega = \frac{p}{\alpha b}. \tag{8}$$

Каноническое уравнение для сопряженной переменной записывается следующим образом:

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-\delta t} p(t) \right) = -\frac{\partial H}{\partial x}. \tag{9}$$

Отсюда следует, что

$$\dot{p} = -\left(\frac{1-a}{b} - \delta \right) p. \tag{10}$$

С учетом (8) перепишем уравнение (5):

$$\dot{x} = \frac{1-a}{b} x = \frac{1}{b^2 \alpha} p. \tag{11}$$

Будем искать $p(t)$ в виде:

$$p(t) = K(t) x(t) . \tag{12}$$

Тогда выражение (8) записывается в форме:

$$\omega = \frac{1}{\alpha b} K x . \tag{8a}$$

При этом уравнение (11) принимает следующий вид:

$$\dot{x} = \left(\frac{1-a}{b} - \frac{1}{b^2 \alpha} K \right) x . \tag{13}$$

Из условия трансверсальности [5] граничное условие для $p(t)$ определяется соотношением:

$$p(T) = \beta x(T). \tag{14}$$

Из соотношения (12) следует, что

$$p(T) = K(T)x(T). \tag{15}$$

Сравнивая соотношения (14), (15), найдем, что

$$K(T) = \beta. \tag{16}$$

Из уравнений (10) и (13) можно найти дифференциальное уравнение, которому должна удовлетворять функция $K(T)$.

Подставляя в уравнения (11) и (13) выражение (12), получим:

$$\dot{K} = -\frac{2(1-a) - \delta b}{b} \quad K + \frac{1}{b^2\alpha}K^2. \tag{17}$$

Уравнение (17) представляет собой уравнение Бернулли. Вместе с граничным условием (16) оно определяет единственным образом функцию $K(t)$.

Полагая $K(t) \neq 0$ и учитывая соотношения $\frac{1}{K} = V$, $-\frac{1}{K^2}\dot{K} = \left(\frac{1}{K}\right)' = \dot{V}$, из (17) имеем:

$$\dot{V} = \frac{2(1-a) - \delta b}{b}V - \frac{1}{b^2\alpha}, \quad V(T) = \frac{1}{\beta}. \tag{18}$$

Это уравнение линейное, и решая его, получим уравнение Бернулли:

$$K(t) = \frac{\beta b\alpha(2(1-a) - b\delta)}{e^{(2(1-a)-b\delta)\left(\frac{t-\mathrm{T}}{b}\right)}\left(b\alpha(2(1-a) - b\delta) - \beta\right) + \beta}. \tag{19}$$

Следует заметить, что решение линейного уравнения (18) будет устойчивым, если выполняется следующее условие:

$$\frac{2(1-a)}{b} - \delta > 0 \text{ при } t < T$$

$$\text{или } \delta < \frac{2(1-a)}{b}. \tag{20}$$

С учетом (19), (12) из (8) имеем:

$$W(t) = \frac{\beta(2(1-a) - b\delta)x(t)}{e^{(2(1-a)-b\delta)\left(\frac{t-T}{b}\right)}\left(b\alpha(2(1-a) - b\delta) - \beta\right) + \beta}. \tag{21}$$

Полученное искомое решение должно удовлетворить ограничение (3).

Легко заметить, что в данном случае параметр b нельзя считать малым, так как при стремлении его к нулю условие (3) не выполняется. Из сравнения (21) и (3) будем иметь неравенство:

$$\frac{\beta(2(1-a) - b\delta)}{e^{(2(1-a)-b\delta)\left(\frac{t-T}{b}\right)}(b\alpha(2(1-a) - b\delta) - \beta) + \beta} \leq 1 - a. \tag{22}$$

Если параметр b нельзя стремить к нулю, то потребуем, чтобы $T \to \infty$. Тогда из (22) $T \to \infty$ получим:

$$\frac{1-a}{b} \leq \delta. \tag{23}$$

Объединяя (20) и (23), имеем интервал изменения значений параметра δ:

$$\frac{1-a}{b} \leq \delta < \frac{2(1-a)}{b} \tag{24}$$

или
$$1 \le \frac{\delta b}{1-a} < 2. \tag{25}$$

При $t = T$ имеем еще одно условие:
$$\frac{\beta}{b\alpha} \le 1 - a. \tag{26}$$

Для того чтобы имело место неравенство (22) потребуем неотрицательность коэффициента, стоящую перед экспоненциальной функцией в (22). Коэффициент определяется выражением $b\alpha(2(1-a) - b\delta) - \beta$. Тогда должно быть
$$b\alpha(2(1-a) - b\delta) - \beta \ge 0. \tag{27}$$

Отсюда получаем следующее неравенство:
$$\frac{\beta}{b\alpha} \le (1-a)\left(2 - \frac{b\delta}{1-a}\right). \tag{28}$$

Следует заметить, что при $\dfrac{b\delta}{1-a} = 1$ из (28) вытекает условие (26).

В результате приходим к следующему выводу: уравнение, полученное в виде (21), для любых значений параметров b, δ, удовлетворяющих неравенствам (25) и (28), является оптимальным.

Итак, мы указали те условия, при выполнении которых существует решение данной задачи. Фазовое переменное $x(t)$ с учетом (21) определяется соотношением:
$$x(t) = e^{\frac{1-a}{b}t} \cdot \frac{(1-a)\left(2 - \frac{b\delta}{1-a}\right) - \frac{\beta}{b\alpha}\left(e^{\frac{1-a}{b}\left(2-\frac{b\delta}{1-a}\right)(T-t)} - 1\right)}{(1-a)\left(2 - \frac{b\delta}{1-a}\right) - \frac{\beta}{b\alpha}\left(e^{\frac{1-a}{b}\left(2-\frac{b\delta}{1-a}\right)T} - 1\right)} x_0$$

На рис.1 показана структура оптимальной системы $\dot{x}(t) = \dfrac{1-a}{b}x(t) - \dfrac{1}{b}\omega(t)$.

"Коэффициент условия" $K(t)$ получается путем моделирования уравнения (18) (рис. 2–5).

Далее составлена программа (на Delphi) для вычисления оптимальной траектории роста путем решения магистральной модели потребления при следующих условиях: период равен 5 годам $(T = 5)$, число отраслей – трем $(L = 3)$. В качестве исходных использованы приведенные в работе [4].

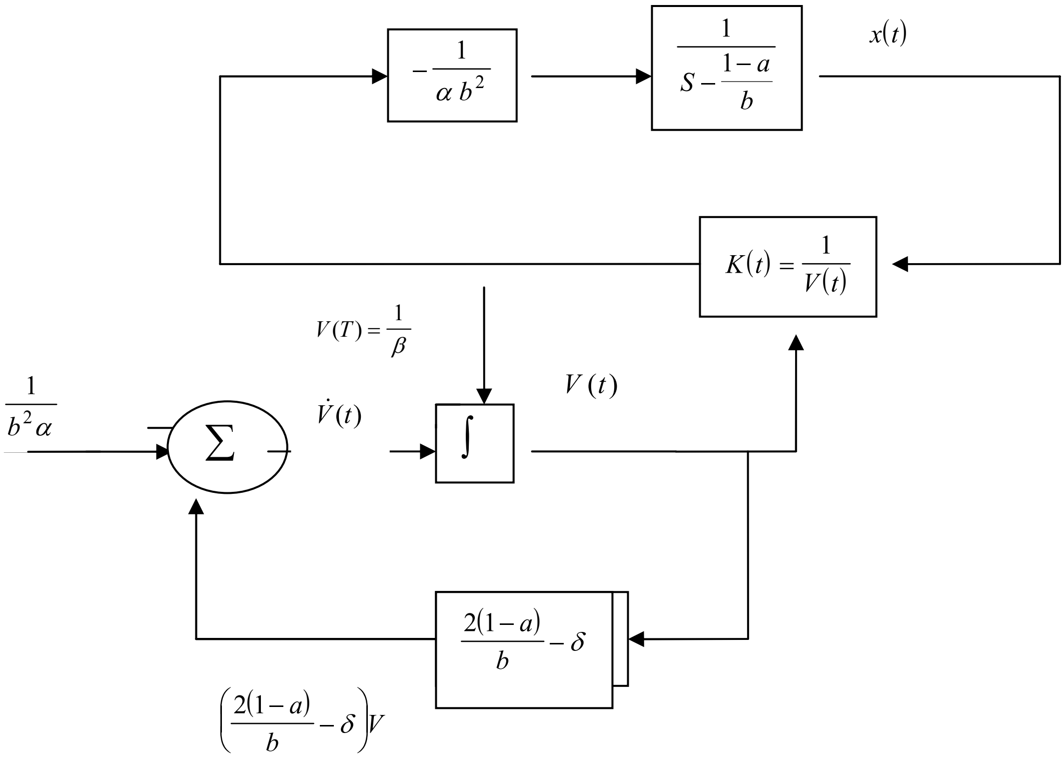

Рис. 1. Оптимальный регулятор системы.

```
{  - - - - - Итеративный  процесс - - - - -}
1180:  IT:=IT+1;
      Z:=0; FOR I:=1 TO M DO   Z:=Z+B[I,0]*C[ST,V[I]];
      FOR J:=1 TO M DO  begin  P1:=0;
                          FOR I:=1 TO M DO  P1:=P1+C[ST,V[I]]*B[I,J];
                          B[0,J]:=P1;
                      end;
                      writeln(w,'it=',it:6,'    pl=',pl:8:4);
                 writeln(w,'z=',z:6:4,'   pl=',pl);
      FOR J:=1 TO NN DO
                if C[0,J]<>1 THEN begin  PA:=0;
                                  FOR I:=1 TO M DO PA:=PA+A[I,J]*B[0,I];
                                      SP[J]:=PA-C[ST,J];
                                end;
```

```
      MAX:=-EL;  K1:=0;
      FOR J:=1 TO NN DO begin IF C[0,J]<>1 THEN  S:=SP[J];
                   IF MAX<S THEN begin MAX:=S;  K1:=J; end;
                        end;
      IF (ST=2) AND (MAX<=EP) THEN goto 1840;
      IF (ST=1) AND (MAX<=EP) AND (Z>EP) THEN
                                   begin writeln(g, 'допустимого  решения  нет');
                                          goto 5000;
                                   END;
      IF (ST=1) AND (MAX<=EP) THEN begin ST:=2; NN:=N+M; GOTO 1180;end;
      FOR I:=1 TO M DO begin XXN:=0;
                             FOR J:=1 TO M DO XXN:=XXN+B[I,J]*A[J,K1];
                             XN[I]:=XXN;
                       end;
      MIN:=EL; K2:=0;
      for i :=1 to m do
      begin  s:=xn[i];
                   if s>ep then  xx:=b[i,0]/s;
                         if min>=xx then
                               if (min=xx) and (v[i]>v[k2]) then goto 1700;
                                  end;
                        for  j:= 0 to m do if xn[k2]<>0 then
                                                   b[k2,j]:=b[k2,j]/xn[k2];
                         writeln(w,'___________________');
      FOR I:=1 TO M DO   IF I<>K2 THEN
                                FOR J:=0 TO M DO B[I,J]:=B[I,J]-B[K2,J]*XN[I];
      C[0,V[K2]]:=0; C[0,K1]:=1;   V[K2]:=K1 ;
      GOTO 1180;
1840: writeln(w,'результаты');
      J:=1;
      while j<=n do begin i:=1; while i<=m do
                                begin if v[i] = j then
                                          begin  y:=b[i,0]; goto 1900; end;
                                    i:= i+1;
                                end;
                           y:= 0;
                      1900: d[j] :=y;
                        j:=j+1;
                    end;
       for j:=1 to n do writeln(w,'d(',j,')=',d[j]:6:4,'  ');
       close(w);
5000: end;
```

```
for i:=1 to h do  for j:=1 to h  do
                             begin  if   i=j   then s:=1 else s:=0;
                                         dd [i,j]:=s-aa[i,j]+ bb[i,j];
                             end;
for k:=1 to h  do   begin   s1:=0; s2:=0;
```

```
                                                  for j:=1 to h do
                                                     begin    a[k,j]:=bb [k,j];
                                                           s1:=s1+dd[k,j]*x[j,0];
                                                           a [t*h+k,(t-1)*h+j]:=dd[k,j];
                                                           s2:=s2+bb [k,j]*x[j,t+1];
                                                      end;
                                                   a[k,t*h+1]:=cc[k];  a[k,0]:=s1;
                                                        a[t*h+k,t*h+t+1]:=-cc[k];
                                                       a[t*h+k,0]:=s2;
                                              end;
  for i:=2 to t  do
     for k:=1 to h  do
       begin  for j:=1 to h  do
                begin a[(i-1)*h+k, (i-2)*h+j]:=-dd[k,j];
                      a[(i-1)*h+k,(i-1)*h+j]:= bb[k,j];
                end;
         a[(i-1)*h+k,t*h+i]:=cc[k];
       end;
 for i:=1 to t  do
    begin for j:=1 to h do   a[(t+1)*h+i,(i-1)*h+j]:=ll[j];
                             a[(t+1)*h+i,0]:=l0*exp(i*ln(abs(1+g)));
    end;
 for i:=1 to t+1 do c[2,h*t+i]:=-exp((1+r)*ln(abs(1.01-i)));
{************** вызов  подпрограммы   **************}
{ st:=1:m1=t*h:m2=h:m3=t:nn=1}
LP2(a,b,c,t*h,h,t,l,d,z,it);
      writeln(f,'3)  Темпы  роста   (%)'); writeln(f,'  ');
      FOR I:=1 TO T DO
             begin write(f,i:2);
               FOR  J:=1 TO H+1 DO IF X[J,I-1]=0 THEN write(f,'*****')
                     else write(f,(X[J,I]/X[J,I-1]-1)*100:8:2,'  ');
                     write((X[0,I]/X[0,I-1]-1)*100:7:2);
                     write(f,'  ',(X[0,I]/X[0,I-1]-1)*100:7:2);
                     writeln(f,'  ');
             end;
              writeln;
      writeln('MAX  =',z:9:3);  writeln;
      write('  число  итераций=',it:3);
      close(f);end.
```

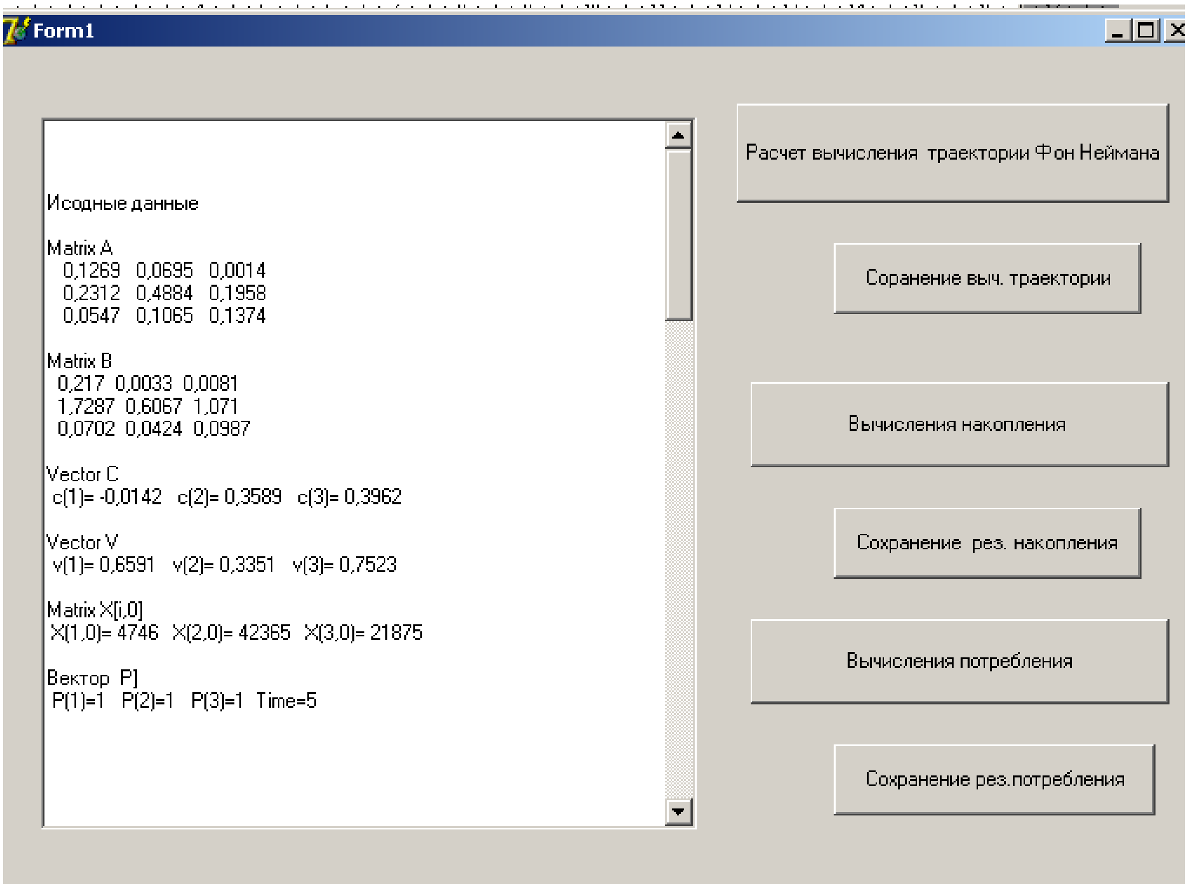

Рис.2. Окно проектирования программы.

-------- Данные ---------

ВРЕМЕННОЙ СРОК = 5

ТЕМПЫ РОСТА ЗАТРАТ ТРУДА = 6 %

НАЧАЛЬНЫЕ ЗАТРАТЫ ТРУДА = 4787

КОЭФФИЦИЕНТ = 6 %

```
Matrix A
  0,1269  0,0695  0,0014
  0,2312  0,4884  0,1958
  0,0547  0,1065  0,1374

Matrix B
 0,217  0,0033  0,0081
 1,7287  0,6067  1,071
 0,0702  0,0424  0,0987

Vector C
 c(1)= -0,0142   c(2)= 0,3589   c(3)= 0,3962
Vector V
 v(1)= 0,6591   v(2)= 0,3351   v(3)= 0,7523

   0,1269      0,0695 |     0,0014
   0,2312      0,4884       0,1958
   0,0547      0,1065       0,1374
Matrix AA
   0,1269      0,0695       0,0014
   0,2312      0,4884       0,1958
   0,0547      0,1065       0,1374

Matrix B
 1,51685624768691    0,475654346116819    0,367520494984283
 5,69735821653362    6,94349981943605    5,63539508398651
 3,2633093939081    3,20894935030978    4,36540090056891
------------------------------------
 c(1)= -0,0142   c(2)= 0,3589   c(3)= 0,3962
  v(1)= 0,6591    v(2)= 0,3351    v(3)= 0,7523
max temp increase of Neiman=17,30013
```

Рис. 3. Результаты вычисления траектории Фон Неймана

```
------------------------------------
  Volume of production
year  x1        x2        x3          x
0   |     4746,00  | |    42365,00  | |     21875,00  | 68986,00
1   |     3508,86  | |    49387,52  | |     23786,82  | 76683,20
2   |     3884,88  | |    54693,12  | |     26342,21  | 84920,21
3   |     4297,32  | |    60575,05  | |     29175,34  | 94047,71
4   |     4731,08  | |    67125,54  | |     32332,20  | 104188,83
5   |     5078,47  | |    74553,62  | |     35962,40  | 115594,49
------------------------------------
2.  part of production   %

0 |      6,8797       61,4110       31,7093
1 |      4,5758       64,4046       31,0196
2 |      4,5747       64,4053       31,0200
3 |      4,5693       64,4089       31,0218
4 |      4,5409       64,4268       31,0323
5 |      4,3934       64,4958       31,1108

------------------------------------
3.  step of increase production   %
1 | -26,07   16,58   8,74       11,16
2 | 10,72   10,74   10,74       10,74
3 | 10,62   10,75   10,76       10,75
4 | 10,09   10,81   10,82       10,78
5 | 7,34   11,07   11,23       10,95

------------------------------------

max=213911,65
number of  iteration=56
```

Рис. 4. Результаты вычисления "накопления".

```
------------------------------------
  Volume of production
year  x1        x2        x3          c        x
0    |4746,00| |42365,00| |21875,00| |25667,61|  68986,00
1    |3481,95| |49582,81| |23430,80| |26419,36|  76495,56
2    |3571,52| |52695,33| |28223,55| |34072,51|  84490,41
3    |3785,82| |55857,05| |29916,96| |36116,86|  89559,83
4    |4012,98| |59208,49| |31711,94| |38283,82|  94933,41
5    |4253,80| |62761,49| |33614,34| |40580,10|  100629,63
------------------------------------
2.  part of production   %

0 | 6,88  61,41  31,71
1 | 4,55  64,82  30,63
2 | 4,23  62,37  33,40
3 | 4,23  62,37  33,40
4 | 4,23  62,37  33,40
5 | 4,23  62,37  33,40

------------------------------------
3.  step of increase production   %
1 | -26,63    17,04    7,11    2,93    10,89
2 | 2,57    6,28    20,45    28,97    10,45
3 | 6,00    6,00    6,00    6,00    6,00
4 | 6,00    6,00    6,00    6,00    6,00
5 | 6,00    6,00    6,00    6,00    6,00

------------------------------------

max=171888,54
number of  iteration=33
```

Рис. 5. Результаты вычисления "потребления".

Литература

1. *Иманалиев З.К., Аширбаев Б.Ы., Баракова Ж.Т.* Об одном способе построения решения сингулярно возмущенной задачи оптимального управления с квадратичным функционалом // Исслед. по интегро-дифф. уравнениям. – Бишкек: Илим, 2001. – Вып.30. – С. 261–265.
2. Основы теории оптимального управления / Под ред. В.Ф. Кротова и др. – М.: Высшая школа, 1990.
3. *Интрилигатор М.* Математические методы оптимизации и экономическая теория. – М.: Прогресс, 1975.
4. *Кубонива М.* Математическая экономика на персональном компьютере. – М.: Финансы и статистика, 1991.
5. *Понтрягин Л.С. и др.* Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1969.