УДК 530.1 (575.2) (04)

СТОХАСТИЗАЦИЯ В СТАЦИОНАРНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ РАЗРЯДАХ

О.А. Синкевич – докт. физ.-мат. наук, проф.
Московский энергетический институт (технический университет)

A system of equations for trajectories of lines of stationary electric current can be presented in the Hamilton form. Real physical reasons for stationary electric discharges stochastic behavior are described.

Введение. Широкое использование стационарных электрических разрядов в научных исследованиях и технике показывает, что линии электрического тока (электрического поля) в разрядах часто имеют достаточно сложную топологию. Она может не воспроизводится от эксперимента к эксперименту даже при соблюдении одинаковых внешних и граничных условий. Считают, что наблюдаемая в экспериментах неповторяемость структуры электрических разрядов связана как с неточностью измерений, так и наличием в разряде неконтролируемых примесей. Газовый разряд представляет собой традиционный, давно сложившийся раздел физики, поэтому отсутствие воспроизводимости стационарных структур электрических разрядов воспринимается как второстепенное явление, обусловленное лишь плохой чистотой эксперимента. Уже первые исследования по управляемому термоядерному синтезу заставили усомниться в такой точке зрения на газовый разряд и по-иному взглянуть на многие явления в нем. Теперь, спустя почти полвека, многое из того, что казалось случайным, отражает некоторые фундаментальные физические явления, учитывая которые только и можно дать качественное и количественное объяснение наблюдаемым экспериментальным фактам. Среди таких явлений в разрядах отметим лишь механизм стохастизации магнитных поверхностей в системах с магнитным удержанием плазмы [1]. Однако и в стационарных электрических разрядах, в которых собственное магнитное поле не играет такой существенной роли, могут происходить процессы с "запутыванием" силовых линий электрического поля – трубок электрического тока.

Ниже показано, что существуют весьма реальные физические причины для стохастизации линий электрического тока (электрического поля). Кратко обсуждаются условия возникновения стохастизации, в режимах развития винтовой неустойчивости электрической дуги во внешнем стационарном магнитном поле, которые позволяют получить критерий перехода к глобальной стохастизации в такой системе. Отмеченные здесь процессы могут проявляться и при численных расчетах распределений электрического тока в электродных системах.

Система уравнений для линий электрического тока как гамильтонова система. В стационарном случае в покоящейся плазме задача о распределении электрического тока j и электрического поля E сводится к решению системы уравнений Максвелла

$$\nabla \times E = 0, \qquad (1)$$

$$\nabla \cdot j = 0. \qquad (2)$$

с заданной законом Ома связью между плотностью электрического тока и напряженностью электрического поля

$$j = \sigma E. \qquad (3)$$

Система уравнений (1–3) должна решаться в некоторой области G с заданными условиями на границах этой области ∂G. В простейшем случае таким граничным условием является задание электрического потенциала на электродах и равенство нулю нормальной составляющей электрического тока на непроводящих поверхностях области. В общем случае коэффициент электропроводности $\sigma(j)$ есть функция от j или E, поскольку зависит от локального состава и температуры плазмы, которые, в свою очередь, определяются протекающим электрическим током (джоулевым нагревом плазмы).

Известно, что задача о нахождении линий электрического тока $j = (j_1, j_2, j_3)$ в произвольной криволинейной системе координат (x_1, x_2, x_3) сводится к решению следующей системы уравнений:

$$h_1 \cdot dx_1 / j_1(x_1, x_2, x_3) = h_2 \cdot dx_2 / j_2(x_1, x_2, x_3) = \\ = h_3 \cdot dx_3 / j_3(x_1, x_2, x_3). \qquad (4)$$

Здесь j_1, j_2, j_3 – компоненты векторной функции j; h_1, h_2, h_3 – коэффициенты Ламэ.

Покажем, что уравнения (4) с учетом (2) могут быть сведены к уравнениям Гамильтона при выполнении условия

$$\partial\, h_1 h_2 j_3 / \partial x_3 = 0. \qquad (5)$$

Действительно, из уравнений (2) при выполнении условия (5) следует

$$\nabla \cdot j = (1/h_1h_2h_3)(\partial\, h_2h_3 j_1 / \partial x_1 + \\ + \partial\, h_1h_3 j_2 / \partial x_2 + \partial\, h_1h_2 j_3 / \partial x_3) = \\ = (1/h_1h_2h_3)(\partial\, h_2h_3 j_1 / \partial x_1 + \partial\, h_1h_3 j_2 / \partial x_2) = 0.$$

Можно ввести функцию $\Psi(x_1, x_2, x_3)$, такую, что выполняются условия

$$h_2h_3 j_1 = -\,\partial\Psi(x_1, x_2, x_3)/\partial x_2, \quad h_1h_3 j_2 = \\ = \partial\Psi(x_1, x_2, x_3)/\partial x_1, \qquad (6)$$

а с ними и уравнение (2). Перепишем уравнения (4) в форме

$$h_1 h_2 j_3 dx_1 / dx_3 = h_2 h_3 j_1, \; h_1 h_2 j_3 dx_2 / dx_3 = \\ = h_1 h_3 j_2 \qquad (4a)$$

и заменим переменную x_3 на новую переменную t с помощью

$$dx_1 / dt = h_1 h_2 j_3. \qquad (7)$$

Здесь переменные x_1, x_2 связаны с переменной x_3 соотношениями (4а).

Теперь система уравнений (4а) для нахождения линий электрического тока может быть записана в стандартном гамильтоновом формализме

$$\dot{p} = \dot{x}_1 = h_2h_3 j_1 = \\ = -\,\partial\Psi(x_1, x_2, x_3)/\partial x_2 \equiv -\,\partial\Psi/\partial q, \\ \dot{q} = \dot{x}_2 = h_1h_3 j_2 = \\ = \partial\Psi(x_1, x_2, x_3)/\partial x_1 \equiv \partial\Psi/\partial p. \qquad (8)$$

Таким образом, систему уравнений для нахождения линий электрического тока (4а) при выполнении условий (5) можно рассматривать как гамильтонову систему с гамильтонианом $\Psi(x_1, x_2, x_3)$. Если гамильтониан $\Psi(x_1, x_2) = \Psi(q,p)$ известен, то линии тока находятся стандартным образом, с использованием начальных – здесь граничных – условий. Следует отметить и принципиальную особенность – отличие данной задачи от задач движения классических частиц. Если классической механике гамильтониан известен еще до решения задачи от движения частиц, то в рассматриваемой задаче о линиях электрического тока, сам гамильтониан – функция $\Psi(x_1, x_2)$ – находится из решения дифференциальных уравнений в частных производных, получающегося при подстановке $E = j/\sigma$ в уравнение (1). Как отмечалось выше, в общем случае коэффициент электропроводности σ зависит от состава и температуры плазмы, которые в свою очередь могут изменяться с изменением электрического тока из-за джоулева нагрева плазмы и приводить к тому, что $\sigma(j)$ является функцией от j или E. Зависимость $\sigma(j)$ может приводить к целому ряду специфических явлений [2], не связанных со стохастичностью, например, к изменению типа исходной системы дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих структуру электрического разряда – переход от эллиптической к гиперболической, и наоборот. В этом случае при решении задачи необходимо еще находить границу смены типов уравнений. В простейшем случае возникает эллиптическое уравнение, решение которого и является гамильтонианом для задачи о линиях электрического тока. Видно, что малые изменения граничных условий (например, образование электродных пятен или пленок) или коэффициента электропроводности может приводить к возмущению гамильтониана и, следовательно, топологии линий электрического тока.

Условие возникновения стохастичности в винтовой форме электрической дуги во внешнем продольном магнитном поле. Для того чтобы продемонстрировать возможность возникновения стохастичности даже в простейших режимах горения разряда, ограничимся случаем σ = const. В качестве конкретного примера, демонстрирующего возникновение стохастичности линий электрического тока в разряде, рассматривается задача о винтовой (токово-конвективной) неустойчивости электрической дуги во внешнем продольном магнитном поле [2, 3]. Экспериментальные данные показывают, что при превышении внешним магнитным полем критического значения стабилизированная стенками электрическая дуга теряет цилиндрическую симметрию и линии электрического принимают винтовую форму [2]. В этих и других аналогичных экспериментах было замечено, что по мере удаления от катода регулярная винтовая структура нарушается – винт становится многозаходным. В работе [3] была построена нелинейная теория возникновения винтовой неустойчивости электрической дуги в магнитном поле, которая позволяет получить соотношения между параметрами установившейся винтовой формы электрической дуги. Однако развитая нелинейная теория не может объяснить эффект нарушения регулярной винтовой структуры, что, по нашему мнению, может быть связано с обсуждавшимися выше механизмами стохастичности дугового разряда. Используя полученные в работе [3] результаты, можно получить уравнения для возмущенных линий электрического тока и, соответственно, гамильтониану соответствующей системы. Винтовая форма электрической дуги характеризуется радиусом дуги R, плотностью электрического тока j_{z0} в дуге, расстоянием между электродами L и числом витков на внешней поверхности α.

Возмущения винтовой формы могут быть вызваны изменением процессов на электродах, отличием проводимости плазмы от постоянной величины или процессами теплообмена на боковых стенках канала, стабилизирующего электрическую дугу. Условие возникновения стохастичности в исходной гамильтоновой системе для винтовой формы электрической дуги можно получить, используя известный критерий перекрытия резонансов [4]. В результате удается получить соотношение, связывающее радиус разрядной камеры, расстояние между электродами, числом витков на внешней поверхности винтовой электрической дуги и плотность электрического тока $\Delta(j_{z0},\alpha,L, R) = 0$. Эта зависимость между параметрами винтовой электрической дуги позволяет выделить области стохастических и регулярных режимов существования винтовой электрической дуги.

Заключение. Показано, что наблюдаемая в стационарных электрических разрядах нерегулярная картина линий электрического тока может быть связана с их естественной стохастизацией. Очевидно, что данный тип стохастизации может проявиться в более общих случаях, когда задачу о нахождении линий электрического тока не удается свести к задаче для гамильтоновой системы. Естественно, что в более общих случаях критерии возникновения глобальной стохастичности будут отличаться от приведенных выше.

Автор выражает благодарность Д.А. Тараскину за обсуждение полученных результатов.

Литература

1. *White R.* The Theiry of Toroidally Confined Plasmas. Second Ed. – London: Imperial College Press, 2001. – 367 p.
2. *Артемов В.И., Левитан Ю.С., Синкевич О.А.* Неустойчивости и турбулентность в низкотемпературной плазме. – М.: Изд-во Московск. энергет. ин-та, 1994. – 402 с.
3. *Синкевич О.А.* Нелинейная теория винтовой неустойчивости электрической дуги во внешнем магнитном поле // Докл. АН СССР. – 1985. – Т. 280. – № 1. – С. 95–99.
4. *Заславский Г.М.* Стохастичность динамических систем. – М.: Наука, 1984. – 271 с.