УДК 517.977.1/5.(575.2)(04)

ПРИНЦИП МАКСИМУМА ПОНТРЯГИНА В ЗАДАЧЕ ОПТИМИЗАЦИИ ПРОЦЕССА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ПРИ ВНУТРЕННЕМ УПРАВЛЯЮЩЕМ ВОЗДЕЙСТВИИ

Л.Г. Лелевкина – канд. физ.-мат. наук, доц.
М.М. Шогин – соискатель

A problem of inductive heating optimization of a steel rod, which length is much more than radius of cross-section is considered. The authors give their recommendations on choice of parameters for minimizing functional and regulating convergence rate of an iterative process.

§1. Постановка задачи оптимизации в цилиндрической области

Рассмотрим процесс теплопроводности, описываемый в цилиндрической системе координат уравнением [1].

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{a}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + p(t)q(t) + f(t,r), \quad 0 < t < T, \ 0 < r < R \tag{1.1}$$

с начальными и граничными условиями

$$u(0,r) = u_0(r) \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial u(t,0)}{\partial r} = 0 \qquad \frac{\partial u(t,R)}{\partial r} = [T_R - u(t,R)], \tag{1.3}$$

где $u(t,r)$ – распределение температуры в момент времени $t \in (0,T)$ в точке r, a – коэффициент диффузии, T_R – температура внешней среды, h – коэффициент теплообмена, $p(t) \in H(T,0)$ – управляющий параметр, характеризующий удельную мощность нагрева, входящий в правую часть уравнения, $u_0(r)$ – распределение температуры в начальный момент времени $t = 0$.

Требуется найти допустимое управление $p^0(t)$ и соответствующее ему решение $U^0(t,r)$ задачи (1.1) – (1.3), такие чтобы функционал

$$I(p) = \gamma_1\int_0^T\int_0^R [u(t,r) - g(t,r)]^2 rdrdt + \gamma_2\int_0^R [u(T,r) - \varphi(r)]^2 rdr + \beta\int_0^T p^2(t)dt \tag{1.4}$$

$\beta = const > 0,$

принимал наименьшее возможное значение при p = $p^0(t)$, u = $u^0(t,r)$.

§2. Построение оптимального управления

Пусть $\left\{\bar{u}(t,r), \bar{p}(t)\right\}$ – произвольные функции, удовлетворяющие уравнениям (1.1) – (1.3), но вообще говоря, не являющиеся решением задачи оптимального управления. Очевидно, что функции Δu, Δp являются решением задачи :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Delta u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 \Delta u}{\partial r^2} + \dfrac{a}{r}\dfrac{\partial \Delta u}{\partial r} + \Delta p(t) q(r), \\ \qquad \Delta u(0,r) = 0 \\ \dfrac{\partial \Delta u(t,0)}{\partial r} = 0 \quad \dfrac{\partial \Delta u(t,R)}{\partial r} + hu(t,R) = 0 \end{cases} \qquad (2.1)$$

Согласно методике [1], строим вспомогательный функционал вида:

$$I_1 = I + \int_t^T \int_0^R \left\{ u_t - au_{rr} - \frac{a}{r} u_r + p(t) q(r)) \right\} \Phi(t,r) r dr dt \qquad (2.2)$$

Находя его приращение с учетом условий

$$\Phi_t(t,r) + a\Phi_{rr}(t,r) + \frac{a}{r}\Phi_r(t,r) - 2\gamma_1(u(t,r) - g(t,r)) = 0\,, \qquad (2.3)$$

$$\Phi(\mathrm{T},\mathrm{r}) + 2\gamma_2[u(T,r) - \varphi(r)] = 0\,, \qquad (2.4)$$

$$\Phi_r(t,0) = 0;\ \Phi_r(t,R) + h\Phi(t,R) = 0\,, \qquad (2.5)$$

будем иметь

$$\Delta I_1(p) = -\int_0^T\int_0^R r\Phi(t,R)\Delta p(t) q(r) dr dt + \gamma_1 \int_0^T\int_0^R r[\Delta u(t,r)]^2 dr dt + \gamma_2 \int_0^R \Delta u^2(T,r) r dr + \\ + 2\beta \int_0^T p(t)\Delta p(t) dt + \beta \int_0^T [\Delta p(t)]^2 dt \qquad (2.6)$$

Краевая задача (2.3) – (2.5) является краевой задачей, сопряженной к основной задаче.

В соответствии с методом Понтрягина построим функцию:

$$\Pi(t,r,u,p) = \int_0^R r\Phi(t,r) p(t) q(r) dr - \beta p^2(t)\,. \qquad (2.7)$$

Тогда приращение функционала примет вид:

$$\Delta I_2(p) = -\int_0^T \Delta\Pi(t,r,u,p) dr dt + \gamma_1 \int_0^T\int_0^R r[\Delta u(t,r)]^2 dr dt + \gamma_2 \int_0^R \Delta u^2(T,r) r dr \ge 0\,, \qquad (2.8)$$

из которого следует, что (2.8) выполняется лишь тогда, когда $\Delta\Pi(t,r,u,p) \le 0$, следовательно, функционал $I_2(p)$ будет достигать своего минимума, тогда и только тогда, когда функция $\Pi(t,r,u,p)$ достигает своего максимума.

Тогда из (2.7) получим следующую структуру оптимального управления:

$$p^0(t) = \frac{1}{2\beta}\int_0^R r\Phi(t,r) q(r) dr$$

§3. Построение итерационного процесса

Итерационный процесс на каждом шаге "k" состоит из последовательного решения при $k = 1,2,...$ следующих задач:

$$\frac{\partial u^{(k)}(t,r)}{\partial t}=a\frac{\partial^2 u^{(k)}(t,r)}{\partial r^2}+\frac{a}{r}\frac{\partial u^{(k)}(r,t)}{\partial r}+p^{(k-1)}(t)q(r)+f(t,r)\,,\ 0<t<T\,,\quad 0<r<1 \tag{3.1}$$

$$u^{(k)}(0,r)=u_0(r)\quad 0<r<1 \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial u^{(k)}(t,0)}{\partial r}=0\,,\quad \frac{\partial u^{(k)}(t,R)}{\partial r}=h[T_R-u^{(k)}(t,R)] \tag{3.3}$$

для сопряженной системы

$$\frac{\partial \Phi^{(k)}(t,r)}{\partial t}=-a\frac{\partial^2 \Phi^{(k)}(t,r)}{\partial r^2}-\frac{a}{r}\frac{\partial \Phi^{(k)}(t,r)}{\partial r}+2\gamma_1[u^{(k)}(t,r)-g(t,r)]=0 \tag{3.4}$$

$$\Phi^{(k)}(\mathrm{T,r})=2\gamma_2[\varphi(r)-u^{(k)}(T,r)]\qquad 0<r<1 \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial \Phi^{(k)}(t,o)}{\partial r}=0,\qquad \frac{\partial \Phi^{(k)}(t,R)}{\partial r}+h\Phi^{(k)}(t,R)=0 \tag{3.6}$$

и для управления $$p^k(t)=\frac{1}{2\beta}\int_0^R r\Phi^k(t,r)q(r)dr \tag{3.7}$$

§4. Численная реализация принципа максимума Понтрягина

При помощи метода баланса напишем разностную схему А.А.Самарского, аппроксимирующую задачу (1.1) – (1.3). На промежутке [0,T] рассмотрим равномерную сетку с шагом τ и узлами $t_n=\tau n$, $n=0,1,...,M$. При фиксированном “n” проинтегрируем уравнение (1.1) по отрезку $\left[t_{n-1},t_n\right]$ и результат разделим на τ, затем воспользуемся представлением

$$\frac{1}{\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}u(t,r)dt=\theta u(t_n,r)+(1-\theta)u(t_{n-1},r)+\tau\left(\theta-\frac{1}{2}\right)\frac{\partial u}{\partial t}(t_{n-1},r)+\tau^2R_n\,, \tag{4.1}$$

Используем (4.1) для аппроксимации интегралов в полученном интегро-дифференциальном соотношении. Введем следующие обозначения:

$$w(r)=\theta u^n(r)+(1-\theta)u^{n-1}(r), \tag{4.2}$$

тогда

$$\begin{aligned}u(t_n,r)-u(t_{n-1},r)&=\frac{a}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\tau\frac{\partial[\theta u(t_n,r)+(1-\theta)u(t_{n-1},r)]}{\partial r}\right)-\\&-q(r)[\theta_1 p(t_n,r)+(1-\theta_1)p(t_{n-1},r)]\tau+\tau[\theta f(t_n,r)+(1-\theta)f(t_{n-1},r)]\end{aligned} \tag{4.3}$$

преобразовывая (1.1), получим:

$$\frac{a}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w(r)}{\partial r}\right)-\frac{w(r)}{\tau\theta}-q(r)p(t_{n-1},r)+[\theta f(t_n,r)+(1-\theta)f(t_{n-1},r)]+\frac{u(t_{n-1},r)}{\theta\tau}=0$$

и введем следующие обозначения:

$$\alpha=\frac{1}{\tau\theta},\qquad g(r)=-\frac{u(t_{n-1},r)}{\tau\theta}-[\theta f(t_n,r)+(1-\theta)f(t_{n-1},r)]+q(r)p(t_{n-1}),$$

после чего на каждом временном слое t_n для определения функции u(x) получаем краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения с особенностью:

$$\frac{a}{r}(rw')'-\alpha w=g(r),\ \mathrm{r}\in(0,\mathrm{R}), \tag{4.4}$$

$$w'(0)=0,\ h\mathrm{w(R)}+\mathrm{w}'(\mathrm{R})=\frac{h}{\tau}T_R. \tag{4.5}$$

Составим уравнение баланса для уравнения (4.4):

$$a[y_{i+1/2}-y_{i-1/2}]-\int_{r_{i-1/2}}^{r_{i+1/2}}\alpha w(t,r)rdr=\int_{r_{i-1/2}}^{r_{i+1/2}}rg(r)dr, \qquad (4.6)$$

где $y=r\dfrac{dw}{dr}$; $r_i=ih,\ i=0,1,...,N-1,\ r_{i\pm 1/2}=r_i\pm 0.5h.$

В результате аппроксимации получим следующую разностную краевую задачу:

$$\begin{cases}-(\dfrac{4a}{h^2}+\alpha)w_0^h+\dfrac{4a}{h^2}w_1^h=g_0,\\ \dfrac{a(r_i-0.5h)}{r_ih^2}w_{i-1}^h-\left[\dfrac{2a}{h^2}+\alpha\right]w_i^h+\dfrac{a(r_i+0.5h)}{r_ih^2}w_{i+1}^h=\varphi_i,\\ -\dfrac{1}{h}w_{N-1}^h+(s+\dfrac{1}{h})w_N^h=sT_R.\end{cases} \qquad (4.7)$$

Краевая задача (4.7) решается методом прогонки.

После чего решение задачи (1.1) – (1.3) в момент времени t_n находится по формуле:

$$u_i^n=\frac{1}{\theta}w_i^h-\left(\frac{1}{\theta}-1\right)u_{i-1}^n,\ i=0,1,..,N-1. \qquad (4.8)$$

Аппроксимация сопряженной задачи проводится аналогично.

Управление будем аппроксимировать, используя формулу трапеций.

$$p(t)=\frac{1}{2\beta}\frac{h}{2}\sum_{i=1}^{N-1}\{r_iq(r_i)\Phi^n(t,r_i)+r_{i+1}q(r_{i+1})\Phi^n(t,r_{i+1})\} \qquad (4.9)$$

Численные эксперименты

В качестве модельной рассмотрена задача о трансформации гармоники ряда Фурье под воздействием диффузионного механизма. В задаче полагаем q(r)=1.

$$f(t,r)=\left[\left(a(\pi n)^2-\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\right)\cos(\pi nr)+a(\pi n)^2\frac{\sin(\pi nr)}{\pi nr}-\frac{\gamma_2}{\alpha}\right]\exp(-\frac{\gamma_1}{\gamma_2}t)$$

$$u_0(r)=\cos(\pi nr),\ g(t,r)=\left[1+\cos(\pi nr)\right]\exp(-\frac{\gamma_1}{\gamma_2}t),\ \varphi(r)=g(T,r)$$

считая параметрами величины: $a\quad n\quad \gamma_1\quad \gamma_2\quad \beta\quad T\quad h$.

В этом случае в качестве решения (1.1) – (1.3) будет $u(t,r)=\cos(\pi nr)\exp(-\dfrac{\gamma_1}{\gamma_2}t)$ решение (2.3) – (2.5), $\Phi(t,r)=2\gamma_2\exp(-\dfrac{\gamma_1}{\gamma_2}t)$ и решение (2.15) $p(t)=\dfrac{\gamma_2R}{\beta}\exp(-\dfrac{\gamma_1}{\gamma_2})$

Интерфейс программы для проведения численных экспериментов имеет вид (рис.1).

Проводя численные эксперименты при различных численных значениях параметра *a* и варьировании количества пространственных и временных узлов сетки, проследим результаты предложенных методов. На рис. 2 показано состояние системы при *a* = 0,01 после 2 итерационного шага: погрешность по распределению температуры равна 45%, погрешность по управлению – 11%.

Как видно из рис 3, при том же значении параметра *a* на 7 итерации погрешность по распределению температуры равна 19%, погрешность по управлению – 17%, т.е. она значительно уменьшилась по распределению температуры. Из рис.4 видно, что наилучшее приближение как по распреде-

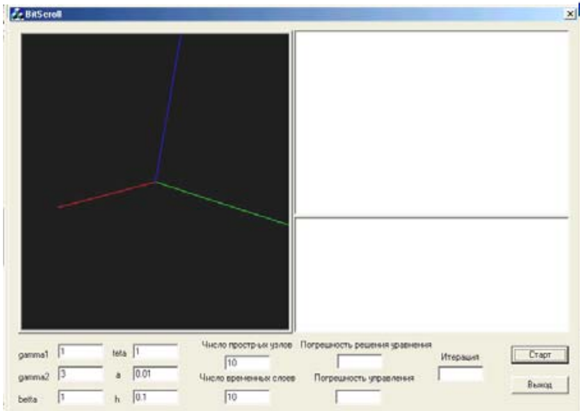

Рис. 1.

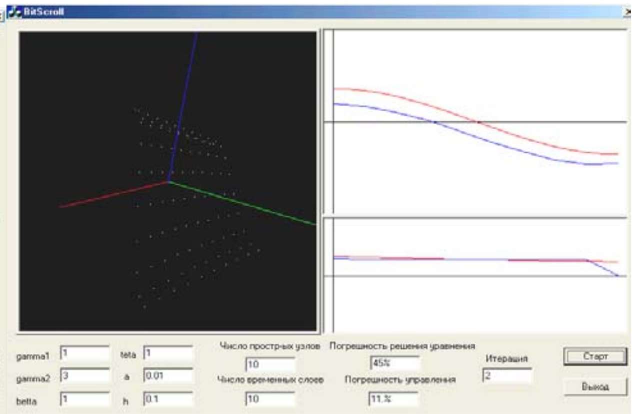

Рис. 2.

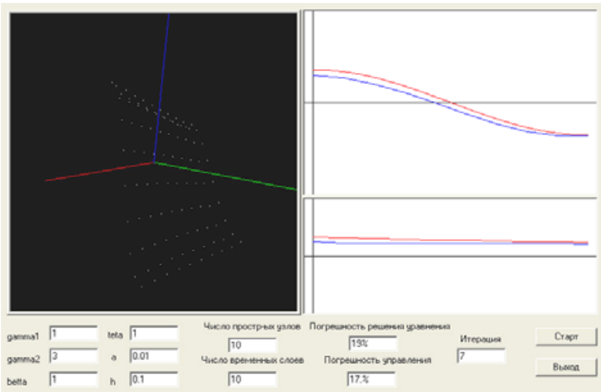

Рис. 3.

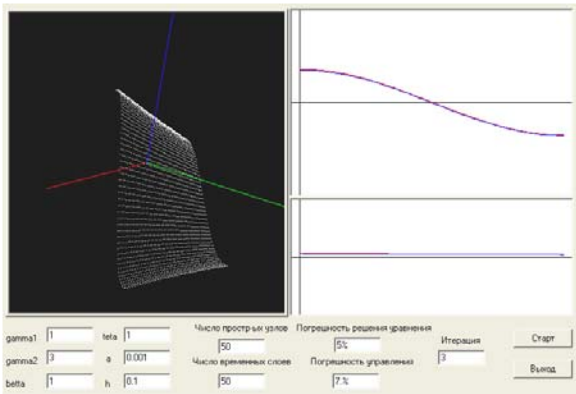

Рис. 4.

лению температуры, равное 5%, так и по управлению, равное 7%, достигается при уменьшении параметра *a* до 0,001 и увеличении количества узлов по пространственной и временной сетке до 50.

На представленных графиках показано, как влияют на скорость сходимости уменьшение численного значения параметра *a* и увеличение числа пространственных и временных узлов. Так, при числе пространственных и временных узлов, равном 50, и при уменьшении значения параметра *a* до 0,001 достаточно хорошее приближение как по функции распределения температуры, так и по управляющему параметру (из рис. 4, получается на 3 итерации), что подтверждает высокую скорость сходимости. Таким образом, численные эксперименты показали, что дальнейшее уменьшение значений параметра *a* является нецелесообразным.

Литература

1. *Егоров А.И.* Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. – М.: Наука, 1978. – 464 с.
2. *Лелевкина Л.Г., Асаналиева Н.Т.* Оптимизация процесса распространения тепла при управляющем воздействии в уравнении параболического типа // Вестн. Кырг.-Росс. Славян. ун-та. – 2003. – Т. 3. – № 2. –С. 41.