

УДК 517.977.1/5.(575.2)(04)

**ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО  
УПРАВЛЕНИЯ ПРОЦЕССОМ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТЕПЛА  
ПРИ ГРАНИЧНОМ УПРАВЛЯЮЩЕМ ВОЗДЕЙСТВИИ**

*Л.Г. Лелевкина* – канд. физ.-мат. наук, доц.

*В.А. Воркунов* – соискатель

In order to solve a problem of optimization with distributed parameters, described by equations of parabolic type, the principle of the Pontryagin maximum is applied. Integral identity, which gives necessary conditions for existence of minimum of the quality functional, is deduced. Numerical solution of model problem is realized.

**§1. Постановка задачи в цилиндрической системе координат**

Пусть управляемый процесс теплопроводности описывается функцией  $u(t, r)$  в цилиндрической системе координат, которая внутри области  $\bar{Q} = \{0 \leq t \leq T, 0 \leq r \leq R\}$  удовлетворяет уравнению [1].

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{a}{r} \frac{\partial u}{\partial r}, \quad 0 < t < T, \quad 0 < r < 1 \tag{1.1}$$

с начальными и граничными условиями

$$u(0, r) = u_0(r) \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial u(t, 0)}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial u(t, R)}{\partial r} = h[T_R + p(t) - u(t, R)] \tag{1.3}$$

Здесь  $u(t, r)$  – распределение температуры в момент времени  $t \in (0, T)$  в точке  $r$  является решением (1.1). Функция  $u(t, r)$  внутри области  $\bar{Q} = \{0 \leq t \leq T, 0 \leq r \leq R\}$  определена и удовлетворяет начальным и граничным условиям (1.2), (1.3),  $a$  – коэффициент диффузии,  $T_R$  – температура внешней среды,  $h$  – коэффициент теплообмена,  $p(t)$  – управляющий параметр, входящий в граничные условия,  $u_0(r)$  – распределение температуры в начальный момент времени  $t = 0$ . Для простоты примем  $R = 1$ .

Задача оптимального управления состоит в том, чтобы найти допустимое управление, которое вместе с соответствующим ему обобщенным решением задачи (1.1) – (1.3) доставляет минимальное значение функционалу [1]

$$I(p) = \gamma_1 \int_0^T \int_0^1 [u(t, r) - g(t, r)]^2 r dr dt + \gamma_2 \int_0^1 [u(T, r) - \varphi(r)]^2 r dr + \beta \int_0^T p^2(t) dt \tag{1.4}$$

Здесь  $\varphi(r)$ ,  $g(t, r)$  – заданные функции. Проводя теоретические выкладки согласно методике [2], получаем сопряженную систему:

$$\Phi_t + a\Phi_{rr} + \frac{a}{r}\Phi_r - 2\gamma_1[u(t,r) - g(t,r)] = 0 \quad (1.5)$$

$$\Phi(T,r) + 2\gamma_2[u(T,r) - \varphi(r)] = 0 \quad (1.6)$$

$$\Phi_r(t,0) = 0; \quad \Phi_r(t,1) + h\Phi(t,1) = 0 \quad (1.7)$$

Из полученных необходимых условий оптимальности следует структура оптимального управления:

$$p^0(t) = \frac{1}{2\beta} ah\Phi(t,1) \quad (1.8)$$

## §2. Численная реализация принципа максимума Понтрягина в цилиндрической системе координат

Пусть  $k = 0, 1, \dots$  – итерационный параметр, начальное приближение  $p^0(t)$  для  $p(t)$  будем считать заданным и согласованным соотношением (1.8). Итерационный процесс строится по методикам [3], [4]. Рассмотрим задачу (1.1) – (1.3), которая решается на первом этапе итерационного процесса.

На промежутке  $[0, T]$  рассмотрим равномерную сетку с шагом  $\tau$  и узлами  $t_n = n\tau$ ,  $n = 1, \dots, M$ . При фиксированном "n" проинтегрируем уравнение (1.1) – (1.3) по отрезку  $[t_{n-1}, t_n]$ . Пользуясь

представлением [4] и оценкой  $|R_n(r)| \leq \max_{0 < t < T} \left| \frac{\partial^2 u(t,r)}{\partial t^2} \right|$ , получим приближенное равенство:

$$\frac{1}{\tau} \int_{t_{n-1}}^{t_n} u(t,r) dt \approx \theta u(t_n, r) + (1 - \theta)u(t_{n-1}, r) \quad (2.1)$$

Вводя обозначения

$$v(r) = \theta u^n(r) + (1 - \theta)u^{n-1}(r), \quad b = \frac{1}{\tau\theta} \quad f(r) = -\frac{u^{n-1}(r)}{\tau\theta}$$

$$\rho = h_0[\theta(T_R + \rho^n) + (1 - \theta)(T_R + \rho^{n-1})],$$

на каждом временном слое  $t_n$  для определения функции  $v(r)$  получаем краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$av''(r) + \frac{a}{r}v'(r) - bv(r) = f(r) \quad (2.2)$$

$$v'(0) = 0; \quad v'(1) + h_0v(1) = \rho \quad (2.3)$$

На отрезке  $[0, 1]$  рассмотрим для простоты равномерную сетку с шагом "h" и узлами  $r_i = h(i-1)$   $i = \overline{1, N}$ . Умножая (2.2) на тестовую функцию  $\omega(r)$ , проводя интегрирования и переходя к разностной схеме, получим:

$$\left\{ \begin{aligned} a \frac{v_2^h - v_1^h}{h} &= \frac{h}{4} [bv_1^h + f_1] \\ \frac{a}{h} \left[ \frac{r_{i+1}}{r_i} k \left( \frac{r_i}{r_{i+1}} \right) \frac{v_{i+1}^h - v_i^h}{h} - k \left( \frac{r_{i-1}}{r_i} \right) \frac{v_i^h - v_{i-1}^h}{h} \right] &= \\ &= \frac{1}{2h} (bv_i^h + f_i) \left( \frac{r_{i+1}}{r_i} k \left( \frac{r_i}{r_{i+1}} \right) r_{i+1/2} - k \left( \frac{r_{i-1}}{r_i} \right) r_{i-1/2} \right) \\ i &= \overline{2, N-1} \\ k \left( \frac{r_{N-1}}{r_N} \right) \frac{v_N^h - v_{N-1}^h}{h} + \frac{1}{2a} (bv_N^h + f_N) \left( -k \left( \frac{r_{N-1}}{r_N} \right) r_{N-1/2} + r_N \right) + h_0 v_N^h &= \rho \end{aligned} \right. \quad (2.5)$$

Решение (2.5) находится с помощью метода прогонки. Решение задачи (1.1) – (1.3) в момент времени  $t_n$  – по формуле

$$u_i^n = \frac{1}{\theta} v_i^h - \left( \frac{1}{\theta} - 1 \right) u_i^{n-1} \quad i = \overline{1, N} \quad (2.6)$$

Аналогично строится схема и для сопряженной задачи.

### §2.3. Численный эксперимент

В качестве модельной рассмотрена задача о трансформации гармоника ряда Фурье под воздействием диффузионного механизма.

$$u_0(r) = \cos(\pi nr), \quad T_R = 0$$

а в сопряженной задаче будем полагать:

$$g(t, r) = [1 + \cos(\pi nr)] \exp\left(-\frac{\gamma_1}{\gamma_2} t\right), \quad \varphi(r) = g(T, r)$$

величины  $n, \gamma_1, \gamma_2, \beta, T$  будем считать параметрами.

В качестве точных решений задач (1.1) – (1.3), получим [5]:

$$u(t, r) = \cos(\pi nr) \exp\left(-\frac{\gamma_1}{\gamma_2} t\right), \quad p(t) = \frac{\gamma_2}{\beta} \exp\left(-\frac{\gamma_1}{\gamma_2} t\right)$$

Критерием сходимости итерационного процесса служит выполнение неравенства:

$$\sum_{n=1}^M (p^{k,n} - p^{k-1,n})^2 < \varepsilon$$

Здесь  $\varepsilon$  задаваемое в программе достаточно малое число, которое гарантирует сходимость процесса.

Проведены многочисленные эксперименты, устанавливающие зависимость скорости сходимости, относительной величины погрешности по распределению температуры и управляющему воздействию от величин параметров  $a, n$  и количества итераций.

Из табл. 1 видно, что при значении параметров  $a = 0,005$  и  $n = 1,8$  итерационный процесс имеет при 36 итерациях относительную погрешность по распределению температуры, равную 48%, а по управляющему воздействию – 56%.

Из табл. 2 видно, что при уменьшении параметров  $n$  до  $n = 1,35$  и уменьшении параметров  $a$  до  $a = 0,0005$  при незначительном увеличении количества итераций достигается относительная погрешность по распределению температуры, равная 11% и по управляющему воздействию, равная 12%. Таким образом, наилучшие результаты достигаются при значениях параметров  $a \leq 0,0005$  и при  $n \leq 1,35$ .

Таблица 1

$\gamma_1$	$\gamma_2$	$a$	$n$	Кол-во итераций	Отн. ошибка $u(t,r)$	Отн. ошибка $p(t)$	Оценка сход. итер. процесса
1	9	0.005	1.8	36	48.1972	56.264	0.00009

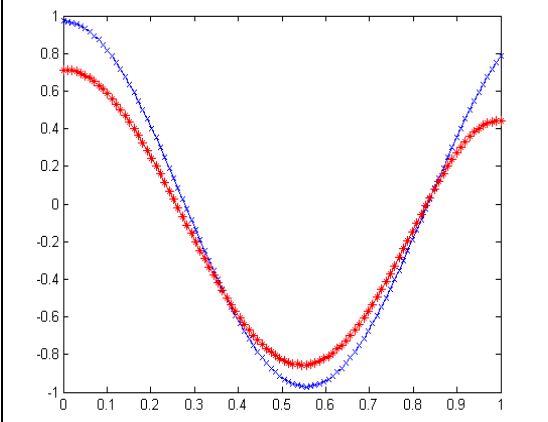
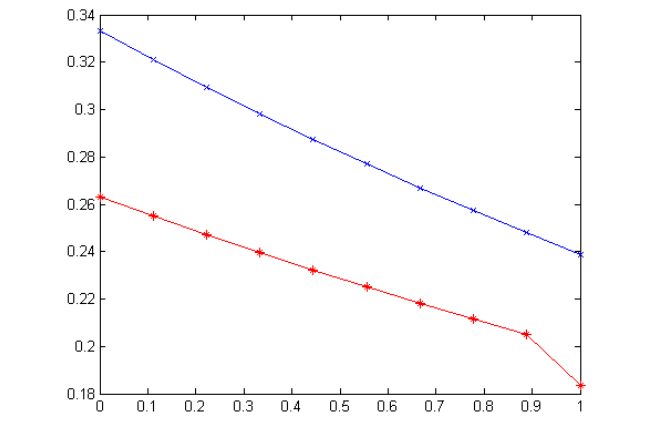
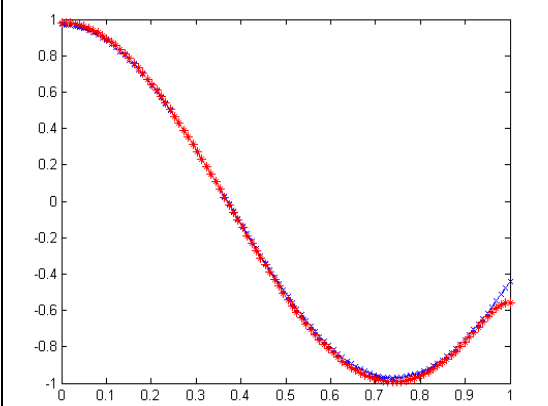
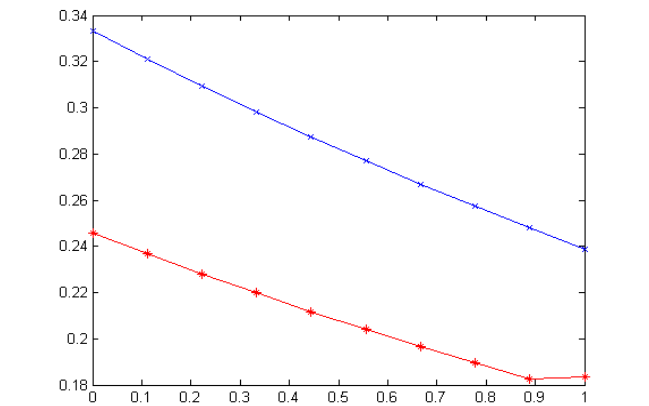



Таблица 2

$\gamma_1$	$\gamma_2$	$a$	$n$	Кол-во итераций	Отн. ошибка $u(t,r)$	Отн. ошибка $p(t)$	Оценка сход. итер. процесса
1	9	0.0005	1.35	45	11.9713	12.482	0.00003

### Литература

1. Егоров А.И. Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. – М.: Наука, 1978. – 464 с.
2. Лелевкина Л.Г., Сатина Н.В. Оптимизация процесса теплопроводности при управляющем воздействии в граничном условии // Вестн. Кырг.-Росс. Славян. ун-та. – 2004. – Т. 4. – № 1. – С. 69.
3. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. – М.: Наука, 1989.
4. Скляр С.Н., Алтынникова Л.А. Разностные схемы для решения нестационарных задач диффузионно-конвективного переноса // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек: Илим, 2001.
5. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1981 – 423 с.