

УДК 517.928 (575.2) (04)

ЗАМЕЧАНИЕ К УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ ОДНОЙ ГОЛОНОМНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

С. Искандаров – докт. физ.-мат. наук

It is proved that criterion of a single holonomic nonstationary mechanical system at negative generalized "stiffness" can be erratic. The author proposes a new criterion of stability.

Критерии устойчивости одной голономной нестационарной механической системы рассмотрены в [1–3]. В настоящей работе доказывается ошибочность критерия Л. Хатвани [3] об устойчивости такой системы в случае, когда обобщенная «жесткость» может быть отрицательной, и предлагается новый критерий устойчивости движения этой системы в указанном случае.

Движение голономной нестационарной механической системы с обобщенной координатой x (одна степень свободы) и кинетической энергией $T = \frac{1}{2} p(t)(x'(t))^2$, которая находится под действием потенциальной силы $F_1 = -q(t)g(x)$ и диссипативной (ускоряющей) силы $F_2 = r(t)x'(t)$, описывается уравнением Лагранжа [3].

$$p(t)x''(t) + [p'(t) - r(t)]x'(t) + q(t)g(x) = 0, \quad t \geq 0. \quad (1)$$

Обозначив $a(t) \equiv \frac{1}{p(t)}[p'(t) - r(t)]$, $b(t) \equiv \frac{q(t)}{p(t)}$, запишем уравнение (1) в виде

$$x''(t) + a(t)x'(t) + b(t)g(x) = 0. \quad (2)$$

Предполагается, что функция $a(t)$ (коэффициент демпфирования) непрерывна, $b(t)$ (обобщенная жесткость) непрерывно дифференцируема,

$$\int_0^x g(\xi) d\xi > 0, \quad \forall x \neq 0, \quad (g)$$

$g(0)=0$ и что решения дифференциального уравнения (2) определены при всех $t \in R_+ = [0, \infty]$.

Ставится задача нахождения условий устойчивости положения равновесия $x = x' = 0$.

Далее в [3] сведением нелинейного дифференциального уравнения второго порядка (2) к системе дифференциальных уравнений и применением метода функций Ляпунова поставленная задача изучается в различных случаях. Рассмотрен случай 3^0 , когда обобщенная «жесткость» $b(t)$ может принимать отрицательные значения, и доказан следующий результат.

КРИТЕРИЙ (Л. Хатвани). Если выполняются условия (g), $g(0)=0$;

$$g'(x) \leq M = \text{const}, \quad \forall x \in R = (-\infty, \infty); \quad (4)$$

$$\int_0^{\infty} [|a(t)| + |b(t)|] dt < \infty; \quad (5)$$

существует непрерывно-дифференцируемая при $t \geq 0$ функция $h(t)$ такая, что $h(t) \geq h_0 > 0$ и

$$\int_0^{\infty} \left[\frac{h'(t)}{h(t)} \right]_+ dt < \infty, \quad \int_0^{\infty} |h(t) - b(t)| e^{2t} dt < \infty, \quad (6)$$

то положение равновесия (3) устойчиво.

Заметим, что устойчивость понимается в смысле Ляпунова; индекс + в первом из условий (6) понимается следующим образом:

$$[a]_+ = \begin{cases} a & \text{при } a \geq 0, \\ a & \text{при } a < 0. \end{cases}$$

Сначала докажем ошибочность этого критерия.

ПРИМЕР 1. Дифференциальное уравнение (кратко ДУ)

$$x'' + \frac{e^{-(t+1)^2}}{(t+1)^2} x' - \frac{e^{-x^2}}{(t+1)^3} x = 0, \quad t \geq 0$$

имеет частное решение $x(t) = t + 1$, неограниченное при $t \in R_+$. Значит, положение равновесия (3) этого уравнения неустойчиво.

Интересно, почему? ДУ (7) удовлетворяет условиям (g), (4) с $M=3$, (5) приведенного критерия Л. Хатвани. Допустим, что существует функция $h(t) \geq h_0 > 0 = \text{const} > 0$, удовлетворяющая условиям (6). Тогда из второго условия (6) вытекает, что

$$\int_0^{\infty} |h(t) - b(t)| dt \leq \int_0^{\infty} |h(t) - b(t)| e^{2t} dt < \infty.$$

Отсюда

$$\int_0^{\infty} h(t) dt < \int_0^{\infty} |b(t)| dt < \infty, \quad \int_0^{\infty} h(t) dt < \infty \quad (7)$$

согласно условию (5). Условие (7) не выполняется, поскольку $h(t) \geq h_0 > 0 = \text{const} > 0$. Значит, не существует непрерывно дифференцируемая при $t \geq 0$ функция $h(t) \geq h_0 > 0$ такая, чтобы выполнялись условия

$$\int_0^{\infty} |b(t)| dt < \infty, \quad \int_0^{\infty} |h(t) - b(t)| e^{2t} dt < \infty.$$

Эти условия противоречат друг другу.

Таким образом, приведенный критерий Л. Хатвани, т.е. результат работ [1, 2] в случае 3⁰ ошибочный.

Ниже предлагается новый критерий устойчивости вместо критерия

Л. Хатвани. Отметим, что, во-первых, мы не требуем выполнения условия (g), во-вторых, вместо условия (4) берем условия Липшица:

$$|g(x)| \leq M|x|, \quad M = \text{const} > 0, \quad \forall x \in R; \quad (8)$$

в-третьих, полностью заменяем и условие (6).

Заметим, что при выполнении условия (4) выполняется условие (8), а наоборот, не всегда. Это показывает, например, функция $g(x) = |x|$. Для этой функции условие (8) выполняется с $M=1$, а условие (4) не выполняется, поскольку не существует производная этой функции при $x = 0$.

Прежде чем привести новый критерий, предлагаемый нами, заметим также, что при выполнении условия (8) нелинейное ДУ (2) имеет единственное решение $x(t) \in C^2(R_+, R)$ с любыми начальными данными $x^{(k)}(t_0)$ ($k = 0, 1$), и хорошо известно, что устойчивость положения равновесия (3) этого ДУ эквивалентно ограниченности всех его решений и их первых производных.

В нашей работе мы применяем метод преобразования уравнений [4] и в случае, когда функция $b(t)$ может принимать отрицательные значения, приводим условия ограниченности на R_+ решений и их первых производных и стремления решений к конечным пределам $t \rightarrow \infty$ для ДУ (2).

Нами предлагается следующий критерий устойчивости ДУ (2).

ТЕОРЕМА. Пусть 1) $g(0)=0$, выполняется условие (8); 2) $a(t) > 0$,

$$\int_0^\infty \frac{|b(t)|^k}{a(t)} dt < \infty \quad (k = 0, 1, 2).$$

Тогда положение равновесия (3) для ДУ (2) устойчиво.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала запишем ДУ (2) в эквивалентном виде:

$$x''(t) + a(t)x'(t) + x(t) + b(t)g(x) - x(t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (9)$$

Далее для произвольно фиксированного решения $x(t)$ ДУ (9) умножаем на $x'(t)$, интегрируем в пределах от 0 до t , в том числе и по частям. Тогда получаем тождество

$$\begin{aligned} (x'(t))^2 + 2 \int_0^t a(s)(x'(s))^2 ds + (x(t))^2 &\equiv c_0 + \\ + 2 \int_0^t [x(s) - b(s)g(x(s))]x'(s) ds, \end{aligned} \quad (10)$$

где $c_0 = (x'(0))^2 + r(0)(x(0))^2$. В силу условия (8) имеем $|g(x)| \leq M|x|$.

Учитывая это и условия $a(t) > 0$, имеем

$$\begin{aligned} 2 \int_0^t [x(s) - b(s)g(x(s))]x'(s) ds &\leq 2 \int_0^t [|x(s)| + |b(s)|M|x(s)|]|x'(s)| ds = \\ = 2 \int_0^t \frac{[1 + M|b(s)|]^2}{\sqrt{a(s)}} |x(s)|\sqrt{a(s)}|x'(s)| ds &\leq \int_0^t \frac{[1 + M|b(s)|]^2}{a(s)} (x(s))^2 ds + \\ + \int_0^t a(s)(x'(s))^2 ds. \end{aligned} \quad (11)$$

В силу (11) из (10) вытекает

$$\begin{aligned} u(t) \equiv (x'(t))^2 + \int_0^t a(s)(x'(s))^2 ds + (x(t))^2 &\leq c_0 + \\ + \int_0^t \frac{[1 + M|b(s)|]^2}{a(s)} u(s) ds. \end{aligned} \quad (12)$$

Применяя к интегральному неравенству (12) лемму Гронуолла-Беллмана и учитывая условия 2), получим

$$(x'(t))^2 + \int_0^t a(s)(x'(s))^2 ds + (x(t))^2 \leq c_1, \quad (13)$$

где $c_1 = c_0 \exp \left(\int_0^t \frac{[1 + M|b(s)|]^2}{a(s)} ds \right) < \infty$.

Из (13) вытекают

$$|x(t)| \leq \sqrt{c_1}, \quad |x'(t)| \leq \sqrt{c_1}, \quad \int_0^t a(s)(x'(s))^2 ds \leq c_1, \quad (14)$$

Первое и второе соотношения из (14) дают утверждение теоремы. Теорема доказана.

Из условия 2) теоремы следует условие $\int_0^\infty \frac{dt}{a(t)} < \infty$.

С учетом этого из теоремы вытекает следующее

СЛЕДСТВИЕ. Если выполняются условия теоремы, то любое решение $x(t)$ стремится к конечному пределу при $t \rightarrow \infty$.

Это следует аналогично следствию 1 [5] из соотношения

$$|x'(t)| = \frac{\sqrt{a(t)}}{\sqrt{a(t)}} |x'(t)| \leq \frac{1}{2} \left[\frac{1}{a(t)} + a(t)(x'(t))^2 \right]$$

интегрированием и с учетом третьего соотношения из (14), а также

$$\int_0^\infty x'(s) ds \leq \int_0^\infty |x'(s)| ds < \infty$$

ПРИМЕР 2. ДУ

$$x''(t) + (t+1)^2 x'(t) - \frac{1}{\sqrt{t+1}} |x| = 0, \quad t \geq 0$$

удовлетворяет всем условиям теоремы и следствия.

ПРИМЕР 3. Для ДУ

$$x''(t) + e^t x' - (t+5)^{10} \frac{|x|}{1+|x|} = 0, \quad t \geq 0$$

выполняются все условия теоремы и следствия.

ПРИМЕР 4. ДУ

$$x''(t) + (t+1)^3 x'(t) - \frac{1}{(\sqrt{t+1})^{20}} \frac{x^2}{x^2+1} = 0, \quad t \geq 0$$

удовлетворяет всем условиям теоремы и следствия.

Литература

1. Хатвани Л. О применении дифференциальных неравенств к теории устойчивости // Вестн. МГУ. Сер. мат., механ. – 1975. – №3. – С. 83–89.
2. Хатвани Л. Некоторые задачи об устойчивости неустановившихся движений: Автореф. дисс... канд. физ.-мат. наук. – М: Изд-во Моск. ун-та, 1975.
3. Румянцев В.В., Озиранер А.С. Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. – М.: Наука, 1987. – 256 с.
4. Искандаров С. Метод весовых и срезающих функций и асимптотические свойства решений интегро-дифференциальных и интегральных уравнений типа Вольтерра. – Бишкек: Илим, 2002. – 216 с.
5. Искандаров С. Об асимптотических свойствах первых производных решений линейных интегро-дифференциальных уравнений второго порядка типа Вольтерра // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Фрунзе: Илим, 1984. – Вып. 17. – С. 161–165.