УДК 539.37, 621.64 (575.2) (04)

ОБРАТНАЯ СУЩЕСТВЕННО ПЕРЕОПРЕДЕЛЕННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ТЕЛ С ТРЕЩИНОЙ

К.А. Герман – канд. физ.-мат. наук
А.А. Шваб – докт. физ.-мат. наук, вед. научн. сотр.
Институт гидродинамики им. Лаврентьева СО РАН, Россия

The much redefined problem of the theory of elasticity, when vector of loading and travels are given simultaneously on a part of a surface, and the connection of this problem with the problem of definition of elastic stationary value of medium are considered in the paper.

Определение. Существенно переопределенными назовем условия, когда на поверхности тела заданы одновременно вектор смещения и вектор нагрузки. В дальнейшем задачу с существенно переопределенными условиями будем называть существенно переопределенной задачей [1].

Для однородной упругой среды очевидно, что существенно переопределенные условия не могут быть произвольными, т.е. вектора u и p – функционально зависимы. Получим необходимые условия согласования и вытекающие из них следствия. Рассмотрим тело объема Ω с поверхностью $\partial\Omega$. Пусть векторы

$$A(\xi)=\iint\limits_{\partial\Omega} a(x)U^0(x,\xi)\,dS\,,\ B(\xi)=\iint\limits_{\partial\Omega} b(x)P^0(x,\xi)\,dS \tag{1}$$

являются потенциалами простого и двойного слоев теории упругости. Здесь $U^0(x,\xi)$ – тензор Кельвина-Сомильяны, $P^0(x,\xi)$ – силовой тензор влияния, $a(x)$ и $b(x)$ – плотности слоев. Полагаем, что $\partial\Omega$, кусочно-гладкая по Ляпунову и $a(x)$ и $b(x)$ удовлетворяют условию Гёльдера. Пусть $u(\xi)=A(\xi)-B(\xi)$. Запишем аналог формулы Сомильяны:

$$\iint\limits_{\partial\Omega}\left[a(x)U^0(x,\xi)-b(x)P^0(x,\xi)\right]dS=\begin{cases}u^+(\xi),\ \xi\in\Omega^+\\ u^-(\xi),\ \xi\in\Omega^-\end{cases}$$

Будем говорить, что плотности $a(x)$ и $b(x)$ согласованы между собой, если вектор $u^+(\xi)\to b(x)$ при $\xi\to x,\ x\in\partial\Omega$. Согласованность плотностей можно трактовать следующим образом. Если на однородное упругое тело действует усилие $p=a|_{\partial\Omega}$, то оно вызовет перемещения $u(x)$, которые на $\partial\Omega$ совпадут с плотностью $b(x)$, а в Ω – с вектором $u^+(\xi)$. В силу единственности решения первой и второй задач теории упругости, по плотности $a(x)$ однозначно восстанавливается согласованная с ней $b(x)$ (с точностью до жёсткого смещения), и обратно по $b(x)$ однозначно определяется $a(x)$. В дальнейшем множество пар (a,b) согласованных плотностей будем обозначать через $H(\partial\Omega)$. Наряду с обозначением пары (a,b) будем использовать эквивалентное обозначение (u,p). Сформулируем следующую теорему.

Теорема 1 (теорема о согласовании плотностей).

Плотности a и b согласованны, т.е. $(a,b) \in H(\partial\Omega)$ $\left[(u,p) \in H(\partial\Omega)\right]$ тогда и только тогда, когда выполнено равенство

$$\Delta(\xi) = 0,\ \xi \in \Omega^-, \tag{2}$$

где

$$\Delta(\xi) = \iint\limits_{\partial\Omega} \left[a(x)U^0(x,\xi) - b(x)P^0(x,\xi)\right] dS. \tag{3}$$

Доказательство. Необходимость, очевидно, следует из формулы Сомильяны при $\xi \in \Omega^-$.

Для доказательства достаточности воспользуемся аналогом формулы Сохоцкого-Полемели:

$$u^+(\xi_e) = A(\xi_0) - B(\xi_0) + 0{,}5b(\xi_0),$$

$$u^-(\xi_l) = A(\xi_0) - B(\xi_0) - 0{,}5b(\xi_0), \tag{4}$$

где $\xi_0 \in \partial\Omega$, ξ_e, ξ_l – внутренняя и внешняя предельные точки к ξ_0. Из (2) следует, что $u_l^-(\xi) = 0$, откуда с учётом (4) получим $u^+(\xi_e) - u^-(\xi_l) = b(\xi_0)$, что и требовалось доказать.

Определим неоднородную среду как среду, содержащую включения, полости и трещины. В дальнейшем с плотностями a и b будем связывать следующие механические характеристики. Так, если нагрузка $P(x)$, приложенная к телу, вызывает смещение $U(x)$ на поверхности последнего, то векторы $a(x)$ и $b(x)$ – суть векторы $P(x)$ и $U(x)$ соответственно. Переопределённость в задании граничных условий объясняется тем, что в теле находятся дефекты (трещины, полости, включения), местоположение и размеры которых неизвестны.

Задание же переопределённых граничных условий позволяет сформулировать задачу об отыскании этих дефектов.

Будем полагать, что $a(x) \neq 0$, $b(x) \neq const$ при $x \in \partial\Omega$. Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 1. Если в теле находится трещина $\Sigma = \Sigma^+ \cup \Sigma^-$ и $(\Sigma^+ \cup \Sigma^-) \cap \partial\Omega = \varnothing$, то $(a,b) \notin H(\partial\Omega)$.

Доказательство. При переходе через Σ^+ и Σ^- вектор смещения терпит разрыв, т.е. $\left[U(x)\right] \neq 0$. По плоскости Σ разобьем область Ω на две подобласти Ω^+ и Ω^-, содержащие соответственно Σ^+ и Σ^-.

В областях Ω_1 и Ω_2 векторы упругих смещений $U^{(1)}$ и $U^{(2)}$ непрерывны. Допустим, что $(a,b) \in H(\partial\Omega)$, тогда в замыкании Ω из формулы Сомильяны находится непрерывное упругое перемещение $U^{(0)}$. На общей части $\partial\Omega$, и $\partial\Omega^+$ имеем $b_0 = U^{(1)} - U^{(0)} = 0$ и $a_0 = P^{(1)} - P^{(0)} = 0$. Тогда, согласно свойств $(a,b) \in H(\partial\Omega)$, должны быть выполнены равенства $U^{(1)}(\xi) - U^{(0)}(\xi) = 0$ $\xi \in \partial\Omega^+$ и $U^{(2)}(\xi) - U^{(0)}(\xi) = 0$ $\xi \in \partial\Omega^-$. Откуда из непрерывности $U^{(0)}(\xi)$ следует, что $\left.U^{(1)} - U^{(0)}\right|_{\Sigma} = 0$. Последнее равенство противоречит исходному предположению. Таким образом, утверждение доказано.

В теории потенциала рассматривается такой вид решения, в котором искомая функция и в произвольной точке x выражается через поверхностные интегралы, куда входят заданные граничные условия.

Отправной точкой наших рассуждений является теорема взаимности Бетти [2]

$$\int_V (X_i u_i' - X_i' u_i) dV + \int_A (p_i u_i' - p_i' u_i) dA = 0 \qquad (5)$$

Пусть искомая функция u_i; удовлетворяет системе уравнений совместности с заданными на A граничными условиями. Функцию u_i' выбираем следующим образом. В точке ξ неограниченой области V_∞ помещаем сосредоточенную силу $X_i' = \delta(x-\xi)\,\delta_{ik}$, направленную параллельно оси x_k. Пусть ξ также принадлежит и подобласти V. Сосредоточенная сила X_i' вызывает поле перемещений $u_i' = U_i^{(k)}(x,\xi)$, которое удовлетворяет уравнению

$$\mu\nabla^2 U_i^{(k)} + (\lambda+\mu) U_{j,ji}^{(k)} + \delta(x-\xi)\,\delta_{ik} = 0 \quad (i,j,k = 1,2,3) \qquad (6)$$

с нулевыми значениями перемещений на бесконечности. Определим соответствующие перемещения $u_i' = U_i^{(k)}(x,\xi)$ напряжения $\sigma_{ij}^{(k)}(x,\xi)$ и с их помощью образуем вектор напряжения

$$p_i^{(k)}(x,\xi) = \mu(U_{i,j}^{(k)} - U_{j,i}^{(k)}) + \lambda n_i U_{j,j}^{(k)} \qquad (7)$$

Подставляя $u_i' = U_i^{(k)}$ и $p_i' = p_i^{(k)}$ в уравнение (5), после некоторых преобразований получим следующее соотношение:

$$u_k(\xi) = \int_A \left[p_i(x) U_i^{(k)}(x,\xi) - p_i^{(k)}(x,\xi) u_i(x)\right] dA(x) + \int_V X_i(x) U_i^{(k)}(x,\xi)\, dV(x) \qquad (8)$$

Отсюда видно, что, зная распределение массовых сил X_i, а также перемещения $u_i(x)$ и нагрузки $p_i(x)$ на A, можно из формулы (8) определить перемещение u_k в точке $\xi \in V$. Если точка ξ лежит вне области V, то и $u_i(x) = 0$, $\xi \in V_\infty - V$.

Уравнение (8) можно переписать в виде:

$$u_i(\xi) = \int_\Gamma \left[p_i(x) u_{ij}(x,\xi) - p_{ij}(x,\xi) u_i(x)\right] d\Gamma(x) + \int_V u_{ij}(x,\xi) b_j(x)\, d\Gamma(x) \qquad (9)$$

Уравнение (9) известно как тождество Сомильяны для перемещений и было получено им как взаимное с сингулярным уравнением Навье:

$$\mu u_{j,kk} + \frac{\mu}{(1-2\nu)} u_{k,kj} + \Delta(\xi,x) e_j = 0, \qquad (10)$$

где $\Delta(\xi,x)$ – дельта-функция Дирака, ξ – особая точка, $x \in \Omega$ – точка пространства.

Дельта-функция Дирака обладает следующими свойствами:

$$\begin{aligned} &\Delta(\xi,x) = 0 \ \text{ при } \ \xi \neq x, \\ &\Delta(\xi,x) = \infty \ \text{ при } \ \xi = x, \\ &\int_\Omega g(x)\Delta(\xi,x)\, d\Omega(x) = g(\xi). \end{aligned} \qquad (11)$$

Решения уравнения (10) называются фундаментальными решениями**.**

Соответствующие выражения для фундаментальных перемещений, двумерных задач в случае плоского деформированного состояния имеют вид

$$u_{ij}(\xi,x) = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)\mu}\left[(3-4\nu)\ln r\,\delta_{ij} - r_{,i} r_{,j}\right] \qquad (12)$$

Для напряжений на границе имеем

$$p_{ij}(\xi,x)=\frac{-1}{4\pi(1-\nu)r}\left\{\left[(1-2\nu)\delta_{ij}-2r_{,i}r_{,j}\right]\frac{\partial x}{\partial n}-(1-2\nu)(r_{,i}n_j-r_{,j}n_i)\right\} \tag{13}$$

Здесь $r=r(\xi,x)$ – расстояние между точкой ξ, к которой прикладывается нагрузка, и некоторой точкой x пространства, производные этой функции берутся по координатам точки x.

Удобно выделить три основных формы разрушений в зависимости от возникающих смещений: раскрытие трещины (нормальный отрыв), скольжение поверхностей трещины одна относительно другой в плоской деформации (поперечный сдвиг), или антиплоское скольжение (продольный (антиплоский) сдвиг)

Далее рассматриваем только случай нормального отрыва. Распределения напряжений σ_{ij} и перемещений u_j общеизвестны [3, 4], их можно представить как некоторые функции: $\sigma_{ij},u_j=K_I f(\theta,r)$, где K_I – коэффициент интенсивности

Перейдем к основной теме данной работы. Для начала проверим выполняется ли теорема о существовании трещины. Хотелось бы увидеть на графике те самые "местные" напряжения или "всплески", возникающие при наличии в теле трещины.

Рассмотрим однородное тело, единичный квадрат. Из уравнения (9) в связи с отсутствием массовых сил получаем:

$$u_i(\xi)=\int_{\Gamma}\left[p_i(x)u_{ij}(x,\xi)-p_{ij}(x,\xi)u_i(x)\right]d\Gamma(x), \tag{14}$$

для которого:

$$u_{ij}(\xi,x)=\frac{-1}{8\pi(1-\nu)\mu}\left[(3-4\nu)\ln r\delta_{ij}-r_{,i}r_{,j}\right],$$

$$p_{ij}(\xi,x)=\frac{-1}{4\pi(1-\nu)r}\left\{\left[(1-2\nu)\delta_{ij}-2r_{,i}r_{,j}\right]\frac{\partial x}{\partial n}-(1-2\nu)(r_{,i}n_j-r_{,j}n_i)\right\},$$

где r – расстояние от неподвижной точки *A* до точки *B*, бегающей по границе квадрата, *u* и *p* – тензоры Сомильяны-Кельвина, принадлежат классу согласованных функций $H(\partial\Omega)$.

Положим: $\Delta=\left(u_1^2(\xi)+u_2^2(\xi)\right)^{\frac{1}{2}}$ для однородного тела $\Delta=0$.

Исходя из интегрального критерия рассматривается обратная задача о нахождении трещины. Было доказано утверждение, что если существует трещина, то $\Delta\neq 0$.

Была сделана программа нахождения интегрального значения Δ. По теореме о нахождении граничных значений решений задач теории упругости, значения совпадают с u_1 или u_2, если неподвижная точка находится внутри, и равны 0, если – вне области Ω.

Интеграл был проверен на двух решениях:

1) одноосное растяжение пластины;
2) всестороннее растяжение.

В итоге внутренние перемещения совпали до 10^{-5}, на внешних перемещениях получился требуемый 0.

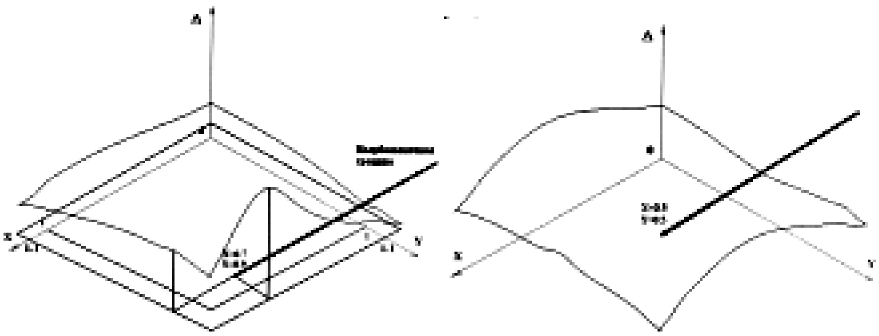
После чего в тело была помещена трещина нормального отрыва. Решение можно представить в виде суммы аналитического решения и решения с особенностью.

Аналитическое дает $\Delta=0$, соответственно на Δ влияет только особенность.

Рассмотрим теперь трещину конечной длины. Для этого в формуле для определений напряжений и перемещений положим

$$K_1 = \frac{-1}{\sqrt{\pi\, l}} \int\limits_{-l}^{l} \sigma_{22}^{*} \sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\, d\,t\,.$$

В итоге получили график, для примера была взята точка с координатами x = 0,7; y = 0,9. Таким образом, можно считать, что теорема о существовании трещины имеет место.



Литература

1. *Шваб А.А.* Некорректные задачи теории упругости // Изв. АН СССР. МТТ. – 1989. – №6. – С. 98–106.
2. *Новацкий В.* Теория упругости. – М.: Мир, 1975. – 872 с.
3. *Екобори Т.* Научные основы прочности и разрушения материалов. – Киев: Наукова думка, 1978.
4. *Астафьев В.И., Радаев Ю.Н., Степанова Л.В.* Нелинейная механика разрушения. – Самара: Самар. ун-т, 2001. – 631 с.