УДК 517. (575.2) (04)

ИНТЕРАКТИВНОЕ КОМПЬЮТЕРНОЕ ПОСТРОЕНИЕ КОНФИГУРАЦИИ, ЗАМКНУТОЙ ОТНОСИТЕЛЬНО ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ВЫПУКЛЫХ ОБОЛОЧЕК

П.С. Панков – чл.-кор. НАН КР, докт. физ.-мат. наук, проф.
С.Н. Алексеенко – докт. физ.-мат. наук
Д.Т. Асанов

A finite set M is defined as follows (let convex hulls of non-empty subsets of M be called HM-sets). 1) If the intersection of two HM-sets is not empty then it is an HM-set. 2) The set M with any more point does not fulfill the condition 1. A computer program is built to assist to prove that a planar set M contains exactly 6 points. An example of a spatial set M containing 8 points is found.

В геометрии рассматривались различные задачи о построении конфигураций (конечных множеств) точек на плоскости и в пространстве, удовлетворяющих заданным условиям, связанным с коллинеарностью. См., например, обзор о задаче[1]: по заданным натуральным n и k найти такую конфигурацию из n-точек, чтобы количество прямых, содержащих по k-точек, было максимальным.

Насколько нам известно, в таких задачах исходными данными являлись некоторые числовые величины. В данной статье рассматривается общая проблема о существовании конечного множества, замкнутого относительно пересечения выпуклых оболочек его подмножеств. Описаны интерактивные компьютерные программы, облегчающие понимание приведенных доказательств.

1. Постановки задач и их решения

Задача 1. Конечное множество точек на плоскости определяется следующими условиями:

1) Если два отрезка, концы которых входят в это множество, имеют общую точку, то тогда эта точка тоже входит в это множество.

2) Ни одна точка не может быть добавлена к этому множеству с сохранением условия 1).

Из скольких точек состоит это множество?

Ответ: 6 точек.

Для доказательства будет удобно, если переписать задачу. Обозначим это множество точек, как М, и его точки, как М-точки.

Задача 2. Конечное множество М определяется следующими условиями:

A1) Если два отрезка с концами из М имеют одну общую точку, то она является М-точкой.

A2) Ни одна точка не может быть добавлена к М с сохранением условия A1).

Также сформулируем аналогичную задачу для трехмерного пространства.

Заметим, что условия A1)–A2) могут быть обобщены (при таком же решении) следующим образом.

Конечное множество М определяется следующими условиями (выпуклые оболочки непустых подмножеств из М будем называть НМ-множествами):

B1) Если пересечение двух НМ-множеств не пустое, то оно является НМ-множеством.

[1] *Гарднер М.* Путешествие во времени / Пер. с англ. – М.: Мир, 1990. – Гл. 22. – С. 313–326.

В2) Ни одна точка не может быть добавлена к М с сохранением условия В1).

Данная формулировка возможна уже для пространства любой размерности.

Поскольку решить аналогичную задачу в трехмерном пространстве слишком сложно, ставим более легкую задачу:

Задача 3. Найти какое-нибудь множество точек, удовлетворяющее условиям В1 и В2.

Ответ. Возьмем четырехгранник *ABCD* и четыре точки *A, B, C, D* вне его так, что *ABA', BCB', CDC', DAD'* являются отрезками. Тогда 8 точек *A, B, C, D, A', B', C', D'* образуют множество М.

2. Решение задачи на плоскости

Используем обозначения задачи 2. Доказательства лемм будем проводить в предположении, что М-множество существует.

Лемма 1. На каждой прямой находятся не более трех М-точек.

Доказательство (от противного). Пусть на прямой $\boldsymbol{\alpha}$ лежит более трех М-точек. Возможны следующие случаи:

а) в каждой из полуплоскостей относительно $\boldsymbol{\alpha}$ находятся не более одной М-точки. Тогда, очевидно, можно добавить к множеству М еще одну точку $F \in \alpha$ с сохранением условия А1), т.е. нарушается условие А2).

b) в одной из полуплоскостей относительно $\boldsymbol{\alpha}$ лежат не менее двух М-точек. Обозначим *B* – одну из них, ближайшую к прямой $\boldsymbol{\alpha}$, и *A* – другую М-точку. Поскольку всего на прямой $\boldsymbol{\alpha}$ по предположению не менее четырех М-точек, то в одной из полуплоскостей относительно прямой *AB* находятся не менее двух М-точек (*C, D*), принадлежащих $\boldsymbol{\alpha}$.

Точка пересечения диагоналей выпуклого четырехугольника с М-вершинами *A,B,C,D* является М-точкой и находится ближе к $\boldsymbol{\alpha}$, чем М-точка *B,* что противоречит построению.

Полученные противоречия доказывают, что на прямой могут быть расположены не более трех М-точек. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Существует хотя бы одна прямая, на которой расположены три М-точки.

Доказательство (от противного). Предположим, что на любой прямой находится не более двух М-точек.

Если М-точек всего две или три, то, очевидно, можно добавить еще М-точку. Если количество М-точек больше трех, то выберем М-треугольник Δ (вершины Δ – М-точки) наименьшей площади. Продолжения сторон Δ разделяют его внешность на шесть (неограниченных) частей. Другие М-точки по предположению не могут лежать внутри, на сторонах и продолжениях сторон Δ. Также другие М-точки не могут лежать в двуугольных частях, потому что отрезок, соединяющий такую М-точку с противоположной вершиной Δ, дает еще одну М-точку на стороне Δ. Следовательно, еще одна М-точка может лежать только внутри угла (G), вертикального к одному из углов Δ. Обозначим вершину этого угла через *A*, а противоположную сторону Δ – через *BC.*

Обозначим через *A'* ближайшую к прямой *BC* М-точку внутри *G*. Если еще одна М-точка находится вне прямой *AA'* , то она дает на отрезке с точкой *A* еще одну М-точку либо на отрезке *A'B* (ближе к *CB*, чем *A'*), либо на отрезке *A'C* (также ближе к *CB*, чем *A'*). Следовательно, вне луча *AA'* нет М-точек, кроме *B* и *C,* и можно добавить еще одну (третью) М-точку на луче *AA'* с сохранением условия 1). Лемма доказана.

Итак, пусть на прямой $\boldsymbol{\delta}$ расположены три М-точки: *A, B, C.*

Пусть также *D* – ближайшая к $\boldsymbol{\delta}$ М-точка (рис. 1).

Тогда на Δ *ADC* нет других М-точек, кроме *A, B, C, D*. Если другие М-точки существуют, то они лежат на продолжениях сторон *AD, DC* и прямой *BD*, т.е. на лучах α', α'', $\boldsymbol{\beta'}$, $\boldsymbol{\beta''}$, $\boldsymbol{\gamma'}$, $\boldsymbol{\gamma''}$. Очевидно, М-точки не могут находиться на лучах α'' или γ'', в противном случае на *AD* или *DC* были бы еще М-точки. Если М-точка находится на $\boldsymbol{\beta'}$, то другие М-точки могут находиться только на $\boldsymbol{\beta'}$ и $\boldsymbol{\beta''}$, т.е. получаем более трех М-точек на прямой *BD*. Итак, М-точки могут быть только на лучах β'', α' или γ'. Если на луче α' есть М-точка, то не может быть М-точки на луче γ'. Отсюда получаем единственное решение:

Теорема 1. Множество М может состоять только из 6 точек (рис. 2): М = *{A, B, C, D, A', D'}*, что является решением задачи 1.

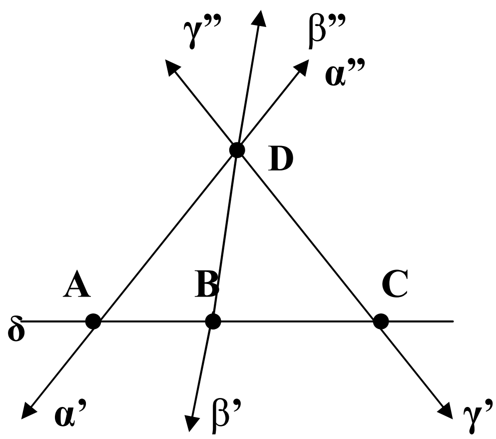

Рис. 1

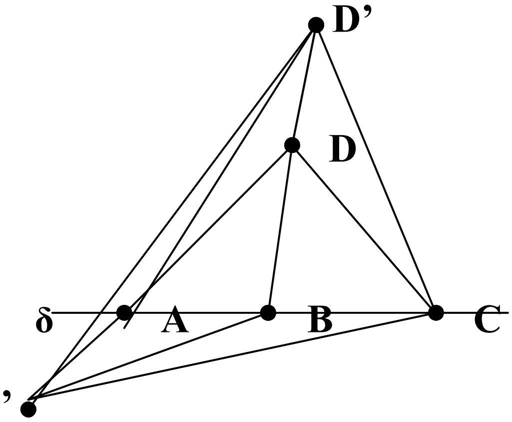

Рис. 2

Видно, что проверить правильность доказательства лемм 1, 2 и теоремы 1 непосредственно по приведенному тексту довольно затруднительно. Более подробные объяснения сделают более понятными этапы доказательства по отдельности, но усложнят восприятие построений в целом. Вследствие этого, были составлены компьютерные программы, демонстрирующие доказательства в интерактивном режиме.

Программа представляет на дисплее исходное положение М-точек и соединяющие их отрезки. Пользователь, имеющий навыки владения компьютерной мышью, выбирает любую новую М-точку, и программа строит новые М-точки в соответствии с условием А2, а также показывает, когда эти точки оказываются в запрещенных по условию областях. Таким образом, пользователь быстро убеждается в справедливости упомянутых предложений.

Программы были написаны на языке Visual Basic 6 и занимают в совокупности около 2 мегабайт.

3. Решение задачи в трехмерном пространстве

Обозначим луч, идущий от точки *Q* в сторону, противоположную точке *P,* как *(P)Q.*

Возьмём треугольную пирамиду *ABCD* и любую точку *A’* на луче *(A)B*, любую точку *B’* на луче *(B)C*, любую точку *C’* на луче *(C)D* и любую точку *D’* на луче *(D)A.*

Теорема 2. Восемь точек *A, B, C, D, A’, B’, C’, D’* образуют множество М**.** Назовём это множество М8.

Для доказательства теоремы напомним определение: простейший многогранник размерности *n* называется *n*-симплексом: 0-симплекс – это точка, 1 симплекс – это отрезок, 2 симплекс – это треугольник и 3 симплекс – это треугольная пирамида (с внутренними точками). Симплекс с М-вершинами назовём НМ-симплексом.

Лемма 3. Условие В1 эквивалентно следующему:

S1) Если пересечение НМ-симплексов содержит только одну точку, то она тоже является М-точкой.

Доказательство. Необходимость следует из того, что НМ-симплекс является НМ-множеством. Достаточность следует из того, что каждый выпуклый многогранник может быть разбит на симплексы, начиная с любой вершины. Следовательно, каждая точка НМ-множества принадлежит какому- нибудь НМ-симплексу.

Продолжим доказательство теоремы 2. Вернемся к множеству М8.

Справедливость условия В1=S1 исходит из того, что отрезки *AA’, BB’, CC’, DD’* пересекают плоскости *BCD, ACD, ABD, ABC* соответственно в уже существующих М-точках.

Проверим условие В2**.** При добавлении еще одной точки могут быть только следующие случаи:

Е1) Ещё одна М-точка *E* находится на поверхности пирамиды *ABCD*.

Е2) Если мы добавим одну М-точку *E,* находящуюся внутри пирамиды *ABCD*, тогда пересечение отрезка *A'E* и треугольника *BCD* даст еще М-точку *E'* внутри треугольника *BCD* (в плоскости *BCD*).

Е3) Если мы добавим ещё М-точку *E* вне пирамиды *A'B'C'D'*, то пусть ближайшей к ней будет вершина, например *A'.* Так как точки *A, B, C, D* не лежат на одной прямой, то по крайней мере один из отрезков *AE, BE, CE, DE* не проходит через вершину пирамиды *A'B'C'D'***.** Это дает нам новую М-точку *E'*, которая лежит на одной из треугольных граней *A'B'C'D'*.

Е4) Отметим, что симплекс *A'B'C'D'* есть объединение пяти симплексов *ABCD, AA'C'D', BB'C'D', CC'A'B', DD'A'B'*. Если добавить ещё одну М-точку *E,* лежащую внутри или на поверхности пирамиды *A'B'C'D'*, но вне пирамиды *ABCD,* то точка *E* лежит в одном из четырёх симплексов *AA'C'D', BB'C'D', CC'A'B', DD'A'B'.* Пусть она находится, например, в симплексе *AA'C'D'.* Тогда отрезок *ED* пересечёт треугольник *AA'C'* и появится новая М-точка в плоскости *ABC.*

Таким образом, во всех случаях новая М-точка появляется в одной из плоскостей *BCD, ACD, ABD* и *ABC.*

Если добавленная М-точка *E* лежит, например, в плоскости *ABC*, тогда согласно доказательству задачи 1 (двумерный случай), чтобы не получить бесконечную серию М-точек в плоскости *ABC,* точка *E* должна находиться на луче *(C)A.* Но если точка лежит на *(C)A,* то она лежит в одной плоскости с точками *C, A, C', D* и это даёт нам бесконечную серию М-точек в плоскости *ACD*. Следовательно, мы не можем добавить к М8 новую М-точку.

Теорема 2 полностью доказана.

* * *

Данное исследование было удостоено серебряной медали на V Международном конкурсе математических проектов (Алматы, май 2003 г.). Авторы благодарят Кыргызско-Турецкий мужской лицей имени Ч. Айтматова за поддержку данного исследования.