УДК. 517.968 (575.2) (04)

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА – ДАРБУ

Т.Д. Омуров – докт. физ.-мат. наук
Т.Т. Каракеев – канд. физ.-мат. наук

The inverse bounded problems for Eiler-Darby equation regularization are considered in the article. The problem is reduced to the third order Volterra integral equation, for which the regularization method is constructed.

В работе [1] рассматриваются обратные задачи для уравнения Эйлера–Дарбу, которые возникают при исследовании принадлежности решения вырождающихся уравнений наперед заданным функциональным пространствам. В ней показана эквивалентность поставленных обратных задач интегральным уравнениям Вольтерра третьего рода.

Обозначим через $Q_n(U^1)$ пространство кусочно-непрерывных вектор-функций с конечным числом разрывов первого рода в конце отрезка $[0,1]$, $Z_n(U^0)$ – пространство суммируемых на $[0,1]$ вектор-функций и обобщенных вектор-функций, сосредоточенных в начале отрезка $[0,1]$, т.е. в точке $x=0$, $Z_n(U^1)$ – пространство суммируемых на $[0,1]$ вектор-функций и обобщенных вектор-функций, сосредоточенных в конце отрезка $[0,1]$.

Постановка задачи. Пусть $\widetilde{\mathrm{E}} = C_n^{0,1}(\Omega) \cap C_n^{1,1}(\Omega)$ – область определения дифференциального оператора $L_{\beta_1} = \partial^2 / \partial x \partial y - \beta_1 (y-x)^{-1} \partial / \partial y$ V-пространство функций $v(x,y)$ из класса $\widetilde{E} \cap C_n(\overline{\Omega})$, $\Omega=\{0<x<y<1\}$, удовлетворяющих краевым условиям

$$v(0,y) = \psi(y), \quad v(x,1) = \tau(x), \tag{1}$$

F – пространство непрерывных вектор-функций $f_0(x,y)$, представимых в виде

$$f_0(x,y) = -\beta p(y)(y-x)^{\beta_1 - 1} u(y) - y^{\beta_1} (y-x)^{\beta_0 - \beta_1} K(y,x) u(x), \tag{2}$$

$K(y,x)$ – «$n \times n$» матричная функция, $p(y)$ – скалярная функция.

Необходимо найти такую пару (v,f_0), что $v \in V$, $f_0 \in F$ и удовлетворяют систему

$$(L_{\beta_1} v)(x,y) = f_0(x,y) / (y-x)^{\beta_0}, \; 1 < \beta_1 < \beta_0 < 2, \tag{3}$$

если для известных функций выполняются условия

$$\psi(y) \in C_n^1(0 < y \le 1), \; \tau(x) \in C_n^1(0 \le x < 1), K(y,x) \in C_n(\overline{\Omega}), \; 0 \le p(y) \in C[0,1],$$

$$0 \le \psi'(y) \in C_n[0,1], \; u \in Q_n(U^1), \text{ (либо } u \in Z_n(U^1)\text{)}. \tag{4}$$

Постановка подобной обратной задачи впервые рассматривалась в [1]. Задача (3), (1) от задач этой работы отличается более общей постановкой, полученная эквивалентная ей система интегральных уравнений Вольтерра третьего рода является представителем другого, ранее не изученного класса таких систем.

Из [1] известно, что решение задачи (1), (3) представляется в виде:

$$v(x,y)=\tau(x)-\int_y^1[\eta^{\beta_1}\psi'(\eta)+\int_0^x(\eta-t)^{\beta_1-\beta_0}f_0(t,\eta)dt](\eta-x)^{-\beta_1}d\eta$$

и для установления принадлежности $v(x,y)\in V$ необходимо исследовать систему интегральных уравнений Вольтерра третьего рода

$$p(x)u(x)+\int_0^x K(x,t)u(t)dt=\psi'(x)\cdot \tag{5}$$

Пусть A и K – операторы вида

$$(Au)(x)=p(x)u(x),\ \ (Ku)(x)=\int_0^x K(x,t)u(t)dt,\ \ (\overline{K}u)(x)=\int_0^x K(t,t)u(t)dt\cdot \tag{6}$$

Тогда систему (5) представим в виде

$$(Au)(x)+(Ku)(x)=\psi'(x)\,. \tag{7}$$

Предположим, что система (7) имеет решение в $Q_n(U^1)$ (либо $Z_n(U^1)$). Обозначим через J и L_0 – линейные операторы Вольтерра

$$(Ju)(x)=\int_0^x u(t)dt,\ (L_0z)(x)=\int_0^x\lambda(t)z(t)dt,\ 0\le\lambda(x)\in C[0,1], \tag{8}$$

$g_0(x)$, $\Phi_0(x)$ – известные вектор-функции из $C_n[0,1]$ такие, что

$$0<\gamma_0\le g_0(x),\ \ 0<\gamma_1\le\|\Phi_0(x)\|\le C_0=const\,. \tag{9}$$

Рассмотрим также операторы $\widetilde{\Phi}$ и $\widetilde{M}$, действия которых на вектор-функцию $w(x)\in C_n[0,1]$ определим по правилу

$$\widetilde{\Phi}w=\langle\Phi u,w\rangle,\ \widetilde{M}w=\langle Mz,w\rangle,$$

где $\Phi u\equiv diag(\Phi_{0i}(x)u_i(x))_1^n$, $Mz\equiv diag(M_{0i}(x)z_i(x))_1^n$, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ – знак интеграла:

$$\langle\Phi u,w\rangle=\int_0^x(\Phi u)(t)w(t)dt,\ 0<\gamma_2\le M_0(x)\in L^1{}_n(0,1)\,. \tag{10}$$

Для построения регуляризирующей системы будем пользоваться модификацией метода системной регуляризации [3]. Этот метод предполагает введение новой искомой вектор-функции $z(x)$ из $Z_n(U^0)$ посредством системы

$$\begin{cases}L_0z+K_0u=f,\\ Au+\overline{K}u=L_0z-g_0,\end{cases} \tag{11}$$

где $K_0=K-\overline{K}$ – оператор Вольтерра вида (6) с ядром $K_0(x,t)=K(x,t)-K(t,t)$, $f(x)=\psi'(x)+g_0(x)$.

Действуем оператором $\widetilde{M}$ на первой строке, операторами J и $\widetilde{\Phi}$ на второй строке системы (11) и, складывая полученные результаты, приходим к системе первого рода

$$\begin{cases}\langle Mz,f\rangle=\langle Mz,Jz\rangle+\langle Mz,K_0u\rangle-L_0z-K_0u+f,\\ JAu+\langle\Phi u,g_0\rangle=\langle\Phi u,Au+\overline{K}u\rangle-\langle\Phi u,L_0z\rangle-J(\overline{K}u-L_0z)-Jg_0.\end{cases}$$

Введем обозначения $Gu=JAu+\langle\Phi u,g_0\rangle$, $Lz=\langle Mz,f\rangle+L_0z$, $J_0=JL_0$, $g=Jg_0$, $T_0z=\langle Mz,L_0z\rangle$, $Tu=\langle\Phi u,Au\rangle+\langle\Phi u,\overline{K}u\rangle-JKu$. Тогда

$$\begin{cases} Lz = \langle Mz, K_0 u\rangle + T_0 z - K_0 u + f, \\ Gu = -\langle \Phi u, L_0 z\rangle + Tu + J_0 z - g. \end{cases} \tag{12}$$

Принимая во внимание равенство $\langle \Phi u, f\rangle = \langle \Phi f, u\rangle$, видим, что оператор G имеет ядро вида $G(x) = diag(p(x) + \Phi_{0i}(x) f_i(x))_1^n$, причем согласно условиям (4) и (9) имеет место оценка

$$\|G(x)\| \le C_1 h(x), \quad 0 < \gamma_3 \le h(x) = \min\{p(x) + \Phi_{0i}(x) f_i(x) | 1 \le i \le n\}. \tag{13}$$

Пусть для матричной функции $M(x) = diag(M_{0i}(x) g_{0i}(x) + \lambda(x))_1^n$ и скалярной функции $p(x)$ выполняются условия

$$\|M(x)\| \le C_2 k(x), \ 0 < \gamma_4 \le k(x) = \min\{M_{0i}(x) g_{0i}(x) + \lambda(x) | 1 \le i \le n\}, \ k(x) \in L^1(0,1),$$

$$p(x) \le \gamma_5 (1-x)^\theta, \ 0 < \theta < 1/3, \ (\varphi(x))^{-\beta} \in L^1(0,1), \beta > 2, \ \varphi(x) = \int_0^x k(t)dt. \tag{14}$$

Рассмотрим сингулярно-возмущенную систему с малыми параметрами ε и α из интервала $(0,1)$ следующего вида

$$\begin{cases} (\alpha I + L) z_\alpha = \langle M z_\alpha, K_0 u_\varepsilon\rangle + T_0 z_\alpha - K_0 u_\varepsilon + f, \\ (\varepsilon I + G) u_\varepsilon = -\langle \Phi u_\varepsilon, L_0 z_\alpha\rangle + T u_\varepsilon + J_0 z_\alpha + g_\varepsilon, \end{cases} \tag{15}$$

где $g_\varepsilon(x) = k_0 \varepsilon^\gamma x \exp(-\frac{1}{\varepsilon}(1-x)^\theta) - g(x), \ 0 < \gamma \le 1, \ 0 < \theta < 1/3$.

Решение системы (15) ищем в виде суммы трех новых неизвестных вектор-функций

$$\begin{cases} z_\alpha(x) = \dfrac{1}{\alpha} Q_\alpha(x) + w(x) + \varsigma_\alpha(x), \\ u_\varepsilon(x) = \dfrac{1}{\varepsilon} \Pi_\varepsilon(x) + \upsilon(x) + \xi_\varepsilon(x). \end{cases} \tag{16}$$

Примем следующие обозначения:

$$q_1 = \gamma_0^{-1} \lambda C_2 (2r_1 + r_3 + K_1 r_2 / 2), \ q_3 = \gamma_0^{-1} \lambda C_2 (r_1 + r_3)/2 + K_1 \gamma_4^{-1}, \ \lambda = \max_{[0,1]} \|\lambda(x)\|,$$

$$q_2 = \gamma_0^{-1} \lambda C_1 (r_2 + r_4) + \lambda \gamma_3^{-1}, \ q_4 = (2r_2 + r_4) C_1 (C_0 + K_2 \gamma_0^{-1}) + \lambda r_1 C_1 \gamma_0^{-1} + K_1 \gamma_3^{-1}$$

$$q_{1,\alpha}^\varepsilon = \gamma_0^{-1} C_2 \lambda (Q_0 Q_1 \|\sigma_1(x)\|_C \alpha^{\beta-1} + N_0 N_1 K_1 \varepsilon), \ q_{3,\varepsilon} = \gamma_0^{-1} C_2 \lambda K_1 Q_0 Q_1 \|\sigma_1(x)\|_C \alpha^{\beta-1},$$

$$q_{4,\alpha}^\varepsilon = \gamma_0^{-1} C_1 (\lambda Q_0 Q_1 \|\sigma_1(x)\|_C \alpha^{\beta-1} + N_0 N_1 \varepsilon) + K_2 N_0 N_1 C_0 \varepsilon, \ \ q_{2,\varepsilon} = \lambda N_0 N_1 C_0 \varepsilon,$$

$$q_0 = C_3 \tilde{q}_1 + C_4 \tilde{q}_2, \ \tilde{q}_1 = \max(q_1, q_3), \ \tilde{q}_2 = \max(q_2, q_4), K_2 = \max_D \|K(x,t)\|, \tag{17}$$

$$C_3 = (2C_2 + e^{-1})\sqrt{n}, \ C_4 = (2C_1 + e^{-1})\sqrt{n}.$$

Теорема 1. Пусть выполняются условия (4), (9), (10), (13), (14) и $q_0 < 1$. Тогда существуют числа $\alpha_0, \varepsilon_0 \in (0,1)$ и единственная пара вектор-функций $(z_\alpha(x), u_\varepsilon(x))$, которая при $0 < \alpha < \alpha_0$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ представима в форме (16). и удовлетворяет сингулярно-возмущенную систему (15). Причем, если $0 < \gamma < 1$, то $u_\varepsilon(x) \in Z_n(U^1)$, при $\gamma = 1$ $u_\varepsilon(x) \in Q_n(U^1)$.

Доказательство этой основной теоремы следует из ниже доказанной леммы и теоремы.

Определим вектор-функции $Q_\alpha(x)$, $\Pi_\varepsilon(x)$ из следующих систем интегральных уравнений [2]:

$$Q_\alpha(x)+\frac{1}{\alpha}\int_0^x M(t)Q_\alpha(t)dt=f(0),$$
$$\Pi_\varepsilon(x)+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x G(t)\Pi_\varepsilon(t)dt=k_0\varepsilon^\gamma x\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(1-x)^\theta). \tag{18}$$

Лемма 1. Вектор-функции $Q_\alpha(x)$, $\Pi_\varepsilon(x)$ удовлетворяют оценкам

$$\|Q_\alpha(x)\|\le\sqrt{n}\|f(0)\|\exp(-\frac{1}{\varepsilon}\varphi(x)),\ \|\Pi_\varepsilon(x)\|\le(1+C_1\sqrt{n})k_0\varepsilon^\gamma\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(1-x)^\theta). \tag{19}$$

В самом деле, решение системы интегральных уравнений второго рода (18) выписываются в квадратурах в виде

$$Q_\alpha(x)=f(0)W_\alpha(x,0),\ \Pi_\varepsilon(x)=k_0\varepsilon^\gamma G_\varepsilon(x)\exp(-\frac{1}{\varepsilon}(1-x)^\theta), \tag{20}$$

$G_\varepsilon(x)=x-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x\widetilde{W}_\varepsilon(x,t)G(t)t\exp[-(\frac{1}{\varepsilon}(1-t)^\theta)-\frac{1}{\varepsilon}(1-x)^\theta)]dt$, $\quad W_\alpha(x,t)=\exp(-\frac{1}{\alpha}\int_t^x M(\tau)d\tau)$ – матричная функция Коши системы $dQ_\alpha/dx=-M(x)Q_\alpha/\alpha$, $\widetilde{W}_\varepsilon(x,t)$ – матричная функция Коши системы $d\Pi_\varepsilon/dx=-G(x)\Pi_\varepsilon/\varepsilon$. Оценим $G_\varepsilon(x)$.

$$\|G_\varepsilon(x)\|\le\|\ x-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x\widetilde{W}_\varepsilon(x,t)G(t)t\exp[-(\frac{1}{\varepsilon}(1-t)^\theta)-\frac{1}{\varepsilon}(1-x)^\theta)]dt\|\le 1+C_1\sqrt{n}\,. \tag{21}$$

Тогда в силу (13), (14) и неравенства Важевского [5] из (20) получим (19).

Пусть существует решение системы уравнений

$$\begin{cases}Lw=\langle Mw,K_0\upsilon\rangle+T_0w-K_0\upsilon+\widetilde{f},\\ G\upsilon=-\langle\Phi\upsilon,L_0w\rangle+T\upsilon+J_0w-g,\end{cases} \tag{22}$$

где $\widetilde{f}(x)=f(x)-f(0)$.

Для определения непрерывных неизвестных вектор-функций $\varsigma_\alpha(x)$ $\xi_\varepsilon(x)$ получим систему интегральных уравнений

$$\begin{cases}(\alpha I+L)\varsigma_\alpha=\langle M[\frac{1}{\alpha}Q_\alpha+w+\varsigma_\alpha],K_0[\frac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon+\upsilon+\xi_\varepsilon]\rangle-\langle Mw,K_0\upsilon\rangle+T_0[\frac{1}{\alpha}Q_\alpha+\\ +w+\varsigma_\alpha]-T_0w-K_0\xi_\varepsilon-\alpha w,\\ (\varepsilon I+G)\xi_\varepsilon=-\langle\Phi[\frac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon+\upsilon+\xi_\varepsilon],L_0[\frac{1}{\alpha}Q_\alpha+w+\varsigma_\alpha]\rangle+\langle\Phi\upsilon,L_0w\rangle+T[\frac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon+\\ +\upsilon+\xi_\varepsilon]-T\upsilon+J_0\varsigma_\alpha-\varepsilon\upsilon.\end{cases} \tag{23}$$

Теорема 2. Если выполняются условия (4), (9), (10), (13), (14) и $q_0<1$, то существуют такие $\alpha_0,\varepsilon_0\in(0,1)$, что для всех $0<\alpha<\alpha_0$ и $0<\varepsilon<\varepsilon_0$ система (23) имеет единственное решение, которое при $\alpha\to 0$ и $\varepsilon\to 0$ равномерно сходится к нулю.

Доказательство. С помощью оператора H_α, определенного формулой

$$(H_\alpha a)(x)=\frac{1}{\alpha^2}\int_0^x W_\alpha(x,t)M(t)(a(x)-a(t))dt+\frac{1}{\alpha}W_\alpha(x,0)a(x).$$

и такого же оператора H_ε, частично обратим систему (23).

$$\begin{cases} \varsigma_\alpha = H_\alpha(\langle M[\frac{1}{\alpha}Q_\alpha + w + \varsigma_\alpha], K_0[\frac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon + \upsilon + \xi_\varepsilon]\rangle) + H_\alpha(T_0[\frac{1}{\alpha}Q_\alpha + w + \varsigma_\alpha]) - \\ - H_\alpha(\langle Mw, K_0\upsilon\rangle) - T_0 w - H_\alpha K_0 \xi_\varepsilon - \alpha H_\alpha w \equiv B[\varsigma_\alpha, \zeta_\varepsilon], \\ \xi_\varepsilon = -H_\varepsilon(\langle \Phi[\frac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon + \upsilon + \xi_\varepsilon], L_0[\frac{1}{\alpha}Q_\alpha + w + \varsigma_\alpha]\rangle) + H_\varepsilon(T[\frac{1}{\varepsilon}\Pi_\varepsilon + \upsilon + \xi_\varepsilon]) + \\ + H_\varepsilon(\langle \Phi\upsilon, L_0 w\rangle) - H_\varepsilon T\upsilon + H_\varepsilon J_0 \varsigma_\alpha - \varepsilon H_\varepsilon \upsilon \equiv B_0[\varsigma_\alpha, \zeta_\varepsilon]. \end{cases}$$

Произведя оценки, используя условия (4), (9), (10), (13), (14), (18) и обозначения (17), имеем

$$\|\varsigma_\alpha(x)\| \le C_3(q_1 + q_{1,\alpha}^\varepsilon \alpha^{\beta-1})\|\varsigma_\alpha(x)\|_{C_n} + C_3(q_3 + q_{3,\varepsilon}\varepsilon)\|\xi_\varepsilon(x)\|_{C_n} + \alpha\|H_\alpha w\| +$$

$$+ N_{1,1}\alpha^{\beta-2} + N_{3,1}\varepsilon,\ 0 < N_{1,1}, N_{3,1} = const,$$

$$\|\xi_\varepsilon(x)\| \le C_4(q_2 + q_{2,\alpha}^\varepsilon \alpha^{\beta-1})\|\varsigma_\alpha(x)\|_{C_n} + C_4(q_4 + q_{4,\varepsilon}\varepsilon)\|\xi_\varepsilon(x)\|_{C_n} + \varepsilon\|H_\varepsilon \upsilon\| +$$

$$+ N_{2,1}\alpha^{\beta-2} + N_{4,1}\varepsilon,\ 0 < N_{2,1}, N_{4,1} = const.$$

Усиливая эти неравенства, получим

$$\|\varsigma_\alpha(x)\| \le C_3(\tilde{q}_1 + q_{1,\alpha}^\varepsilon \alpha^{\beta-1} + q_{3,\varepsilon}\varepsilon)(\|\varsigma_\alpha(x)\|_{C_n} + \|\xi_\varepsilon(x)\|_{C_n}) + \alpha\|H_\alpha w\| + N_{1,1}\alpha^{\beta-2} + N_{3,1}\varepsilon,$$

$$\|\xi_\varepsilon(x)\| \le C_4(\tilde{q}_2 + q_{2,\alpha}^\varepsilon \alpha^{\beta-1} + q_{4,\varepsilon}\varepsilon)(\|\varsigma_\alpha(x)\|_{C_n} + \|\xi_\varepsilon(x)\|_{C_n}) + \varepsilon\|H_\varepsilon \upsilon\| + N_{2,1}\alpha^{\beta-2} + N_{4,1}\varepsilon.$$

где $\tilde{q}_1 = \max(q_1, q_3)$, $\tilde{q}_2 = \max(q_2, q_4)$. Так как по условию $q_0 = C_3\tilde{q}_1 + C_4\tilde{q}_2 < 1$, то при значениях малых параметров α и ε таких, что

$$0 < \alpha < \alpha_1 = [(1 - q_0)/(2(q_{1,\alpha}^\varepsilon C_3 + q_{2,\alpha}^\varepsilon C_4))]^{\frac{1}{\beta-1}},$$

$$0 < \varepsilon < \varepsilon_1 = ((1 - q_1)/(2(q_{3,\varepsilon}C_3 + q_{4,\varepsilon}C_4))$$

по равномерной метрике получим оценку

$$\|\varsigma_\alpha(x)\|_{C_n} + \|\xi_\varepsilon(x)\|_{C_n} \le (1 - \tilde{q}_0)^{-1}[\alpha\|H_\alpha w\|_{C_n} + \varepsilon\|H_\varepsilon \upsilon\|_{C_n} + (N_{2,1} + N_{1,1})\alpha^{\beta-2} + + (N_{3,1} + N_{4,1})\varepsilon], \tag{24}$$

$$\tilde{q}_0 = C_3(\tilde{q}_1 + q_{1,\alpha}^\varepsilon \alpha^{\beta-1} + q_{3,\varepsilon}\varepsilon) + C_4(\tilde{q}_2 + q_{2,\alpha}^\varepsilon \alpha^{\beta-1} + q_{4,\varepsilon}\varepsilon) < 1.$$

Кроме того, в силу леммы из [4],

$$\alpha\|H_\alpha w\|_{C_n} \to 0,\ \varepsilon\|H_\varepsilon \upsilon\|_{C_n} \to 0,\ \alpha, \varepsilon \to 0.$$

Тогда существуют *α₂, ε₂* из интервала (*0,1*), что для всех $0 < \alpha < \alpha_2$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_2$ выполняются неравенства

$$\alpha\|H_\alpha w\|_{C_n} + N_1\alpha^{\beta-2} \le (1 - \tilde{q}_0)r_3,\ \varepsilon\|H_\varepsilon \upsilon\|_{C_n} + N_2\varepsilon \le (1 - \tilde{q}_0)r_4.$$

Пусть $\varsigma_\alpha^0(x) \equiv 0$ и $\xi_\varepsilon^0(x) \equiv 0$. Тогда

$$\|(B[\varsigma_\alpha, \xi_\varepsilon])(x)\|_{C_n} + \|(B_0[\varsigma_\alpha, \xi_\varepsilon])(x)\|_{C_n} \le \|(B[\varsigma_\alpha, \xi_\varepsilon])(x) - (B[\varsigma_\alpha^0, \xi_\varepsilon^0])(x)\|_{C_n} +$$

$$+ \|(B_0[\varsigma_\alpha, \xi_\varepsilon])(x) - (B_0[\varsigma_\alpha^0, \xi_\varepsilon^0])(x)\|_{C_n} + \|(B_0[\varsigma_\alpha^0, \xi_\varepsilon^0])(x)\|_{C_n} + \|(B[\varsigma_\alpha^0, \xi_\varepsilon^0])(x)\|_{C_n}.$$

Поскольку

$$\|(B_0[\varsigma_\alpha^0, \xi_\varepsilon^0])(x)\|_{C_n} \le \alpha\|H_\alpha w\|_{C_n} + N_1\alpha^{\beta-2},\ \ \|(B[\varsigma_\alpha^0, \xi_\varepsilon^0])(x)\|_{C_n} \le \varepsilon\|H_\varepsilon \upsilon\|_{C_n} + N_2\varepsilon,$$

то $\|(B[\varsigma_\alpha, \xi_\varepsilon])(x)\|_{C_n} + \|(B_0[\varsigma_\alpha, \xi_\varepsilon])(x)\|_{C_n} \le r_3 + r_4$.

Положим $\alpha_0 = \min(\alpha_1, \alpha_2)$, $\varepsilon_0 = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. Тогда при любых $\alpha \in (0, \alpha_0)$ и $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ для системы (23) реализуется принцип сжимающих отображений Банаха [6], т.е. система (23) имеет единственное непрерывное решение в паре (Ω_1, Ω_2), где Ω_i – шар с центром в начале координат и радиусом $r_i, i = 1,2$. Причем из оценки (24) вытекает равномерная сходимость

$\varsigma_\alpha(x) \to 0, \xi_\varepsilon(x) \to 0$, при $\alpha, \varepsilon \to 0$.

Из представления $\Pi_\varepsilon(x) = k_0 \varepsilon^\gamma G_\varepsilon(x) \exp(-\frac{1}{\varepsilon}(1-x)^\theta)$ следует, что при $\gamma = 1$ $u_\varepsilon(x) = k_0 G_\varepsilon(x) \exp(-\frac{1}{\varepsilon}(1-x)^\theta) + \upsilon(x) + \xi_\varepsilon(x)$, если $0 < \gamma < 1$, то $u_\varepsilon(x) = \frac{k_0}{\varepsilon^{1-\gamma}} G_\varepsilon(x) \exp(-\frac{1}{\varepsilon}(1-x)^\theta) + \upsilon(x) + \xi_\varepsilon(x)$.

Литература

1. *Нахушев А.М.* Обратные задачи для вырождающихся уравнений и интегральные уравнения Вольтерра третьего рода // Дифференц. уравнения. – 1974. – Т. 10. – № 1. – С. 100–111.
2. *Омуров Т.Д.* Методы регуляризации интегральных уравнений Вольтерра первого и третьего рода. – Бишкек: Илим, 2003. – 162 с.
3. *Омуров Т.Д., Каракеев Т.Т.* Обратная задача типа Гурса для нелинейного уравнения колебания с обратным течением времени // Вестн. КГНУ. Естествен.-техн. науки. – Бишкек, 1999. – Ч. 1. – С. 149–153.
4. *Иманалиев М.И., Асанов А.* Регуляризация, единственность и существование решения для интегральных уравнений Вольтерра первого рода // Исслед. по интегро–дифференц. уравнениям. – Фрунзе: Илим, 1988. – Вып. 21. – С. 3–38.
5. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967.– 472 с.
6. *Треногин В.А.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1980. – 496 с.