УДК 517.95; 517.97 (575.2) (04)

# О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОГО ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ТЕПЛОВЫМИ ПРОЦЕССАМИ ПРИ МИНИМИЗАЦИИ ЛИНЕЙНОГО ФУНКЦИОНАЛА

***А. Керимбеков*** – докт. физ.-мат. наук
***И. Абышев*** – аспирант

The questions of solubility of problems of nonlinear optimal control of systems with the distributed parameters by minimization of linear functional on examples of control with thermal process are researched in the paper.

Пусть управляемый процесс описывается скалярной функцией $V(t,x), x \in Q \subset R^n$, которая удовлетворяет в области $Q_T$=Qx(0,T] параболическому уравнению

$$V_t - AV = g(x)f(t,u(t)), \quad x = \{x_1,...,x_n\} \in Q, \quad 0 < t \le T, \tag{1}$$

а на границе $Q_T$ начальному

$$V(0,x) = \psi(x), \quad x \in Q, \tag{2}$$

и граничному

$$\Gamma V(t,x) \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) V_{x_j} \cos(\vartheta, x_i) + a(x)V(t,x) = 0, \quad x \in \gamma, 0 < t \le T \tag{3}$$

условиям, где функция f(t,u(t)) описывает изменения внешнего воздействия и нелинейно зависит от функции управления $u(t) \in H(0,T)$; $g(x) \in H(Q), \psi(x) \in H(Q)$ – заданные функции; оператор A является эллиптическим в замкнутой области $\overline{Q} = Q + \gamma$ с кусочно-гладкой границей $\gamma$ [1]; a(x) – ограниченная неотрицательная измеримая функция; $\vartheta$ – внешняя нормаль к $\gamma$ в точке $x \in \gamma$; H – гильбертово пространство; T – фиксировано.

При решении задачи управления будем пользоваться обобщенным решением краевой задачи (1)–(3). Под обобщенным решением краевой задачи (1)–(3) понимается функция $V(t,x) \in H(Q_T)$, имеющая в $Q_T$ обобщенные производные $V_{x_i}(t,x), \quad i = 1,2,...n$, которая удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_Q V(t_2,x)W(t_2,x)dx - \int_{t_1}^{t_2}\int_Q \left[ VW_t - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)V_{x_j}W_{x_i} - c(x)V(t,x)W(t,x) \right] dxdt -$$

$$- \int_{t_1}^{t_2}\int_\gamma a(x)V(t,x)W(t,x)dxdt = \int_Q V(t_1,x)W(t_1,x)dx + \int_{t_1}^{t_2}\int_Q g(x)f(t,u(t))W(t,x)dxdt$$

почти для всех $t_1$ и $t_2$ $(0 \le t_1 < t_2 \le T)$ и для любой функции $W(t,x) \in H_1(Q_T)$ и в слабом смысле начальному условию (2), т.е. при $t \to +0$ для любой функции $W_0(x) \in H(Q)$ выполняется условие

$$\int_Q [V(t,x)-\psi(x)]W_0(x)dx \to 0 \cdot$$

Если отображение $f:u \to f(t,u)$ является взаимно однозначным ($\forall t \in [0,T]$), то при каждом управлении $u(t) \in H(0,T)$ краевая задача (1)–(3) имеет единственное обобщенное решение

$$V(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty} V_n(t) z_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} z_n(x)\left[e^{-\lambda_n t}\psi_n + \int_0^t e^{-\lambda_n (t-\tau)} g_k f(\tau,u(\tau))d\tau\right],$$

где $\psi_n, g_n$ – коэффициенты Фурье, соответственно функций $\psi(x)$ и g(x); $\{z_n(x)\}$ – полная в H(Q) ортонормированная система обобщенных собственных функций краевой задачи

$$Az(x) = -\lambda z(x), \quad x \in Q,$$

$$\Gamma z(x) = 0, \quad x \in \gamma,$$

а $\{\lambda_n\}$ – соответствующая последовательность собственных значений, причем $\lambda_k \le \lambda_{k+1}$ и $\lambda_k \to \infty$ при $k \to \infty$.

Рассмотрим следующую задачу нелинейного оптимального управления тепловыми процессами, где требуется найти допустимое управление $u^0(t) \in H(0,T)$ и соответствующее ему решение $V^0(t,x)$ краевой задачи (1)–(3), на которых линейный (относительно управления u(t)) функционал

$$J(u) = \int_Q [V(T,x)-\xi(x)]^2 dx + \beta \int_0^T |\ u(t)\ |dt, \quad \beta > 0, \tag{4}$$

где $\xi(x) \in H(Q)$ – заданная функция, принимает возможное наименьшее значение.

Необходимое и достаточное условия оптимальности управления u(t), полученное на основе принципа максимума, приводят к дифференциальным соотношениям

$$\begin{aligned} &\beta - \int_Q g(x)\omega(t,x)dx \cdot f_u(t,u(t)) = 0, \\ &-\int_Q g(x)\omega(t,x)dx \cdot f_{uu}(t,u(t)) < 0, \end{aligned} \tag{5}$$

где $\omega(t,x)$ является единственным обобщенным решением сопряженной краевой задачи

$$\omega_t + AV = 0, \quad x \in Q, 0 \le t < T,$$

$$\omega(T,x) + 2[V(T,x)-\xi(x)] = 0, x \in Q,$$

$$\Gamma\omega(t,x) = 0, x \in \gamma, \quad 0 \le t < T. \tag{6}$$

В соотношениях (5) дифференциальные равенство и неравенство в частных производных должны выполняться одновременно на оптимальном управлении. Эти условия при произвольно заданной функции f(t,u) трудно проверяемы и определение оптимального управления $u^0(t)$ является довольно сложной задачей.

Заметим, что для функции f(t,u), в силу ее однозначности относительно управления u(t), условие

$$f_u(t,u) \ne 0 \tag{7}$$

выполняется для любого $t \in [0,T]$. Тогда из равенства

$$f(t,u(t)) = q(t) \tag{8}$$

находим, что

$$u(t) = \sigma[t,q(t)], \tag{9}$$

где $\sigma: H(0,T) \to H(0,T)$ – взаимно однозначное ($\forall t \in [0,T]$) отображение. Далее, согласно (8) и (9), задачу оптимизации (1)–(4) преобразуем к следующей линейно-выпуклой задаче оптимизации, где требуется минимизировать функционал

$$J(q) = \int_Q \|V(T,x) - \xi(x)\|^2 dx + \beta\int_0^T |\sigma[t,q(t)]| dt, \beta > 0, \tag{10}$$

на множестве решений краевой задачи

$$\begin{aligned} &V_t - AV = g(x)q(t), \quad x \in Q, \quad 0 < t \le T,\\ &V(0,x) = \psi(x), \quad x \in Q,\\ &\Gamma V(t,x) = 0, \quad x \in \gamma, \quad 0 < t \le T. \end{aligned} \tag{11}$$

Если при этом функция $\sigma[t,q(t)]$ – выпуклая по функциональной переменной q, то функционал (10) является строго выпуклым и достигает минимального значения на единственном элементе.

Для линейно-выпуклой задачи оптимизации (10)–(11) условия оптимальности имеют вид:

$$\begin{aligned} &\beta\sigma_q(t,q) - \int_Q g(x)\omega(t,x)dx = 0,\\ &-\beta\sigma_{qq}(t,q) < 0, \end{aligned} \tag{12}$$

где функция $\omega(t,x)$ является единственным обобщенным решением краевой задачи (6). Нетрудно показать, что согласно условиям оптимальности (12), оптимальное управление $q^0(t)$ определяется как решение нелинейного интегрального уравнения

$$\beta\eta[t,q(t)] + \sum_{n=1}^{\infty} G_n(T,t)\int_0^T G_n(T,\tau)q(\tau)d\tau = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(T,t)h_n, \tag{13}$$

где $\eta[t,q(t)] = \sigma_q[t,q(t)]$, $G_n(T,t) = g_n e^{-\lambda_n(T-t)}$, $h_n = \xi_n - e^{-\lambda_n T}\psi_n$,

Из (12) следует, что $\eta[t,q(t)]$ удовлетворяет условию $\eta[t,q(t)]>0$. Поэтому из равенства

$$\eta[t,q(t)] = \upsilon(t) \tag{14}$$

управление q(t) определяется однозначно, т.е. существует взаимно однозначное $(\forall t \in [0,T])$ отображение $\mu : H(0,T) \to H(0,T)$ такое, что

$$q(t) = \mu[t,\upsilon(t)]. \tag{15}$$

Согласно равенствам (14) и (15) уравнения (13) приводим к нелинейному интегральному уравнению следующего вида:

$$\upsilon(t) = \frac{1}{\beta}\sum_{n=1}^{\infty} G_n(T,t)[h_n - \int_0^T G_n(T,\tau)\mu[\tau,\upsilon(\tau)]d\tau]. \tag{16}$$

Если выполняются условия

$$\|\mu(t,\upsilon) - \mu(t,\tilde{\upsilon})\|_H \le L\|\upsilon - \tilde{\upsilon}\|_H, \qquad TL\|g(x)\|_H^2 < \beta,$$

то, используя методику, изложенную в работе [2], нетрудно показать, что нелинейное интегральное уравнение (16) однозначно разрешимо в гильбертовом пространстве H(0,T).

Пусть $\upsilon^0(t)$ – решение нелинейного интегрального уравнения (16). Тогда, согласно (15), оптимальное управление определяется по формуле:

$$q^0(t) = \mu[t,\upsilon^0(t)].$$

Минимальное значение функционала (10), соответствующее оптимальному управлению $q^0(t)$, вычисляется по формуле

$$J(q^0) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[-h_n + \int_0^T G_n(T,\tau)q^0(\tau)d\tau\right]^2 + \beta\int_0^T \sigma^2[t,q^0(t)]dt.$$

Поскольку преобразование, называемое “выпуклым преобразованием”, задачи нелинейного оптимального управления тепловыми процессами (1)–(4) к линейно-выпуклой задаче оптимизации (10)–(11), однозначное, то, используя решение последней, нетрудно получить решения исходной задачи. Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема. Пусть выполнены условия:

1. Отображение $u \to f(t,u)$ является взаимно однозначным $(\forall t \in [0,T])$ и обратное ему отображение $\sigma(t,q)$ выпукло по функциональному аргументу q;

2. Отображение $\mu : \upsilon \to \mu(t,\upsilon)$ по функциональному аргументу $\upsilon$ удовлетворяет условию Липщица

$\|\mu(t,\upsilon) - \mu(t,\tilde{\upsilon})\|_{H} \le L\|\upsilon - \tilde{\upsilon}\|_{H}$;

3. Функция g(x) и постоянные T, L такие, что

$TL\|g(x)\|_{H}^{2} < \beta$.

Тогда как линейно-выпуклая задача оптимизации (9)–(10), так и исходная задача оптимизации (1)–(4) имеет единственное решение.

**Литература**

1. *Михайлов В.П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука, 1983. – 424 с.
2. *Керимбеков А.* Приближенное решение обобщенной линейно-квадратичной задачи оптимизации упругих колебаний // Проблемы автоматики и управления. – Бишкек: Илим, 2002. – С. 48–55.