УДК 517.31 (575.2) (04)

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА-СТИЛЬТЬЕСА ПЕРВОГО РОДА НА ПОЛУОСИ

А.А. Асанов – докт. физ.-мат. наук, проф.
Н.А. Калысова – преподаватель

In this article it was considered the Volterra-Stiltiesa integral equation of the first kind on semi axis. For this integral equation regularization, operator is constructed and the theorem of the existence was proved.

Рассмотрим уравнение

$$\int_{t_0}^{t} K(t,s)u(s)d\varphi(s) = f(t), \qquad t \in [t_0,\infty) \tag{1}$$

где $K(t,s)$, $f(t)$ – известные функции, $u(t)$ – неизвестная функция, $\varphi(s)$ – возрастающая непрерывная функция на $[t_0,\infty)$, интеграл понимается в смысле Стильтьеса [1].

В общем случае уравнение (1) не сводится к интегральным уравнениям Вольтерра, так как интеграл Стильтьеса не всегда сводится к интегралу Римана или интегралу Лебега [1]. Поэтому изучение уравнения (1) представляет самостоятельный интерес. Вопросам исследования интегральных уравнений Вольтерра посвящено большое количество работ (см. например [2–5]).

В [7] изучены вопросы существования и единственности решения для интегральных уравнений Вольтерра-Стильтьеса первого и второго рода. В этой работе исследуются вопросы единственности и регуляризации решения для уравнения (1).

Наряду с уравнением (1) рассмотрим уравнение

$$\varepsilon\upsilon(t,\varepsilon) + \int_{t_0}^{t} K(t,\varepsilon)\upsilon(s,\varepsilon)d\varphi(s) = f(t), \qquad t \in [t_0,\infty) \tag{2}$$

где $\varepsilon > 0$ – малый параметр.

Пусть выполняются следующие условия:

I. При любом фиксированном $t \in [t_0,\infty)$ $K(t,s)$ – непрерывная функция по *s* в $[t_0,t]$, $K(t,t) \geq 0$ при $t \in [t_0,\infty)$ и $K(t,t)$ – непрерывная функция в $[t_0,\infty)$;

II. При $\tau > \eta$ для любых $(\tau,s),(\eta,s) \in G = \{(t,s) : t_0 \leq s \leq t < \infty\}$ справедлива оценка

$$|K(\tau,s) - K(\eta,s)| \leq \ell(s)\int_{\eta}^{\tau} K(s,s)d\varphi(s)$$

где $\ell(t)$ – неотрицательная непрерывная функция на $[t_0,\infty)$ и $\int\limits_{t_0}^{\infty}\ell(s)d\varphi(s)<\infty$.

Обозначим через $C[t_0,\infty)$ линейное пространство всех непрерывных и ограниченных функций на $[t_0,\infty)$. Будем обозначать $\|\bullet\|_C$ норму в $C[t_0,\infty)$, т.е.

$$\|u(t)\|_C=\operatorname*{Sup}_{t\in[t_0,\infty)}|u(t)|.$$

Обозначим через $C_\psi^\gamma[t_0,\infty)$, $0<\gamma\le 1$ линейное пространство всех непрерывных и ограниченных функций *u(t),* определенных на $[t_0,\infty)$ и удовлетворяющих условию

$$|u(t)-u(s)|\le M_0|\psi(t)-\psi(s)|^\gamma,\quad \psi(t)=\int\limits_{t_0}^{t}K(s,s)d\varphi(s)$$

где M_0 – положительная постоянная, зависящая от *u(t).*

Через $C_\psi[t_0,\infty)$ обозначим линейное пространство всех непрерывных и ограниченных функций *u(t),* определенных на $[t_0,\infty)$ и удовлетворяющих условию: функция

$$\omega_u(\delta)=\sup_{|x-\nu|<\delta}\left|u(\psi^{-1}(x))-u(\psi^{-1}(\nu)),\right| \tag{3}$$

является непрерывной в точке $\delta=0$ и $\omega_u(0)=0$, где $\psi^{-1}(x)$ – обратная функция к функции $\psi(t)$.

В дальнейшем используются следующие леммы:

Лемма 1. Пусть $K(t,t)$ – непрерывная функция в $[t_0,\infty)$, $\psi(t)=\int\limits_{t_0}^{t}K(s,s)d\varphi(s)$

$$y(t,\varepsilon)=u(t)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\psi(t)}+\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{t_0}^{t}K(s,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}[\psi(t)-\psi(s)]}[u(t)-u(s)]d\varphi(s),\quad \varepsilon>0 \tag{4}$$

Тогда 1) $K(t,t)>0$ при почти всех $t\in[t_0,\infty)$, $u(t)\in C_\psi[t_0,\infty)$, $u(t_0)=0$, то справедлива оценка

$$\|y(t,\varepsilon)\|_C\le 3\|u(t)\|_C e^{-\frac{1}{\varepsilon^{1-\beta}}}+\omega_u(\varepsilon^\beta) \tag{5}$$

где β – произвольное число из интервала (0,1), $\omega_u(\delta)$ определена по формуле (3).

2) если $u(t)\in C_\psi^\gamma[t_0,\infty)$, $0<\gamma\le 1$, $u(t_0)=0$, $K(t,t)\ge 0$ при $t\in[t_0,\infty)$, то справедлива оценка

$$\|y(t,\varepsilon)\|_C\le M_0C_1\varepsilon^\gamma, \tag{6}$$

где $M_0=\sup\limits_{\substack{t,s\in G\\ t\ne s}}\dfrac{|u(t)-u(s)|}{|\psi(t)-\psi(s)|^\gamma}$, , $C_1=\sup\limits_{\tau\ge 0}(e^{-\tau}\tau^\gamma)+\int\limits_0^\infty e^{-\tau}\tau^\gamma d\tau$.

Доказательство. 1) Пусть $t_0\le t\le\psi^{-1}(\varepsilon^\beta)$, $0<\beta<1$.

Тогда учитывая, что $\left(\int\limits_{t_0}^{t}K(s,s)d\varphi(s)\right)'_{\varphi(t)}=K(t,t)$ (см. [6]), имеем

$$\left|y(t,\varepsilon)\right| = \omega_u(\varepsilon^\beta)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\psi(t)} + \frac{1}{\varepsilon}\omega_u(\varepsilon^\beta)\int_{t_0}^{t} K(s,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(s,s)d\varphi(s)}d\varphi(s) =$$

$$= \omega_u(\varepsilon^\beta)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\psi(t)} + \frac{1}{\varepsilon}\omega_u(\varepsilon^\beta)\int_{t_0}^{t}\left(e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(s,s)d\varphi(s)}\right)'_{\varphi(s)} d\varphi(s) =$$

$$= \omega_u(\varepsilon^\beta)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\psi(t)} + \omega_u(\varepsilon^\beta)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(s,s)d\varphi(s)}\Bigg|_{t_0}^{t} = \omega_u(\varepsilon^\beta). \tag{7}$$

Если $\psi^{-1}(\varepsilon^\beta) \le t \le \infty$, то

$$\left|u(t)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\psi(t)}\right| \le \left\|u(t)\right\|_C e^{-\frac{1}{\varepsilon^{1-\beta}}} \tag{8}$$

$$\Bigg|\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{\psi^{-1}(\psi(t)-\varepsilon^\beta)} K(s,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,\tau)d\tau}[u(t)-u(s)]d\varphi(s) +$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\int_{\psi^{-1}(\psi(t)-\varepsilon^\beta)}^{t} K(s,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,\tau)d\tau}[u(t)-u(s)]d\varphi(s)\Bigg| \le$$

$$\le 2\left\|u(t)\right\|_C\left[e^{-\frac{1}{\varepsilon}[\psi(t)-\psi(\psi^{-1}(\psi(t)-\varepsilon^\beta))]} - e^{-\frac{1}{\varepsilon}[\psi(t)-\psi(t_0)]}\right] + \omega_u(\varepsilon^\beta)\left[e^{-\frac{1}{\varepsilon}[\psi(t)-\psi(t)]} - e^{-\frac{1}{\varepsilon}[\psi(t)-\psi(\psi^{-1}(\psi(t)-\varepsilon^\beta))]}\right] =$$

$$= 2\left\|u(t)\right\|_C e^{-\frac{1}{\varepsilon^{1-\beta}}} + \omega_u(\varepsilon^\beta). \tag{9}$$

Учитывая (7), (8), (9), из (4),получаем оценку (5).

2) Если $u(t)\in C_\psi^\gamma[t_0,\infty)$, то, учитывая $\left(\int_s^t K(\tau,\tau)d\varphi(s)\right)'_{\varphi(s)} = -K(s,s)$ из (4), имеем

$$\left|y(t,\varepsilon)\right| \le M_0(\psi(t))^\gamma e^{-\frac{1}{\varepsilon}\psi(t)} + \frac{M_0}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}\frac{1}{\varepsilon}e^{-\frac{1}{\varepsilon}[\psi(t)-\psi(s)]}K(s,s)[\psi(t)-\psi(s)]^\gamma d\varphi(s)$$

Отсюда, сделав подстановку

$$\tau = \frac{1}{\varepsilon}[\psi(t)-\psi(s)], \quad d\tau = \left(\frac{1}{\varepsilon}[\psi(t)-\psi(s)]\right)'_{\varphi(s)} d\varphi(s) = -\frac{1}{\varepsilon}K(s,s)d\varphi(s),$$

имеем $\left|y(t,\varepsilon)\right| \le M_0(\psi(t))^\gamma e^{-\frac{1}{\varepsilon}\psi(t)}\varepsilon^\gamma + \dfrac{M_0}{\varepsilon}\displaystyle\int_0^{-\frac{1}{\varepsilon}[\psi(t)-\psi(t_0)]} e^{-\tau}\varepsilon^\gamma\tau^\gamma d\tau \le M_0C_1\varepsilon^\gamma$.

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Пусть выполняются условия а) и б)

$$H(t,s,\varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon}[K(t,s)-K(s,s)]e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,\tau)d\varphi(\tau)} - \frac{1}{\varepsilon^2}\int_s^t K(\tau,\tau)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,\tau)d\varphi(\tau)}[K(t,s)-K(\tau,s)]d\varphi(\tau), \tag{10}$$

где $(t,s)\in G,\quad \varepsilon>0$. Тогда справедлива оценка

$$H(t,s,\varepsilon)\le \ell(s) \tag{11}$$

Доказательство. Учитывая условия а) и б) и $\left(\int_s^t K(\nu,\nu)d\varphi(\nu)\right)'_{\varphi(\tau)}=-K(\tau,\tau)$ (см. [6]), имеем

$$\left|H(t,s,\varepsilon)\right|\le \frac{1}{\varepsilon}\ell(s)\left\{\int_s^t K(\nu,\nu)d\varphi(\nu)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\tau,\tau)d\varphi(\tau)}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\varepsilon^2}\int_s^t K(\tau,\tau)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K(\nu,\nu)d\varphi(\nu)}\left(\int_\tau^t K(\nu,\nu)d\varphi(\nu)\right)d\varphi(\tau)\right\}\le \ell(s)$$

Лемма 2 доказана.

Теорема. Пусть выполняются условия а) и б), $\psi(t)=\int_{t_0}^t K(s,s)d\varphi(s)$, $t\in[t_0,\infty)$.

Тогда 1) если $K(t,t)>0$ при почти всех $t\in[t_0,\infty)$ уравнение (1) имеет решение $u(t)\in C_\psi[t_0,\infty)$ и $u(t_0)=0$, то решение уравнения (2) при $\varepsilon\to 0$ сходится по норме $C[t_0,\infty)$ к u(t).

При этом справедлива оценка

$$\left\|\upsilon(t,\varepsilon)-u(t)\right\|_C\le 3C_2\left\|u(t)\right\|_C e^{-\frac{1}{1-\beta}}+C_2\omega_u(\varepsilon^\beta), \tag{12}$$

где β – произвольное число из (0,1), $\omega_u(\delta)$ определена по формуле (3),

$$C_2=\exp\left[\int_{t_0}^\infty \ell(s)d\varphi(s)\right].$$

2) если $K(t,t)\ge 0$ при почти всех $t\in[t_0,\infty)$ уравнение (1) имеет решение $u(t)\in C_\psi^\gamma[t_0,\infty)$, $0<\gamma\le 1$ и $u(t_0)=0$, то решение $\upsilon(t,\varepsilon)$ уравнение (2) при $\varepsilon\to 0$ сходится по норме $C[t_0,\infty)$ к u(t). При этом справедлива оценка

$$\left\|\upsilon(t,\varepsilon)-u(t)\right\|_C\le M_1\varepsilon^\gamma, \tag{13}$$

где $M_1=M_0C_1C_2$, M_0 и C_1 определены в лемме 1.

Доказательство. В уравнении (2) сделаем замену

$$\upsilon(t,\varepsilon)=u(t)+\xi(t,\varepsilon) \tag{14}$$

где $u(t)$ – решение уравнения (1).

$$\xi(t,\varepsilon)+\int_{t_0}^t K(s,s)\xi(s,\varepsilon)d\varphi(s)=-\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^t [K(t,s)-K(s,s)]\xi(s,\varepsilon)d\varphi(s)-u(t) \tag{15}$$

Отсюда, используя резольвенту ядра $[-K(s,s)/\varepsilon]$ (см. [7]) из (15), получим

$$\xi(t,\varepsilon)=\int_{t_0}^t H(t,s,\varepsilon)\xi(s,\varepsilon)d\varphi(s)-y(t,\varepsilon)\ , \tag{16}$$

где $y(t,\varepsilon)$ определена по формуле (4) и $H(t,s,\varepsilon)$ – по (10).

Учитывая лемму 2, из (16) имеем

$$|\xi(t,\varepsilon)| \le \int_{t_0}^{t} \ell(s)|\xi(s,\varepsilon)|d\varphi(s) - |y(t,\varepsilon)|, \quad t \in [t_0,\infty) \tag{17}$$

В силу обобщенного неравенства Гронуолла-Беллмана [7], из (17) имеем

$$|\xi(t,\varepsilon)| \le |y(t,\varepsilon)| \exp\left(\int_{t_0}^{t} \ell(s)d\varphi(s)\right).$$

Учитывая леммы 1, из последней оценки получим требуемые оценки (12) и (13).
Теорема доказана.

Следствие 1. Пусть выполняются условия а), б) и $\psi(t) = \int_{t_0}^{t} K(s,s)d\varphi(s)$, $t \in [t_0,\infty)$.

Тогда 1) если $K(t,t) > 0$ при почти всех $t \in [t_0,\infty)$, то решение уравнения (1) в пространстве $C_\psi[t_0,\infty)$ единственно;

2) если существует $\delta \in (t_0,\infty)$ такие, что $K(t,t) > 0$ при почти всех $t \in (t_0,\delta)$, то решение уравнения (1) в пространстве $C_\psi^\gamma[t_0,\infty)$, $0 < \gamma \le 1$ единственно;

Доказательство. 1) Пусть $u(t)$ – ненулевое непрерывное и ограниченное на $[t_0,\infty)$ решение уравнения (1) при $f(t) \equiv 0$.

Тогда $\left|\int_{t_0}^{t} K(s,s)u(s)d\varphi(s)\right| \le \int_{t_0}^{t} |K(t,s) - K(s,s)||u(s)|d\varphi(s)$.

Отсюда, по условию и в силу теоремы о среднем, получим

$$|u(t^*)| \le \int_{t_0}^{t} \ell(s)|u(s)|d\varphi(s), \quad t^* \in [t_0,t]$$

Переходя к пределу при $t \to t_0$ получим $u(t_0) = 0$. Тогда из оценки (12) получим $\|u(t)\|_C \le 2M\omega_u(\varepsilon^\beta)$, где $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, ε_0 – достаточно малое фиксированное число.

Следовательно, $\|u(t)\|_C = 0$ т.е. $u(t) = 0$ при $t \in [t_0,\infty)$.

2) Вторая часть леммы доказывается аналогично.

Литература

1. *Натансон И.П.* Теория функций вещественной переменной / Под ред. В.В. Абгарян. – М.: Наука, 1974.
2. *Трикоми Ф.* Интегральные уравнения. – М.: ИЛ, 1960.
3. *Bughgeim A.L.* Volterra Equations and Inverse Problems. – VSP, Utrecht-Tokyo, 1999. – 204 p.
4. *Denisov A.M.* Elements of the Theory of Inverse Problems. – VSP, Utrecht-Tokyo, 1999. – 272 p.
5. *Asanov A.A.* Regularization, Uniqueness and Existence of Solutions of Volterra Equations of the first kind. – VSP, Utrecht-Tokyo, 1998. – 276 p.
6. *Асанов А.А.* Производная функция по возрастающей функции // Табигый илимдер журналы Манас университети. – Бишкек. – 2001. – Вып. 1. – С. 19–45.
7. *Асанов А.А.* Интегральные уравнения Вольтерра-Стильтьеса второго и первого рода // Табигый илимдер журналы Манас университети. – Бишкек. – 2002. – Вып. 2. – С. 79–95.