УДК 517.9 (575.2) (04)

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО АРГУМЕНТА К ИССЛЕДОВАНИЮ ГЛОБАЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ И ВЫЯВЛЕНИЮ ИНЫХ СВОЙСТВ РЕШЕНИЙ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

С.Н. Алексеенко – докт. физ.-мат. наук

Early the method of an additional argument was applied on the whole to prove the local solvability of differential equations of first order. In this case initial equations are transformed to integral equations with respect to new unknown functions having one more argument. These integral equations are convenient to prove the local solvability, but not suit to establish the global solvability and to reveal specific properties. Here, to this purpose a differential system with an additional argument is presented. This differential system is equivalent to the integral one, but more convenient to investigations directed above. Also, the described approach is used to prove the global solvability one problem from one-dimensional gas dynamics.

Для уточнения условий разрешимости дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений первого порядка вида

$$\partial_t u(t,x) + a(t,x,u(t,x))\partial_x u(t,x) = f(t,x,u(t,x)) \tag{1}$$

с успехом применялся, среди прочих, метод дополнительного аргумента [1–4]. Он не заменяет собой другие известные методы, а дополняет их, позволяя во многих случаях более точно определить условия разрешимости в исходных координатах.

Пусть для уравнения (1) заданы начальные данные

$$u(0,x)=\varphi(x). \tag{2}$$

В соответствии с методом дополнительного аргумента вводится расширенная система интегральных уравнений

$$\eta(s,t,x) = x - \int_s^t a(\nu,\eta(\nu,t,x),w(\nu,t,x))d\nu, \tag{3}$$

$$w(s,t,x) = \varphi\Big(x - \int_0^t a(\nu,\eta(\nu,t,x),w(\nu,t,x))d\nu\Big) + \int_0^s f(\nu,\eta(\nu,t,x),w(\nu,t,x))d\nu. \tag{4}$$

Определяемая из этой системы интегральных уравнений функция $w(s,t,x)$при $s = t$ дает решение исходной задачи Коши (1), (2). Система (3), (4) удобна для доказательства локального существования решения задачи Коши (1), (2). Но определение условий глобальной разрешимости и выявление специфических особенностей решений на основе исследования системы (3), (4) намного сложнее. Это можно видеть, в частности, на примере доказательства глобальной разрешимости, изложенного в [3]. Там исходная дифференциальная система была вначале соответствующим образом преобразована. Вообще, во многих случаях изучение дифференциальных систем предоставляет большие возможности для выявления специфических особенностей решения, чем изучение интегральных систем. Поэтому приведем здесь аналог системы (3), (4) в дифференциальной форме и рассмотрим пример использования специфических свойств дифференциального уравнения.

В обычной записи характеристическая система для уравнения (1) с начальным условием (2) имеет вид:

$$\frac{dx(t,x_0)}{dt} = a(t,x(t,x_0),u(t,x_0)),\quad \frac{du(t,x_0)}{dt} = f(t,x(t,x_0),u(t,x_0)),$$

где x_0 та точка на оси x, из которой исходит характеристика.

Сущность метода дополнительного аргумента состоит в том, что вводится расширенная характеристическая система:

$$\frac{d\eta(s,t,x)}{ds} = a(s,\eta(s,t,x),w(s,t,x)), \tag{5}$$

$$\frac{dw(s,t,x)}{ds} = f(s,\eta(s,t,x),w(s,t,x)), \tag{6}$$

с дополнительными условиями

$$\eta(t,t,x) = x, \tag{7}$$

$$w(0,t,x) = \varphi(\eta(0,t,x)). \tag{8}$$

Непосредственным дифференцированием уравнений (3), (4) и интегрированием уравнений (5), (6) с учетом условий (7), (8) показывается, что системы (3), (4) и (5), (6) следуют одна из другой. Подстановка значений $s = t$ и $s = 0$ в (4) показывает, что для решений системы (3), (4) выполняются условия (7), (8). Таким образом, приходим к выводу, что функция $w(s,t,x)$ при $s = t$ дает решение задачи Коши (1), (2).

Важной особенностью системы (5), (6) является то, что в ней переменные s, t, x независимы. Точнее s является независимой переменной, а t, x – независимыми параметрами, а значит, с системой уравнений (5), (6) можно обращаться как с системой обыкновенных дифференциальных уравнений и пользоваться всеми известными приемами решения таких уравнений.

Для примера рассмотрим систему уравнений одномерного изоэнтропического движения идеального газа в случае баротропных процессов [5]

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{P'(\rho)}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0,\qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} + u\frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \tag{9}$$

с начальными данными:

$$u(0,x) = \varphi_1(x);\quad \rho(0,x) = \varphi_2(x), \tag{10}$$

где $P=P(\rho)$ – уравнение состояния. Преобразуя систему (9) к характеристическому виду, переходя к продолженной системе с помощью дифференцирования по x и вводя инварианты Римана

$$r_1 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\sqrt{P'(\rho)}}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x};\quad r_2 = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\sqrt{P'(\rho)}}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x},$$

придем к следующей системе дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} &\frac{\partial r_1}{\partial t} + \lambda_1\frac{\partial r_1}{\partial x} = -\frac{r_1}{2}F(\rho,r_1,r_2),\\ &\frac{\partial r_2}{\partial t} + \lambda_2\frac{\partial r_2}{\partial x} = -\frac{r_2}{2}F(\rho,r_1,r_2), \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\sqrt{P'(\rho)}}{2}(r_1-r_2)=0,\\ \frac{\partial \rho}{\partial t}+u\frac{\partial \rho}{\partial x}+\frac{\rho}{2}(r_1+r_2)=0,\end{gathered} \tag{12}$$

с начальными данными (10) и

$$\begin{gathered}r_1(0,x)=\varphi'_1(x)+\frac{\sqrt{P'(\varphi_2(x))}}{\varphi_2(x)}\varphi'_2(x)=\Phi_1(x),\\ r_1(0,x)=\varphi'_1(x)-\frac{\sqrt{P'(\varphi_2(x))}}{\varphi_2(x)}\varphi'_2(x)=\Phi_2(x),\end{gathered} \tag{13}$$

где $\lambda_1=u+\sqrt{P'(\rho)}$, $\lambda_2=u-\sqrt{P'(\rho)}$, $F(\rho,r_1,r_2)=(r_1+r_2)+\dfrac{\rho P''(\rho)}{2P'(\rho)}(r_1-r_2)$. См. [6].

Пусть $P(\rho)=\dfrac{\rho^\gamma}{\gamma}$, $1<\gamma\le 3$. В этом случае система (11)–(12) примет вид:

$$\begin{gathered}\frac{\partial r_1}{\partial t}+(u+\rho^{\frac{\gamma-1}{2}})\frac{\partial r_1}{\partial x}=-\alpha r_1^2-\beta r_1r_2,\\ \frac{\partial r_2}{\partial t}+(u-\rho^{\frac{\gamma-1}{2}})\frac{\partial r_2}{\partial x}=-\beta r_2^2-\alpha r_1r_2,\end{gathered} \tag{14}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{2}\rho^{\frac{\gamma-1}{2}}(r_1-r_2),\\ \frac{\partial \rho}{\partial t}+u\frac{\partial \rho}{\partial x}=-\frac{\rho}{2}(r_1+r_2),\end{gathered} \tag{15}$$

где $\alpha=\dfrac{\gamma+1}{4}>0,\quad \beta=\dfrac{3-\gamma}{4}\ge 0.$

Расширенная характеристическая система с дополнительным аргументом для системы (14) запишется следующим образом:

$$\frac{dw_1}{ds}=-\alpha w_1^2-\beta w_1w_3, \tag{16}$$

$$\frac{dw_2}{ds}=-\beta w_2^2-\alpha w_4w_2, \tag{17}$$

$$w_3(s,t,x)=w_2(s,s,x-(u+\rho^{\frac{\gamma-1}{2}})(\mathrm{t}-\mathrm{s})), \tag{18}$$

$$w_4(s,t,x)=w_1(s,s,x-(u-\rho^{\frac{\gamma-1}{2}})(\mathrm{t}-\mathrm{s})), \tag{19}$$

$$w_1(0,t,x)=\Phi_1(x-(u+\rho^{\frac{\gamma-1}{2}})t)=:\mathrm{W}_{10}, \tag{20}$$

$$w_2(0,t,x)=\Phi_2(x-(u-\rho^{\frac{\gamma-1}{2}})t)=:\mathrm{W}_{20}. \tag{21}$$

Соответственно, система (15) примет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{2}[w_2(t,t,x)-w_1(t,t,x)]\rho^{\frac{\gamma-1}{2}}, \tag{22}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+u\frac{\partial\rho}{\partial x}=-\frac{\rho}{2}[w_1(t,t,x)+w_2(t,t,x)]. \tag{23}$$

Сделаем в системе (16), (17) замену

$$w_1(s,t,x) = \frac{W_{10}\sigma_1(s,t,x)}{\alpha W_{10}\int_0^s \sigma_1(\nu,t,x)d\nu+1}, \qquad \sigma_1(0,t,x) = 1,$$

$$w_2(s,t,x) = \frac{W_{20}\sigma_2(s,t,x)}{\beta W_{20}\int_0^s \sigma_2(\nu,t,x)d\nu+1}, \qquad \sigma_2(0,t,x) = 1. \tag{24}$$

Получим $\frac{d\sigma_1}{ds}=-\beta\sigma_1 w_3;\ \frac{d\sigma_2}{ds}=-\alpha\sigma_2 w_4$, откуда следует

$$\sigma_1(s,t,x)= e^{-\beta\int_0^s w_3(\nu,t,x)d\nu}, \quad \sigma_2(s,t,x)= e^{-\alpha\int_0^s w_4(\nu,t,x)d\nu}.$$

Подставив эти соотношения в (24), придем к уравнениям

$$w_1(s,t,x) = \frac{\Phi_1(x-(u+\rho^{\frac{\gamma-1}{2}})t)e^{-\beta\int_0^s w_3(\nu,t,x)d\nu}}{\alpha\Phi_1(x-(u+\rho^{\frac{\gamma-1}{2}})t)\int_0^s e^{-\beta\int_0^\tau w_3(\nu,t,x)d\nu}d\tau+1}, \tag{25}$$

$$w_2(s,t,x) = \frac{\Phi_2(x-(u-\rho^{\frac{\gamma-1}{2}})t)e^{-\alpha\int_0^s w_4(\nu,t,x)d\nu}}{\beta\Phi_2(x-(u-\rho^{\frac{\gamma-1}{2}})t)\int_0^s e^{-\alpha\int_0^\tau w_4(\nu,t,x)d\nu}d\tau+1}. \tag{26}$$

Из этих уравнений и уравнений (18), (19) при условии $\Phi_1 \ge 0$, $\Phi_2 \ge 0$ видно, что функции w_1 и w_2 удовлетворяют неравенствам

$$0 \le w_1(s,t,x) \le \Phi_1, \quad 0 \le w_2(s,t,x) \le \Phi_2$$

при любых t, x и $0 \le s \le t$.

Для задачи Коши (22), (23), (10) также введем расширенную характеристическую систему с дополнительным аргументом τ:

$$\frac{dv_1(\tau,t,x)}{d\tau} = \frac{1}{2}[w_2(t,t,x-\int_\tau^t v_1(\nu,t,x)d\nu) - w_1(t,t,x-\int_\tau^t v_1(\nu,t,x)d\nu)]\rho^{\frac{\gamma-1}{2}}, \tag{27}$$

$$\frac{dv_2(\tau,t,x)}{d\tau} = -\frac{v_2(\tau,t,x)}{2}[w_2(t,t,x-\int_\tau^t v_1(\nu,t,x)d\nu) + w_1(t,t,x-\int_\tau^t v_1(\nu,t,x)d\nu)], \tag{28}$$

$$v_1(0,t,x) = \varphi_1(x-\int_0^t v_1(\nu,t,x)d\nu), \tag{29}$$

$$v_2(0,t,x) = \varphi_2(x-\int_0^t v_1(\nu,t,x)d\nu). \tag{30}$$

Из (26), (28) получим

$$v_2(\tau,t,x) = \varphi_2(x-\int_0^t v_1(\nu,t,x)d\nu)\, e^{-\int_0^\tau A(\delta,t,x)d\delta}, \tag{31}$$

где $A(\tau,t,x) = \frac{1}{2}[w_2(t,t,x-\int_\tau^t v_1(\nu,t,x)d\nu) + w_1(t,t,x-\int_\tau^t v_1(\nu,t,x)d\nu)]$.

Как было показано, w_1 и w_2 больше нуля, поэтому $v_2(\tau,t,x)$ ограничена при всех t,x и $\tau < t$. Кроме того $\rho(t,x) = v_2(t,t,x) > 0$. Подставив (31) в (27), получим одно уравнение для определения v_1:

$$\frac{dv_1(\tau,t,x)}{d\tau} = \frac{1}{2}B(\tau,t,x)[\varphi_2(x-\int_0^t v_1(\nu,t,x)d\nu)]^{\frac{\gamma-1}{2}}\, e^{-\frac{\gamma-1}{2}\int_0^\tau A(\delta,t,x)d\delta}, \tag{32}$$

где $B(\tau,t,x) = w_2(t,t,x-\int_\tau^t v_1(\nu,t,x)d\nu) - w_1(t,t,x-\int_\tau^t v_1(\nu,t,x)d\nu)$.

Из (32) вытекает, что функция $v_1(\tau,t,x)$ также ограничена при всех t,x и $\tau < t$. Учитывая, что $u(t,x) = v_1(t,t,x)$, $\rho(t,x) = v_2(t,t,x)$, получаем замкнутую систему уравнений: (25), (26), (18), (19) и

$$v_1(\tau,t,x) = \varphi_1(x-\int_0^t v_1(\nu,t,x)d\nu) + \frac{1}{2}[\varphi_2(x-\int_0^t v_1(\nu,t,x)d\nu)]^{\frac{\gamma-1}{2}}\int_0^\tau B(\mu,t,x)\, e^{-\frac{\gamma-1}{2}\int_0^\mu A(\delta,t,x)d\delta}\, d\mu, \tag{33}$$

$$\rho(t,x) = \varphi_2(x-\int_0^t v_1(\nu,t,x)d\nu)\, e^{-\frac{1}{2}\int_0^t A(\delta,t,x)d\delta}. \tag{34}$$

Локальная разрешимость системы уравнений (25), (26), (18), (19), (33), (34) устанавливается с помощью метода последовательных приближений, а затем с учетом полученных глобальных оценок для w_1, w_2, v_1, v_2 доказывается глобальная разрешимость. Факт глобальной разрешимости задачи Коши для системы уравнений (9) с $P(\rho)=\frac{\rho^\gamma}{\gamma}$, $1 < \gamma \le 3$ был ранее установлен другим методом в [7].

Литература

1. *Иманалиев М.И., Алексеенко С.Н.* К теории нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных типа Уизема // ДАН. – 1992. – Т. 323. – № 3. – С. 410–414.
2. *Иманалиев М.И., Алексеенко С.Н.* К теории систем нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных типа Уизема // ДАН. – 1992. – Т. 325. – № 6. – С. 1111–1115.
3. *Иманалиев М.И., Алексеенко С.Н.* К теории нелинейных уравнений с дифференциальным оператором типа полной производной по времени // ДАН. – 1993. – Т. 329. – № 5. – С. 543–546.
4. *Иманалиев М.И., Алексеенко С.Н.* К вопросу существования гладкого ограниченного решения для системы двух нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка // Докл. РАН. – 2001. – Т. 379. – № 1. – С. 16–21.
5. *Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. – М.: Наука, 1968. – 592 с.
6. *Алексеенко С.Н., Панков П.С., Косов С.Г.* Применение метода дополнительного аргумента к решению задачи Коши для системы уравнений изоэнтропического движения баротропного газа // Исслед. по интегро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек: Илим, 2004. – Вып.33. – С. 43–56.
7. *Lax P.D.* Development of singularities in solutions on nonlinear hyperbolic partial differential equations // J. Math. Phys. – 1964. – № 5. – P. 611–613.