УДК 622.011.4; 622.023

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ АНИЗОТРОПНОГО МАССИВА **С ТРЕХМЕРНЫМ ТРАНСПОРТНЫМ СООРУЖЕНИЕМ**

М.КУЛЬБАЕВ
E.mail. ksucta@elcat.kg

Макалада вариациялык түрдөгү акыркы элементтер ыкмасынын негизинде «жасалгалоо-топурак» системасынын амплитудалык-жыштык мүнөздөмөсү изилденген. Өздүк маанилер жөнүндөгү жалпы көйгөй Якоби алгоритминин схемасына негизделген мейкиндиктеги итерациялык ыкмасы менен чечилген.

В статье исследованы амплитудно-частотные характеристики системы «обделка- грунт» на основе вариационной формулировки метода конечных элементов. Обобщенная проблема о собственных значениях решается итерационным методом в подпространстве, основанным на схеме алгоритма Якоби.

In the article researched amplitude-frequency characteristic systems decoration material on base formulation of method of last element. The generalized problem about one's meaning decide of iterative method in subspace Base on diagram of algorithm of Yakoby.

Создание надежных методов расчета устойчивости транспортных подземных сооружений конечных размеров в сложных грунтовых условиях под действием статических и динамических нагрузок является весьма сложной задачей. В условиях Казахстана с развитой горнодобывающей промышленностью, с увеличением глубины горных работ и ухудшением условий разработки месторождений полезных ископаемых требования к обеспечению устойчивости выработок резко повышаются. Кроме того, со строительством Алматинского метрополитена в зоне возможных 9-10-балльных землетрясений нужны надежные рекомендации для обеспечения сейсмостойкости.

Все это вызывает необходимость проведения фундаментальных исследований с привлечением современного аппарата математики и механики деформируемого твердого тела, разработки нетрадиционных аналитических и численных методов решения поставленных задач и создания на их основе программных средств для анализа динамической устойчивости различных проектируемых и строящихся транспортных подземных сооружений различных назначений.

Изучение свободных колебаний транспортных сооружений важно для выяснения влияния физико-механических свойств и геометрических параметров конструктивных элементов и окружающего массива сложного строения на их резонансные амплитудно-частотные характеристики. С другой стороны, при изучении динамической реакции пространственной системы «подземное сооружение-массив горных пород» низшие частоты необходимы для формирования и решения основных разрешающих матричных уравнений движения.

В работе исследуются свободные колебания грунтового массива с трехмерным транспортным подземным сооружением на основе численного метода – метода конечных элементов (МКЭ) – в сочетании с итерационным методом в подпространстве.

Объект исследования – нижнее полупространство с подземным сооружением неглубокого заложения. Породный массив состоит из неоднородных слоев с различными физико-механическими свойствами. Упругое состояние каждого слоя описывается уравнениями обобщенного закона Гука:

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\},$$ (1)

где $\{\sigma\} = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z ......, \tau_{xz}\}^T, \{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, ...\lambda_{xz}\}^T$, $[D] = [d_{ij}], (i, j = 1,2,...,6)$ – матрица упругости массива; модули упругости d_{ij} представляются через упругие постоянные транстропного массива $E_k, \nu_k, G_2, \quad (k = 1,2)$, углов наклона плоскости изотропии φ и наклона продольной оси горизонтального трехмерного транспортного сооружения от линии простирания плоскости изотропии ψ /1, 2/.

Граничные условия: боковые грани и основание расчетной области с сооружением не деформируются – u=v=w=0; внутренний породный контур и обделка свободны от внешних нагрузок - $X_n=Y_n=Z_n=0$. Пространственная расчетная область разбита на 1606 призматических элементов с 2875 узлами.

Система дифференциальных уравнений колебаний для массива с транспортным подземным сооружением можно представить в виде:

$$[M]\{\ddot{U}(t)\} + [C]\{\dot{U}(t)\} + [K]\{U(t)\} = \{R(t)\}, \tag{2}$$

где $\{R(t)\}$ – вектор внешних узловых сил, $\{\ddot{U}(t)\}, \{\dot{U}(t)\}, \{U(t)\}$ – векторы узловых ускорений, скоростей и перемещений, $[M], [C], [K]$ – соответственно, матрицы масс, затухания и жесткости системы.

Матричное уравнение свободных колебаний системы «обделка-грунт» получается из (2), когда эффект демпфирования и воздействие внешних сил отсутствуют, т.е. [C]=0, {R}=0:

$$[M]\{\ddot{U}\} + [K]\{U\} = 0. \tag{3}$$

Матрица жесткости элемента вычисляется с помощью интеграла /3, 4/:

$$[k] = \int_V [B]^T [D][B] dV = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} [B]^T [D][B] \det[J] d\xi\, d\eta\, d\zeta \quad .$$ (4)

Выражение интеграла (4) после применения квадратур Гаусса-Лежандра приводится к виду

$$[k] = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{p} H_i H_j H_k [B]_{ijk}^T [D] [B]_{ijk} \det[J]. \tag{5}$$

Матрица жесткости системы [K] образуется путем суммирования матриц жесткости всех элементов

$$[K] = \sum_{i=1}^{\kappa} [k_i]. \tag{6}$$

Матрица масс системы $[M]$ формируется из матриц масс элементов аналогично матрице жесткости системы. Матрица масс призматического элемента имеет вид /3,4/:

$$[m] = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} H_i H_j H_k \rho [P_{ijk}]^T [P_{ijk}] \det[J], \tag{7}$$

где $[P_{ijk}]$ – матрица, интерполирующая перемещения. Матрица масс системы получается путем суммирования матриц масс всех элементов

$$[M] = \sum_{i=1}^{\kappa} [m_i]. \tag{8}$$

Решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка (3) можно записать в виде:

$$\{U\} = \{\varphi\} \sin(\omega (t - \alpha_0)). \tag{9}$$

Подставляя (9) в (3), получим общую проблему собственных значений

$$[K]\{\varphi\} = \omega^2 [M]\{\varphi\}. \tag{10}$$

Введем обозначение $\lambda = \omega^2$, тогда (10) примет вид:

$$[K]\{\varphi\} = \lambda[M]\{\varphi\}. \qquad (11)$$

Для решения обобщенной проблемы собственных значений использован итеративный метод в подпространстве, основанный на алгоритме метода Якоби и свойствах последовательности Штурма /5/.

При итерационных методах необходимо на каждом шаге анализировать сходимость полученных приближений. Пусть на (k-1) и (k)-шаге итерации вычислены приближенные собственные значения $\lambda_i^{(k)}$ и $\lambda_i^{(k+1)}$, тогда сходимость достигается при

$$\frac{\lambda_i^{(k+1)} - \lambda_i^{(k)}}{\lambda_i^{(k+1)}} \le \varepsilon, \quad (i = 1,2,....,n). \qquad (12)$$

Эффективность выбранного метода объясняется, во-первых, возможностью выбора начального подпространства, достаточно близкого к искомым наименьшим собственным значениям; во-вторых, удобства алгоритма перехода от данного подпространства к другому, обеспечивающему «наилучшее» приближение собственных значений векторов. Кроме того, использование сдвигов и других ускоряющих процедур также способствует увеличению эффективности метода /5/.

При исследовании напряженно-деформированного состояния системы «обделка-грунт» на сейсмическое воздействие первым и необходимым этапом расчета является определение частот и форм собственных колебаний системы. Расчет амплитудно-частотных характеристик системы «обделка-грунт» выполнен итерационным методом в подпространстве, приведенным выше.

Получено 100 первых частот и форм собственных колебаний в частотном диапазоне до 22,2 Гц. В табл. 1 приведены значения низших частот свободных колебаний системы «обделка-грунт». Как видно, спектр собственных частот системы «обделка-грунт» является достаточно плотным.

Таблица 1

Значений низших частот свободных колебаний системы «обделка-грунт»

Номера частот	1	2	3	4	5	6	7	8
ω_i,Гц	1,78	3,09	3,61	3,84	4,31	4,65	5,87	6,13

На рис. 1-8 показаны пространственные формы (моды) собственных колебаний системы «обделка-грунт».

Моды 1 и 2 представляют собой горизонтальные колебания слоя грунта, причем первая мода является кососимметричной, а вторая мода – симметричной. В модах 3-5 более выраженными являются вертикальные колебания. Третья мода является кососимметричной, а 4-5 моды – симметричными. Более высокие формы, показанные на рис. 1-8, представляют собой достаточно сложные колебательные движения грунта и, по-видимому, не вносят существенного вклада при определении сейсмических перемещений, но могут оказывать заметное влияние при нахождении ускорений системы и сейсмических напряжений в конструкции обделки тоннелей.

Как видно, наблюдаются сложные картины деформирования грунтового массива и находящегося в нем подземного сооружения в процессе колебаний, содержащие в себе элементы растяжения, сжатия, изгиба и кручения (см. рис.1-8).

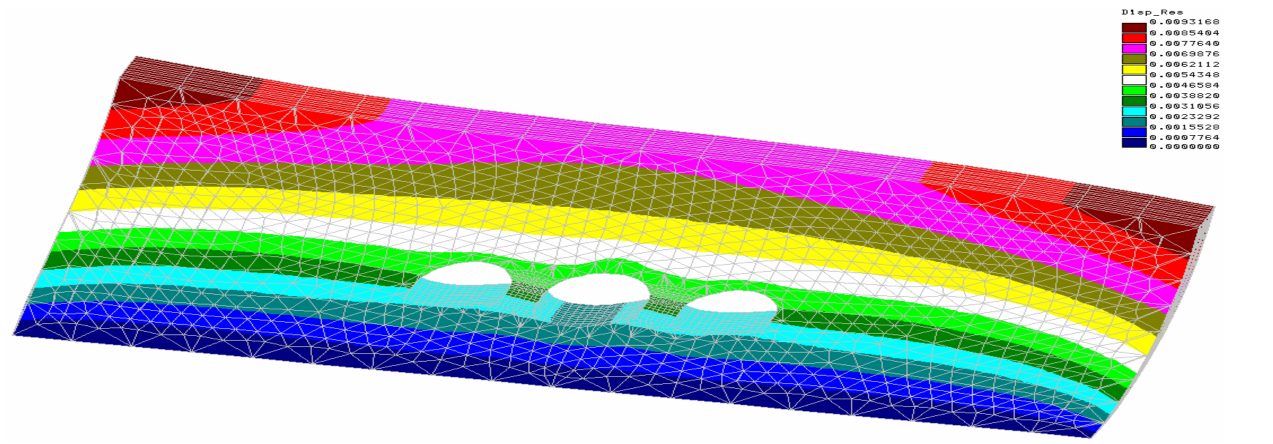

Рис. 1. Первая форма собственных колебаний системы «обделка-грунт»

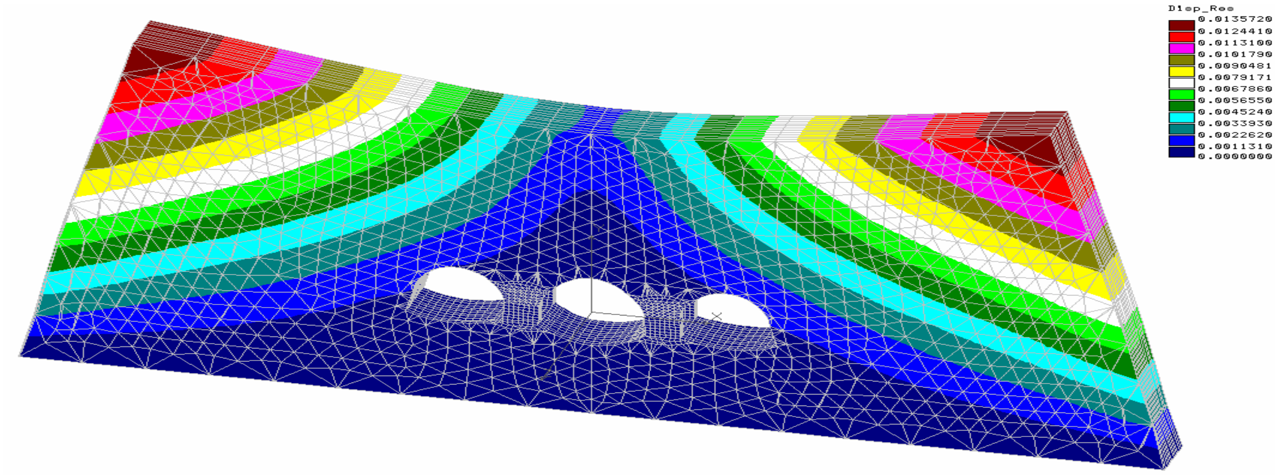

Рис. 2. Вторая форма собственных колебаний системы «обделка-грунт»

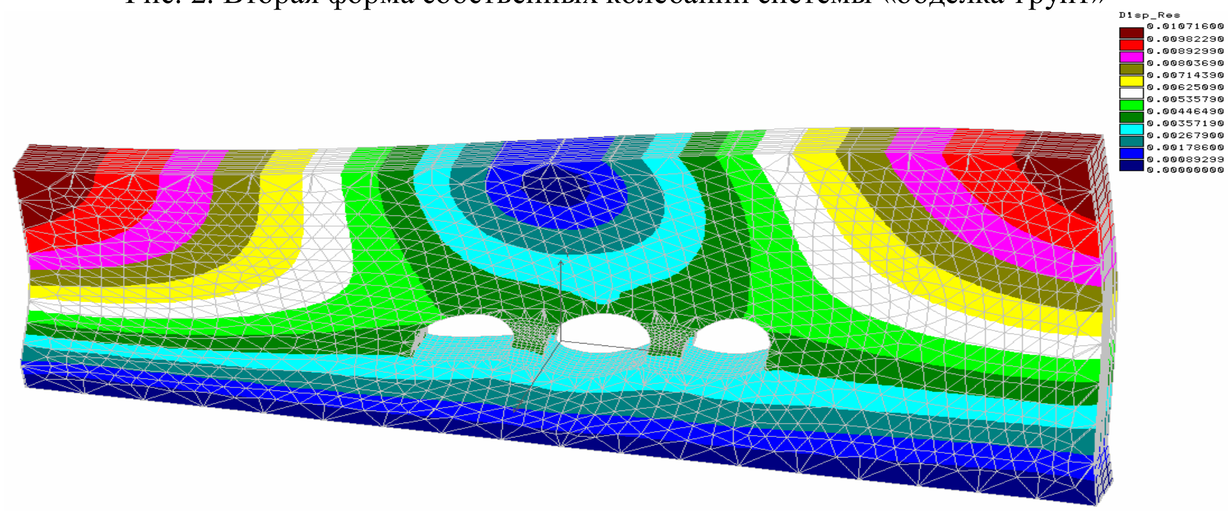

Рис. 3. Третья форма собственных колебаний системы «обделка-грунт»

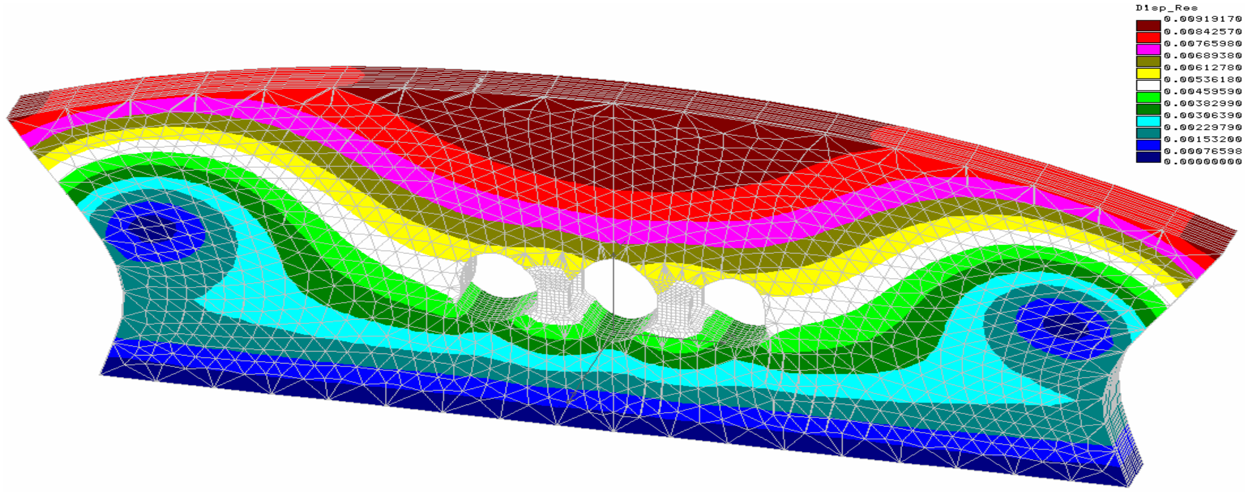

Рис. 4. Четвертая форма собственных колебаний системы «обделка-грунт»

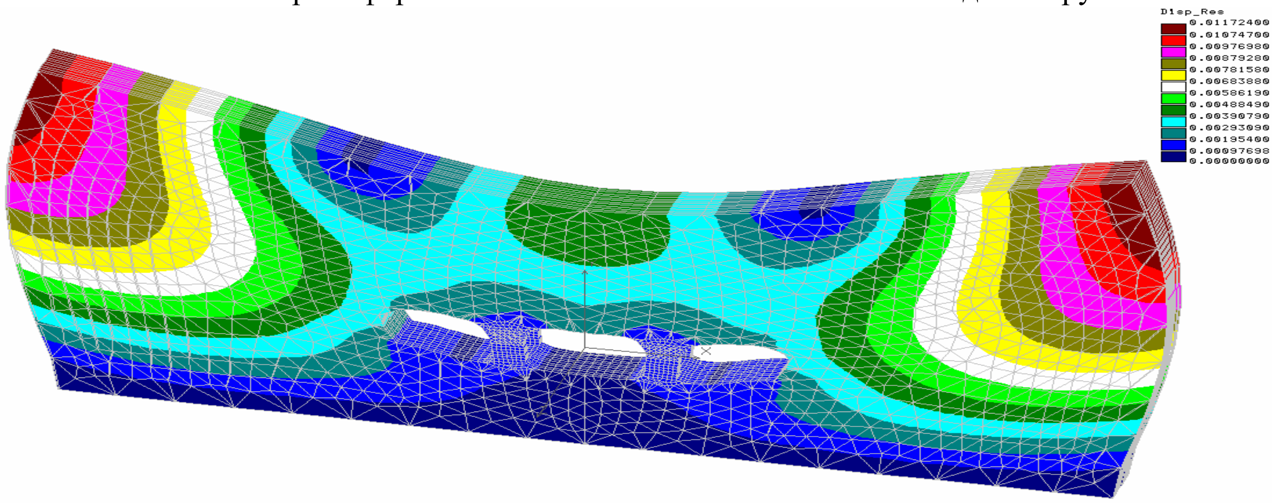

Рис. 5. Пятая форма собственных колебаний системы «обделка-грунт»

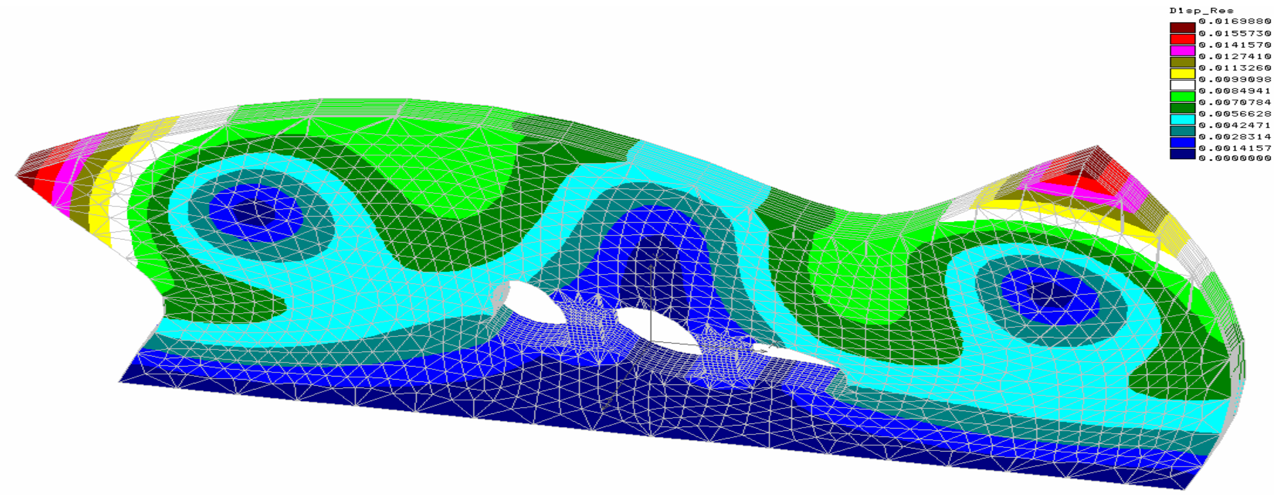

Рис. 6. Шестая форма собственных колебаний системы «обделка-грунт»

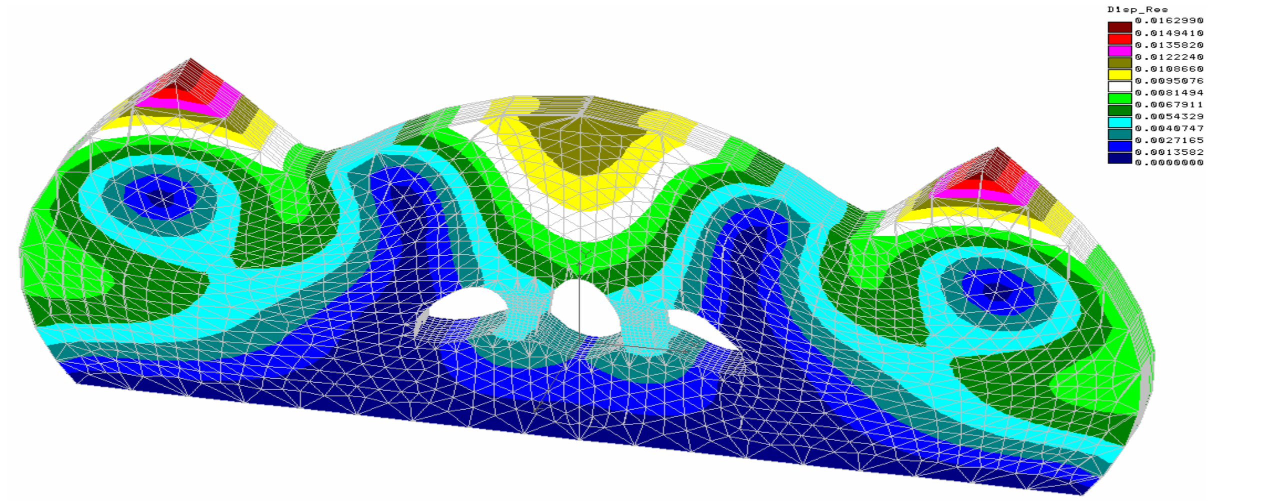

Рис. 7. Седьмая форма собственных колебаний системы «обделка-грунт»

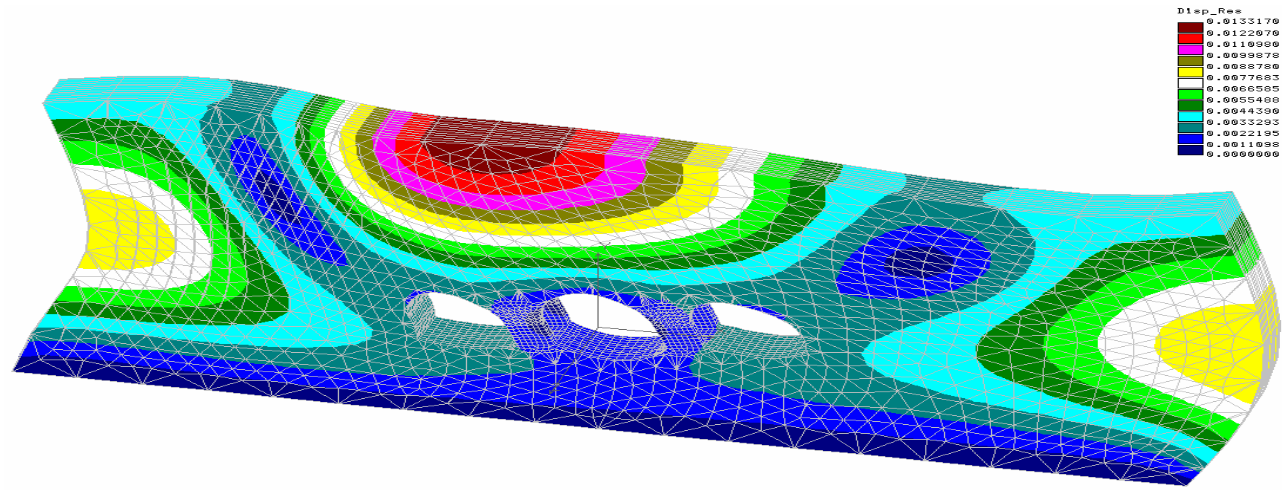

Рис. 8. Восьмая форма собственных колебаний системы «обделка-грунт»

Анализ полученных результатов расчета показывает, что на значения собственных частот и формы колебания влияют многие факторы, в том числе строение грунтового массива, распределение плотностей в разнородных грунтах, способы строительства подземного сооружения, геометрические его параметры.

Список литературы

1. Ержанов Ж.С., Айталиев Ш.М., Масанов Ж.К. Устойчивость горизонтальных выработок в наклонно-слоистом массиве. – Алма-Ата: Наука, 1971. – 160 с.
2. Ержанов Ж.С., Айталиев Ш.М., Масанов Ж.К. Сейсмонапряженное состояние подземных сооружений в анизотропном слоистом массиве. – Алма-Ата: Наука, 1980. – 212 с.
3. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 541 с.
4. Сегерленд Л. Применение метода конечных элементов. - М.: Мир, 1979. - 392 с.
5. Бате К., Вильсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов. – М.: Мир, 1982. – 442 с.