УДК: 51:53

Махамбаева И.У.
КГУ им. Коркыт Ата Республика Казахстан

ВОПРОСЫ УСТОЙЧИВОСТИ ТРЕУГОЛЬНЫХ ТОЧЕК В ПЛОСКОЙ КРУГОВОЙ ЗАДАЧЕ

Для нашего случая нелинейное исследование задачи сводиться к рассмотрению автономной канонической системы дифференциальных уранений с тремя степенями свободы, которой функция Гамильтона H является аналитической функцией обобщенных координат q_i и импульсов p_i $(i = 1,2,3)$ в достаточно малой окрестности положения равновесия $q_i = p_i = 0$.

Полное решение вопроса об устойчивости такой системы все еще остается открытым. Следует заметить, что при изучении вопросов об устойчивости канонических систем, предварительным этапом является нормализация функции Гамильтона H, т.е. приведение ее с помощью канонической замены переменных к наиболее простому виду, называемому нормальной формой. Далее, в зависимости от соотношений между коэффициентами нормальной формы делаются выводы об устойчивости или неустойчивости положения равновесия. Сам процесс нормализации характеризуется большим количеством вычислений и реализуется на практике с помощью ПК.

Уравнения движения частицы в рассматриваемом случае перепишем в гамильтоновой форме:

$$\frac{d\overline{p}_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \overline{p}_i}, \qquad (i = 1,2,3), \qquad (1)$$

где $\overline{q}_i$ суть декартовые координаты частицы $P(x, y, z)$, $\overline{p}_i$ - соответствующие им канонические импульсы, а $H(x, y, z, \overline{p}_1, \overline{p}_2, \overline{p}_3)$ - функция Гамильтона, которая имеет вид

$$H = \frac{1}{2}\left(\overline{p}_1^2 + \overline{p}_2^2 + \overline{p}_3^2\right) + \left(\overline{p}_1^y + \overline{p}_2^x\right) - \frac{Q_1(1-\mu)}{R_1} - \frac{Q_2\mu}{R_2},$$

$$R_\alpha = \sqrt{(x - x_\alpha)^2 + y^2 + z^2}, \quad (\alpha = 1,2), \quad x_1 = -\mu, \ x_2 = 1 - \mu \qquad (2)$$

Получим выражение для функции Гамильтона в возмущенном движении, вводя возмущения

$$q_1 = x - x*, \qquad q_2 = y - y* \quad q_3 = z - z* \qquad (3)$$

$$p_1 = \overline{p}_1 - \overline{p}_1^*, \qquad p_2 = \overline{p}_2 - \overline{p}_2^*, \ p_3 = \overline{p}_3 - \overline{p}_3^*,$$

где величины с индексом “*” отвечают исследуемым точкам либрации. Разлагая функцию Гамильтона (2) в ряд по степеням q_i, p_i, и отбрасывая члены, не зависящие от q_i, p_i, ,получим

$$H = H_2 + H_3 + H_4 + ... \qquad (4)$$

Здесь H_m – однородные полиномы степени m $(m = 2, 3, 4,.....)$ относительно обобщенных координат q_i, и импульсов p_i, так что

$$H_m = \sum_{v_l+\ldots l_3=m} h_{v_1 v_2 v_3 l_1 l_2 l_3} q_1^{v_1} q_1^{v_2} q_3^{v_3} p_1^{l_1} p_2^{l_2} p_3^{l_3} \qquad (5)$$

В дальнейшем будем рассматривать только случай, когда H_2 такова, что характеристическое уравнение линеаризованной системы не имеет корней с ненулевой вещественной частью (в противном случае тривиальное решение неустойчиво по Ляпунову) и ограничимся первыми четырьмя формами в разложении (5). Сначала рассмотрим случай, когда движение частицы происходит в орбитальной плоскости. При этом, полагая $q_3 = p_3 = z_0 = \overline{p}_3^* = 0$ в (3), выполним замену переменных

$$\begin{aligned} &x = x_*^* + q_1, \quad y = y_*^* + q_2, \quad \overline{p}_1 = \overline{p}_1^* + p_1, \ \overline{p}_2 = \overline{p}_2^* + p_2, \\ &q_3 = p_3 = z_0^* = \overline{p}_3^* = 0, \end{aligned} \qquad (6)$$

где

$$\overline{p}_1^{\,*} = \mu 0{,}5\sqrt{2(Q_1^{2/3} + Q_2^{2/3}) - (Q_1^{2/3} - Q_2^{2/3}) - 1},$$

$$\overline{p}_2^* = 0{,}5(Q_2^{2/3} - Q_2^{2/3} + 1) - \mu,$$

Тогда в выражении (4) формы $H_2, H_3 \ и \ H_4$ с учетом (5) и (6) примут следующий вид:

$$H = \frac{1}{2}\left(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2\right) + q_2 p_1 - q_1 p_2 - \frac{Q_1(1-\mu)}{R_1} - \frac{Q_2\mu}{R_2},$$

$$\begin{aligned} H_2 = &\frac{1}{2}\left(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2\right) + p_1 q_2 - p_2 q_1 + h_{200} q_1^2 + \\ &+ h_{020} q_2^2 + h_{002} q_3^2 + h_{110} q_1 q_2 + h_{101} q_1 q_3 + h_{011} q_2 q_3, \\ H_3 = &h_{300} q_1^3 + h_{030} q_2^3 + h_{003} q_3^3 + h_{210} q_1^2 q_2 + h_{201} q_1^2 q_3 + \\ &+ h_{120} q_1 q_2^2 + h_{021} q_2^2 q_3 + h_{102} q_1 q_3^2 + h_{012} q_2 q_3^2 + h_{111} q_1 q_2 q_3, \\ H_4 = &h_{400} q_1^4 + h_{040} q_2^4 + h_{004} q_3^4 + h_{310} q_1^3 q_2 + h_{130} q_1 q_2^3 + \\ &+ h_{103} q_1 q_3^3 + h_{301} q_1^3 q_3 + h_{031} q_2^3 q_3 + h_{013} q_3^3 q_2 + h_{211} q_1^2 \\ &+ h_{121} q_1 q_2^2 q_3 + h_{112} q_1 q_2 q_3^2 + h_{220} q_1^2 q_2^2 + h_{202} q_1^2 q_3^2 + h_{022} q_2^2 q_3^2. \end{aligned} \qquad (7)$$

Но как видно H_2 не является знакоопределенной квадратичной формой, и, следовательно, из устойчивости линейной системы не следует устойчивость полной системы. Нормальная форма будет различной в зависимости от наличия или отсутствия в системе внутреннего резонанса, характеризующегося соотношением

$$k_1\omega_1 + r_2\omega_2 = 0 \qquad (8)$$

где k_1, k_2 – целые числа, удовлетворяющие условию

$0 < |k_1| + |k_2| \le 0 \quad (k = |k_1| + |k_2|)$ – порядок резонанса).

Сначала рассмотрим случай, когда равенство (8) не выполняется. Применяя преобразование Биркгофа и ограничиваясь разложением до четвертого порядка включительно, функцию Гамильтона можно записать в виде:

$$H^{*} = \omega_1 r_1 - \omega_2 r_2 + c_{20} r_1^2 + c_{11} r_1 r_2 + c_{02} r_2^2 \tag{9}$$

Если одновременно выполняются условия (при этом члены третьего порядка уничтожаются полностью, т.е. $H_3^{*} = 0$)

$$k_1\omega_1 + r_2\omega_2 \neq 0$$

$$A(\omega_1, \omega_2) = 0 \tag{10}$$

$$C(\omega_1, \omega_2) = \frac{644\omega_1^4\omega_2^4 - 541\omega_1^2\omega_2^2 + 36}{16(1 - 4\omega_1^2\omega_2^2)(4 - 25\omega_1^2\omega_2^2)} \neq 0 \tag{11}$$

то согласно теореме Арнольда-Мозера положение равновесия устойчиво по Ляпунову[1)]. Однако вопрос остается открытым, если одно из условий (10) и (11) нарушается. [1)]Здесь коэффициенты нормальной формы C_{20}, C_{11}, C_{02} определяются системой формул через коэффициенты (4) исходного гамильтониана. Применение результатов А.П. Маркеева в этом случае позволяет решить вопрос полностью.

Согласно теореме Арнольда-Мозера при одновременном выполнении условий

$$k_1\omega_1 + k_2\omega_2 \neq 0 \tag{12}$$

$$C(\omega_1, \omega_2) = c_{20}\omega_2^2 + c_{11}\omega_1\omega_2 + c_{02}\omega_1^2 \neq 0, \tag{13}$$

где k_1, k_2 - целые числа, удовлетворяющие условию $0 < |k_1| + |k_2| \leq 4$ ($0 = |k_1| + |k_2|$ - порядок резонанса), а c_{ij} - коэффициенты нормальной формы, зависящие от частот ω_1 и ω_2 линей ной системы, для всех значений массового параметра μ из области устойчивости линейной системы всюду сохраняется устойчивость по Ляпунову исходной системы

При резонансе $\omega_1 = 2\omega_2$ нормализованный гамильтониан примет вид

$$H = 2\omega_2 r_1 - \omega_2 r_2 + A(\omega_1, \omega_2) r_2 \sqrt{r_1}\sin(\varphi_1 + 2\varphi_2) + O\left((r_1 + r_2)^2\right), \tag{14}$$

где $\quad A(\omega_1, \omega_2) = -\sqrt{\omega_2\left(x_{1002}^2 + y_{1002}^2\right)}$

В обобщенной фотогравитационной ограниченной плоской задаче трех тел выражение $A(\omega_1, \omega_2)$ имеет вид

$$A(\omega_1, \omega_2) = -\left[\omega_2 \frac{25}{64}\left((1-\mu)\left(0{,}8 \cdot Q_1^{2/3} - Q_{12}\right)Q_{11}/Q_1^{4/3} - \mu\left(0{,}8Q_2^{2/3} - Q_{12}\right)Q_{22}/Q_2^{4/3}\right)^2\right]^{1/2} \tag{15}$$

$$\omega_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[1 - \sqrt{\frac{36\,\mu(1-\mu)\left[2\left(Q_1^{2/3} + Q_2^{2/3}\right) - (Q_{11} - 1)^2 - 1\right]}{4Q_1^{2/3} \cdot Q_2^{2/3}}}\right]^{1/2}$$

которое при положительных значениях Q_1 и Q_2 нигде не обращается в нуль. Откуда следует, что в ограниченной фотогравитационной задаче трех тел в области устойчивости линейной системы треугольные точки либрации всюду устойчивы по Ляпунову, за исключением множества точек, определяемого соотношением (12), для которых реализуется резонанс третьего порядка.

При наличии в системе резонанса четвертого порядка $\omega_1 = 3\omega_2$ с помощью преобразования Биркгофа в исходном гамильтониане уничтожим члены третьей степени. Нормализованный при этом гамильтониан в полярных координатах примет следующий вид:

$$H^* = 3\omega_2 r_1 - \omega_2 r_2 + c_{20} r_1^2 + c_{11} r_1 r_2 + c_{02} r_2^2 +$$
$$+ B(\omega_1, \omega_2) r_2 \sqrt{r_1 r_2} \cos(\varphi_1 + 3\varphi_2) + O(r_1 + r_2)^{5/2}$$

Здесь $B(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{3}\omega_2 \sqrt{3(x_{1003}^2 + y_{1003}^2)}$.

Следует заметить, что если в классической задаче для конкретного значения μ коэффициенты $B(\omega_1, \omega_2), c_{20}, c_{11}$ и c_{02} принимают постоянные значения (что намного упрощается исследование задачи), то в фотогравитационной задаче эти же коэффициенты не остаются постоянными и являются функциями координат x, y или Q_1 и Q_2, вследствие чего задача резко усложняется. Используя результаты А.П. Маркеева получим, что при резонансе четвертого порядка $\omega_1 = 3\omega_2$, определяемом множеством точек из области устойчивости линейной системы, треугольные точки либрации при а) $|A_1| > A_2$ - устойчивы по Ляпунову, (16)

в) $|A_1| < A_2$ - неустойчивы, (17)

где $A_1 = c_{20} + 3c_{11} + 9c_{02}$, $A_2 = 3\sqrt{3} B(\omega_1, \omega_2)$.