УДК521.1

Абдылдаев Э.К., Махамбаева И.У.

КГУ им. Коркыт Ата Республика Казахстан

УСТОЙЧИВОСТЬ ТРЕУГОЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ОБОБЩЕННОЙ ФОТОГРАВИТАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ ТРЕХ ТЕЛ В СТРОГОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ПОСТАНОВКЕ

В работе рассматривается нелинейное исследование устойчивости треугольных точек в пространственной ограниченной задаче трех тел.

В последние десятилетия изучению фотогравитационной задачи трех тел, занимающей одно из центральных мест в небесной механике и космодинамике и отличающейся от соответствующей классической задачи трех тел тем, что основные тела не только гравитируют, но и излучают, посвящено много исследований. В настоящей работе рассматривается нелинейное исследование устойчивости треугольных точек в пространственной ограниченной задаче трех тел. Выберем барицентрическую систему координат Oxyz, вращающуюся с постоянной угловой скоростью вокруг оси Oz, направленной перпендикулярно плоскости орбитального движения основных тел в сторону, откуда вращение видно происходящим против хода часовой стрелки; ось Ox направим вдоль прямой, соединяющей основные излучающие тела.

Принимаем следующие единицы измерений: сумму масс основных тел примем за единицу массы, расстояние между ними – за единицу длины, T/2p – за единицу времени (T - период обращения тел друг относительного друга). Тогда уравнения движения частицы в гамильтоновой форме имеют вид:

$$\frac{d\overline{p}_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial \overline{p}_i}, \qquad \frac{d\overline{q}_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial \overline{q}_i} \qquad (i=1,2,3), \tag{1}$$

где $\overline{q}_i -$ суть декартовые координаты частицы P(x,y,z), $\overline{p}_i -$соответствующие им канонические импульсы, а $H(x,y,z,\overline{p}_1,\overline{p}_2,\overline{p}_3)-$функция Гамильтона, которая имеет вид:

$$H=\frac{1}{2}\left(\overline{p}_1^2+\overline{p}_2^2+\overline{p}_3^2\right)+\left(\overline{p}_1^y+\overline{p}_2^x\right)-\frac{Q_1(1-\mu)}{R_1}-\frac{Q_2\mu}{R_2},$$

$$R_\alpha=\sqrt{(x-x_\alpha)^2+y^2+z^2}, \quad (\alpha=1,2), \quad x_1=-\mu,\ x_2=1-\mu. \tag{2}$$

Предположим, что частица P, совершающая движение в орбитальной плоскости, испытывает пространственные начальные возмущения, выводящие ее из плоскости орбитального движения.

Полагая $q_3\neq 0, p_3\neq 0$ и $z^*=\overline{p}_3^*$, вводим возмущения

$$\begin{gathered} q_1=x-x^*, q_2=y-y^*, q_3=z, \\ p_1=\overline{p}_1-\overline{p}_1^*, p_2=\overline{p}_2-\overline{p}_2^*, p_3=\overline{p}_3. \end{gathered} \tag{3}$$

Здесь $x^*, y^*, \overline{p}_1^*, \overline{p}_2^*$ отвечают треугольным точкам либрации. Теперь вопрос об устойчивости исследуемых решений сводится к задаче об устойчивости положений равновесия $q_i=p_i=0$ (i=1,2,3) автономной гамильтоновой системы с тремя степенями свободы.

Сначала гамильтониан H_2 приводим к нормальной форме. Для этого воспользуемся линейной канонической заменой переменных для $q_i,\ p_i\ (i=1,2)$. Пространственные переменные q_3 и p_3 при этом не изменяются $(q_3=q'_3, p_3=p'_3)$. Переходя к полярным координатам, получим:

$$K_2 = \omega_1 r_1 - \omega_2 r_2 + \omega_3 r_3. \qquad (4)$$

Структура нормальных форм H_3 и H_4 зависит от вида резонансного соотношения:

$$k_1\omega_1 + k_2\omega_2 + k_3\omega_3 = 0 \qquad (|k_1| + k_2 + |k_3| \le 4), \qquad (5)$$

где частоты главных колебаний ω_i для рассматриваемых точек либрации равны

$$\omega_1 = \sqrt{\left(1+\sqrt{a}\right)/2}, \omega_2 = \sqrt{\left(1+\sqrt{a}\right)/2},$$
$$\omega_3 \equiv 1, \quad a = 1 - 36\mu(1-\mu)\sin^2(\psi_1 + \psi_2). \qquad (6)$$

Если ω_i не удовлетворяют условию (6), то после применения преобразования Биркгофа нормализованный до четвертого порядка включительно гамильтониан возмущенного движения в полярных координатах имеет вид

$$H^* = K_2(r_1, r_2, r_3) + K_4(r_1, r_2, r_3). \qquad (7)$$

Здесь K_4 определяется выражением

$$K_4 = c_{200}r_1^2 + c_{110}r_1r_2 + c_{101}r_1r_3 + c_{020}r_2^2 + c_{011}r_2r_3 + c_{002}r_3^2. \qquad (8)$$

Как показали вычисления (из-за громоздкости выражения для коэффициентов формы не приводим), в области устойчивости линейной системы имеют место следующие резонансы третьего и четвертого порядков:

$$\omega_1 = 2\omega_2, \quad \omega_1 = 3\omega_2, \quad 2\omega_2 = \omega_3,$$
$$3\omega_2 = \omega_3, 2\omega_1 = \omega_2 + \omega_3. \qquad (9)$$

Применим исследования Арнольда по устойчивости гамильтоновых систем для большинства начальных условий. Для этого, предполагая, что в системе отсутствуют резонансы вида $\omega_1 = 2\omega_2$ и $\omega_1 = 3\omega_2$, составим определитель четвертого порядка

$$D_4 = \det\begin{Vmatrix} \dfrac{\partial^2 K_4}{\partial r_i \partial r_j} & \dfrac{\partial K_2}{\partial r_i} \\ \dfrac{\partial K_2}{\partial r_j} & 0 \end{Vmatrix}, \qquad (10)$$

где $K_2(r_1, r_2, r_3), K_4(r_1, r_2, r_3)$ определяются формулами (5) и (9) соответственно. Раскрывая определитель (10), имеем

$$D_4 = \omega_1^2\left(c_{011}^2 - 4c_{020}c_{002}\right) + \omega_2^2\left(c_{101}^2 - 4c_{200}c_{002}\right) +$$
$$+ 2[\omega_1\omega_2\left(c_{101}c_{011} - 2c_{002}c_{110}\right) - \omega_1\left(c_{011}c_{110} - 2c_{020}c_{101}\right) + \qquad (11)$$
$$\omega_2\left(c_{110}c_{101} - 2c_{200}c_{011}\right)] + c_{110}^2 - 4c_{200}c_{020}.$$

Согласно этому, положение равновесия $q_i = p_i = 0$ устойчиво для большинства (в смысле меры Лебега) начальных условий, если определитель

$$D_4 \ne 0. \qquad (12)$$

Проверяя далее с помощью вычислений на ПК выполнимость неравенства $D_4 \ne 0$, убеждаемся, что в пространственной обобщенной фотогравитационной задаче трех тел треугольные точки либрации устойчивы для большинства (в смысле меры Лебега) начальных условий при всех μ (кроме μ_1 и μ_2, отвечающих внутренним резонансам третьего $\omega_1 = 2\omega_2$ и четвертого $\omega_1 = 3\omega_3$ порядков), Q_1, Q_2 из области устойчивости линейной системы (см. рис.). Наличие в системе устойчивости для большинства начальных условий означает, что движение частицы P вблизи начала координат $q_i = p_i = 0$ будет условно-периодическим для всех начальных условий, соответствующих несоизмеримым частотам ω_1, ω_2 главных колебаний. Для других начальных условий может иметь место неустойчивость рассматриваемых точек либрации. Таким образом, с вероятностью, близкой к единице, треугольные точки в пространственной задаче устойчивы.

При резонансе 4-го порядка программа выявляет резонансную кривую и исследует устойчивость на этой поверхности. Полоса 3 соответствует резонансу 4-го порядка. Использование теоремы А.П. Маркеева позволяет решить вопрос об устойчивости при резонансе 4-го порядка. Треугольные точки всюду устойчивые, за исключением некоторых участков на поверхности резонансов 4-го порядка.

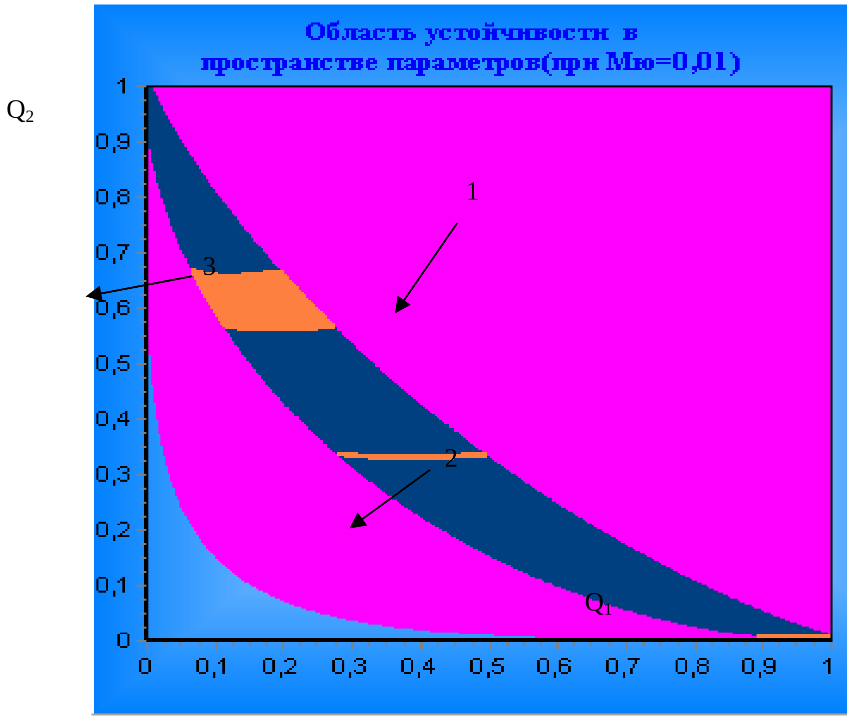

Рисунок 1. Область устойчивости треугольных точек в пространстве параметров: 1-область устойчивости в линейном приближении; 2-устойчивость резонансной поверхности 4-го порядка; 3-неустойчивость резонансной поверхности 4-го порядка.