

УДК 537.523 (575.2) (04)

МИКРОВОЛНОВОЙ НАГРЕВ И СТАЦИОНАРНЫЕ ТЕПЛОВЫЕ СОСТОЯНИЯ КЕРАМИЧЕСКОЙ ПЛАСТИНЫ

П.В. Козлов – канд. физ.-мат. наук,
В.М. Лелевкин – докт. физ.-мат. наук

The channel model of interaction of microwave radiation and ceramic plate was worked out. The calculation of thermal and electromagnetic characteristics obtained with help of the alumina in the air was made. These characteristics depend on power and frequency of electromagnetic field.

Введение. В настоящее время широкое применение получил метод нагрева керамических и композиционных материалов микроволновым излучением [1–3]. Разработка теоретических методов исследования взаимодействия твердых тел с проникающими электромагнитными полями позволяет выявить особенности процессов протекающих физических явлений, определить связь между характеристиками микроволнового излучения и составом материала, установить оптимальный режим нагрева при получении керамических изделий с требуемыми свойствами.

Как показали результаты расчета протяженного керамического цилиндра в поле микроволнового излучения [4], распределение температуры практически постоянно по сечению цилиндра. Это дает возможность использовать каналовое приближение для разработки достаточно простых методов теоретического анализа нагрева керамических материалов микроволновым излучением [5].

Анализ стационарных тепловых состояний

Модель. Рассматривается однородная керамическая пластина в поле плоской электромагнитной волны с компонентами $\vec{E}(0,0,E_z = E(x))\exp(i\omega t)$, $\vec{B}(0,B_y = B(x),0)\exp(i\omega t)$, распространяющейся вдоль оси x (рис. 1). Стационарность теплового состояния керамического материала осуществляется за счет энергетического баланса между процессами диссипации энергии микроволнового излучения и кондуктивного теплоотвода тепла с поверхности изделия в окружающую газовую среду.

Уравнения. Тепловые и электромагнитные характеристики керамического образца находятся из совместного решения уравнения баланса энергии и приведенного волнового уравнения:

$$\frac{d}{dx}(\lambda \frac{dT}{dx}) + \frac{1}{2} \sigma |E|^2 = 0, \quad \frac{d^2 E}{dx^2} + k^2 E = 0, \quad (1)$$

где T – температура, E – напряженность электрического поля, $\sigma(T)$, $\lambda(T)$, $\varepsilon_k(T) = \varepsilon_R - i\varepsilon_I$ – электропроводность, теплопроводность, комплексная диэлектрическая проницаемость, $\varepsilon_R = \text{Re } \varepsilon_k$, $\varepsilon_I = \text{Im } \varepsilon_k$ – действительная и мнимая части ε_k , $k = k_0 \varepsilon_k$ – волновое число, $k_0 = \omega/c$ – волновое число в вакууме, $\omega = 2\pi f$ – круговая частота, f – циклическая частота.

Граничные условия ставятся для температуры и напряженности электрического поля в зависимости от условий подвода электромагнитной энергии, которые при симметричном подводе имеют вид:

$$x = 0: T'(0) = 0, \quad E'(0) = 0; \quad x = R: T = T_R, \quad E = E_R. \quad (2)$$

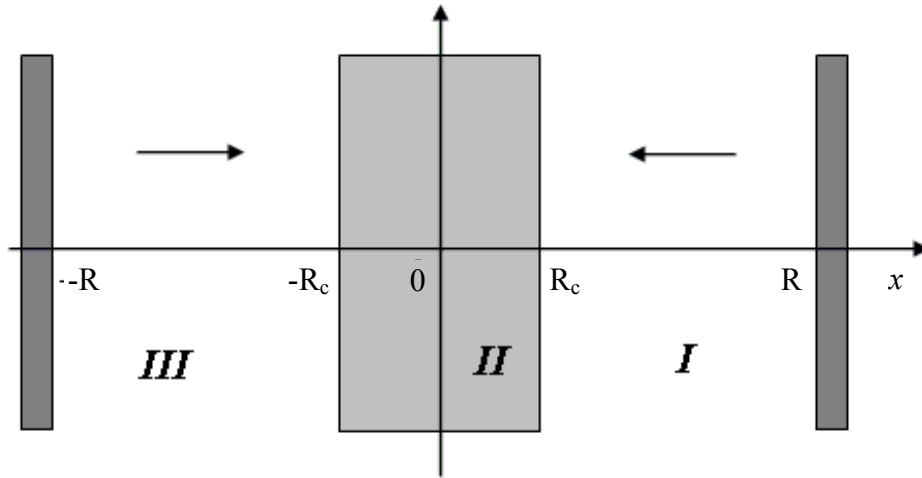


Рис. 1. Схема нагрева керамической пластины микроволновым излучением с симметричным подводом электромагнитной энергии: $D=2R$, $d=2R_c$ –толщины камеры и пластины, II, I, III – области диссипации электромагнитной энергии (II) и кондуктивного теплоотвода (I, III) к стенкам камеры.

Метод решения. Решение системы (1) проводится в канальном приближении [5]

$$0 \leq x \leq R_c : \sigma = \sigma_0, \lambda = \lambda_0, \varepsilon_k = \varepsilon_{k0};$$

$$R_c \leq x \leq R : \sigma = 0, \varepsilon_R = 1.$$

Решением приведенного волнового уравнения в каждой из областей I, II, III является суперпозиция плоских волн:

$$E_I = A_1 \exp(ik_0x) + B_1 \exp(-ik_0x), \quad E_{II} = A_2 \exp(ikx) + B_2 \exp(-ikx), \quad (3)$$

$$E_{III} = A_3 \exp(ik_0x) + B_3 \exp(-ik_0x).$$

Индукция магнитного поля находится из закона Фарадея

$$B = \frac{1}{i\omega} \frac{dE}{dx}.$$

Связь между компонентами полей в каждой из сред устанавливается из условия неразрывности E и H на границах раздела, которая в матричной форме записи имеет вид

$$\begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix} = M_{21} \cdot \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A_3 \\ B_3 \end{pmatrix} = M_{32} \cdot \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

При выборе начала координат на левой грани пластины матрицы M_{21} и M_{32} равны:

$$M_{21} = \begin{pmatrix} \frac{k+k_0}{2k} \exp(i(k_0-k)d) & \frac{k-k_0}{2k} \exp(-i(k_0+k)d) \\ \frac{k-k_0}{2k} \exp(i(k_0+k)d) & \frac{k+k_0}{2k} \exp(-i(k_0-k)d) \end{pmatrix},$$

$$M_{32} = \begin{pmatrix} \frac{k_0+k}{2k_0} & \frac{k_0-k}{2k_0} \\ \frac{k_0-k}{2k_0} & \frac{k_0+k}{2k_0} \end{pmatrix},$$

где $d=2R_c$ – толщина пластины.

Рассмотрим несколько практических моделей нагрева керамической пластины микроволновым излучением.

Модель с односторонним подводом мощности. Нагрев керамического образца проводится за счет микроволнового излучения, подводимого к пластине справа. В области (III) имеется только прошедшая волна и $B_3 = 0$. Введя в рассмотрение матрицу M_{13} , связывающую вход и выход излучения:

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} = M_{13} \begin{pmatrix} A_3 \\ B_3 \end{pmatrix}, \quad M_{13}^{-1} = M_{32} \cdot M_{21},$$

из (4) получаем коэффициент отражения на правой границе

$$\rho = \left| \frac{B_1}{A_1} \right|^2 = \left| \frac{(k_0^2 - k^2) \sin(kd)}{-2ik_0 k \cos(kd) + (k_0^2 + k^2) \sin(kd)} \right|^2. \quad (5)$$

Решение уравнения баланса энергии в области диссипации электромагнитной энергии имеет вид:

$$T_{II}(x) = T_0 + Cx - \frac{\sigma_0 E_0^2}{2\lambda_0} \Phi(x), \quad (6)$$

где T_0, E_0 – температура и модуль напряженности электрического поля в начале координат,

$$\Phi(x) = \frac{1}{4b^2} (2\gamma_1 \operatorname{sh}^2 bx + \gamma_2 \operatorname{sh} 2bx) + \frac{1}{4a^2} (2\gamma_3 \sin^2 ax - \gamma_4 \sin 2ax), \quad (7)$$

$$a = \operatorname{Re}(k), \quad b = \operatorname{Im}(k), \quad \alpha = \frac{\sqrt{\varepsilon_k + 1}}{2\sqrt{\varepsilon_k}}, \quad \beta = \frac{\sqrt{\varepsilon_k - 1}}{2\sqrt{\varepsilon_k}},$$

$$\gamma_1 = \alpha\alpha^* + \beta\beta^*, \quad \gamma_2 = -\alpha\alpha^* + \beta\beta^*, \quad \gamma_3 = \alpha\beta^* + \beta\alpha^*, \quad \gamma_4 = i(\alpha^*\beta - \alpha\beta^*).$$

Решение уравнения баланса энергии в областях теплоотвода I и III с учетом граничных условий (2) выражаем через потенциал теплового потока $S(T)$:

$$S(T) = \int_{T_R}^T \lambda(T) dT, \quad S_I(x) = S'_1(x-d) + S_1, \quad S_{III}(x) = S'_0 x + S_0, \quad (8)$$

где $S'_1 = -S_1/\Delta$ и $S'_0 = S_0/\Delta$ – потоки тепла через правую и левую стенки пластины, $S_1(T_1)$ и $S_0(T_0)$ – значения функции $S(T)$ на стенках пластины, $\Delta = R - R_c$. Из соотношений (6), (7) и баланса потоков тепла на стенках пластины находим выражения для напряженности электрического поля, диссипируемой мощности P_d , подводимой мощности P_I , температуры на правой стенке T_1 и константы C через T_0 :

$$T_1 = T_0 + \frac{S_0(\Phi'_1 \cdot d - \Phi_1) + S_1(\Phi'_0 \cdot d - \Phi_1)}{\lambda_0 \Delta (\Phi'_1 - \Phi'_0)} \quad (9)$$

$$P_d = \frac{S_0 + S_1}{\Delta}, \quad E_0^2 = \frac{2P_d}{\sigma_0 (\Phi'_1 - \Phi'_0)}, \quad C = \frac{S_0 \Phi'_1 + S_1 \Phi'_0}{\lambda_0 \Delta (\Phi'_1 - \Phi'_0)}$$

$$P_I = \frac{|A_1|^2}{2\mu_0 c} = \left(P_d + \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} \right) (1 - \rho), \quad (10)$$

здесь $\Phi_1 = \Phi(d)$, $\Phi'_0 = \Phi'(0)$, $\Phi'_1 = \Phi'(d)$. Уравнение (9) решается итерационным методом, сходимость обеспечивается за 3–4 итерации.

Модель с отражающим слоем. На поверхности пластины, противоположной по отношению к подводимой мощности, имеется идеально отражающий тонкий слой, в котором не учитывается перепад температуры. В этом случае имеем условие $A_2 + B_2 = 0$ и распределение электрического поля вдоль пластины равно

$$E(x) = E_0 \sin kx, \quad E_0 = 2iA_2. \quad (11)$$

Из (4) с учетом условия $A_2 = -B_2$ находим коэффициент отражения

$$\rho = \left| \frac{B_1}{A_1} \right|^2 = \left| \frac{\sqrt{\varepsilon_k} \cos kd - i \sin kd}{\sqrt{\varepsilon_k} \cos kd + i \sin kd} \right|^2. \quad (12)$$

Решением уравнения энергии в зоне нагрева является выражение (6) с функцией

$$\Phi(x) = \frac{\sin^2 bx}{4b^2} - \frac{\sin^2 ax}{4a^2},$$

имеющей нулевую производную при $x = 0$. В областях теплоотвода температура удовлетворяет соотношениям (8), вследствие чего система (9)–(10) принимает вид

$$T_1 = T_0 + \frac{S_0(\Phi_1 d - \Phi_1) - S_1 \Phi_1}{\lambda \Delta \Phi_1},$$

$$P_d = \frac{S_0 + S_1}{\Delta}, \quad E_0^2 = \frac{2P_d}{\sigma_0 \Phi_1}, \quad C = \frac{S_0}{\lambda_0 \Delta}, \quad P_I = P_d / (1 - \rho).$$

Модель с симметричным подводом мощности. Компоненты плоских волн в (3): $A_3 = B_1$, $B_3 = A_1$. Поместим начало координат в центр пластины. Для вывода расчетных формул используем симметрию задачи $E'(0)=0$, $A_2=B_2=E_0/2$ и тогда

$$E(x) = E_0 \cos kx. \quad (13)$$

При симметричном подводе мощности в пластине образуется стоячая волна (13) с пучностью в центре пластины. Из (4) и соотношения $A_2 = B_2$ находим коэффициент отражения

$$\rho = \left| \frac{\cos(kd/2) - i\sqrt{\varepsilon_k} \sin(kd/2)}{\cos(kd/2) + i\sqrt{\varepsilon_k} \sin(kd/2)} \right|^2. \quad (14)$$

Решение уравнения баланса энергии и расчетные формулы имеют вид

$$T_{II}(x) = T_0 - \frac{\sigma_0 E_0^2}{2\lambda_0} \Phi(x), \quad \Phi(x) = \frac{sh^2 bx}{4b^2} + \frac{\sin^2 ax}{4a^2}, \quad (15)$$

$$T_1 = T_0 - \frac{S_1 \Phi_1}{\lambda \Delta \Phi_1}, \quad P_d = \frac{2S_1}{\Delta}, \quad P_I = P_d / (1 - \rho), \quad E_0^2 = \frac{2P_d}{\sigma_0 \Phi_1},$$

$$-d/2 \leq x \leq d/2, \quad \Phi_1 = \Phi(d/2), \quad \Phi_1' = \Phi'(d/2).$$

Результаты. В качестве примера проводится расчет характеристик керамической пластины толщиной $d=24$ мм в поле микроволнового излучения в камере $R=50$ мм при различных способах подвода мощности микроволнового излучения в воздухе при атмосферном давлении: $T_R=300$ К, $f=24,5$; 50; 100 ГГц. Коэффициенты керамического материала окиси алюминия берутся из работы [4], а в воздухе – из [6].

Расчеты показывают (рис. 2), что при одностороннем подводе электромагнитной волны для поддержания стационарного теплового состояния керамической пластины с максимальной температурой $T_0=2000$ К требуется мощность микроволнового излучения $P_I=10,9$ кВт/м² ($f=24,5$ ГГц) и $P_I=9,3$ кВт/м² ($f=100$ ГГц). Распределение температуры в пластине практически однородно, максимальная разность температур порядка 10 К, что обусловлено большей теплопроводностью материала керамики по сравнению с воздухом.

Характер поведения температурного поля подтверждает справедливость каналового приближения и позволяет получить оценочные формулы для распределения температуры и диссипируемой мощности микроволнового излучения. При симметричном расположении пластины относительно камеры потоки тепла в воздухе от боковых граней совпадают и равны величине $S_1(T_1)/\Delta$. С другой стороны, этот поток равен $\lambda_0(T_0-T_1)/(d/2)$. Приравнивая данные потоки, получаем

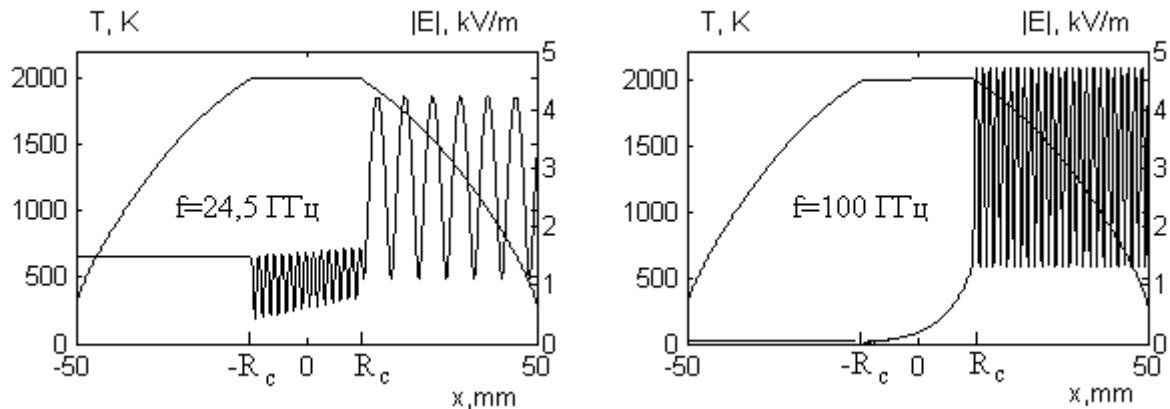


Рис. 2. Распределения температуры и модуля напряженности электрического поля в камере и керамической пластине $d=24$ мм в зависимости от частоты микроволнового излучения.

$$T_1 = T_0 - \frac{S_1(T_1)d}{2\lambda(D-d)}, \quad P_d = \frac{4\lambda_0(T_0 - T_1)}{d}. \quad (16)$$

Погрешность оценки диссипируемой мощности по формуле (16) составляет величину порядка 1% в широком диапазоне температур, частот и толщины пластины. Диссипированная мощность микроволнового излучения при данной геометрии керамического образца слабо зависит от частоты поля и подводимой мощности, а определяется температурным режимом керамики.

При частоте 24,5 ГГц электрическое поле (рис. 2) имеет осцилляционный характер со слабо меняющейся амплитудой, а при частоте 100 ГГц имеет место экспоненциальное ослабление поля в сторону левой границы керамического материала вследствие сильного поглощения энергии электромагнитного поля. Такой характер поведения электрического поля внутри керамического материала можно показать из (13)

$$|E| = E_0 \sqrt{(ch2bx + \cos 2ax)/2}, \quad (17)$$

где a и b – действительная и мнимая части волнового вектора в керамическом материале, которые вычисляем по следующим формулам:

$$a = k_0 \sqrt{\varepsilon_R} \sim \omega, \quad b = a\varepsilon_I / 2\varepsilon_R \sim \omega^2. \quad (18)$$

Как следует из (17) и (18), распределение модуля напряженности электрического поля представляет собой экспоненту, модулированную гармоническим колебанием, частота которого линейно нарастает с ростом ω микроволнового поля.

Наблюдается (рис. 3а) характерное изменение стационарных тепловых состояний керамического материала из окиси алюминия микроволновыми полями, что было отмечено в работе [8]. Такой характер поведения $T_0(P_1)$ обусловлен зависимостью комплексной диэлектрической проницаемости от температуры и частоты и в большей степени коррелирован с особенностями коэффициента отражения (рис. 3б).

Рассмотрим зависимость коэффициента отражения от температуры T_0 к переменной $\xi = ad/\pi$, определяющей число полуволн на толщине пластины. В модели с односторонним подводом мощности минимумы ρ (рис. 4) приходятся на целочисленные значения параметра ξ , а максимумы – на полцелые при любом значении частоты микроволнового поля. Значение первого минимума ξ_1 в функции $\rho(\xi)$ численно равно половине частоты f .

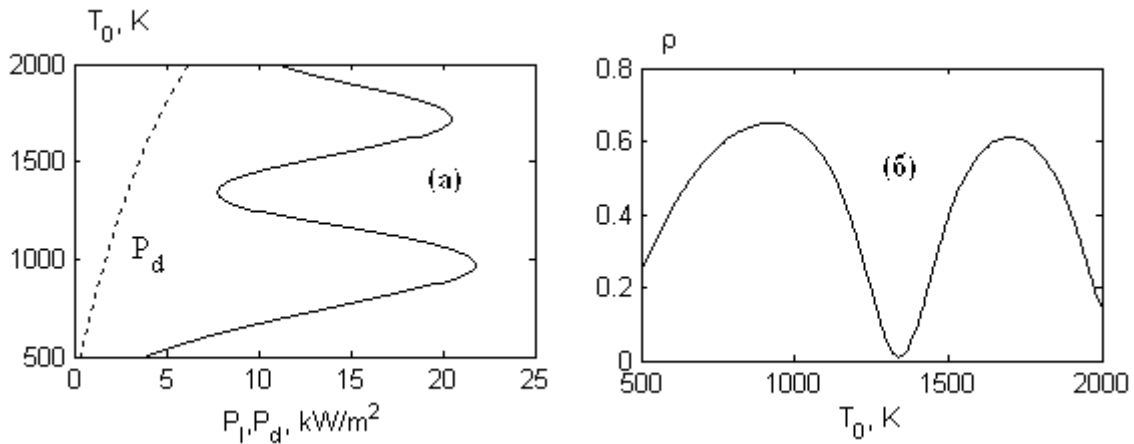


Рис. 3. Связь максимальной температуры керамической пластины с подводимой и диссипированной мощностью микроволнового излучения (а); коэффициент отражения как функция температуры (б): $f=24,5$ ГГц, $d=24$ мм.

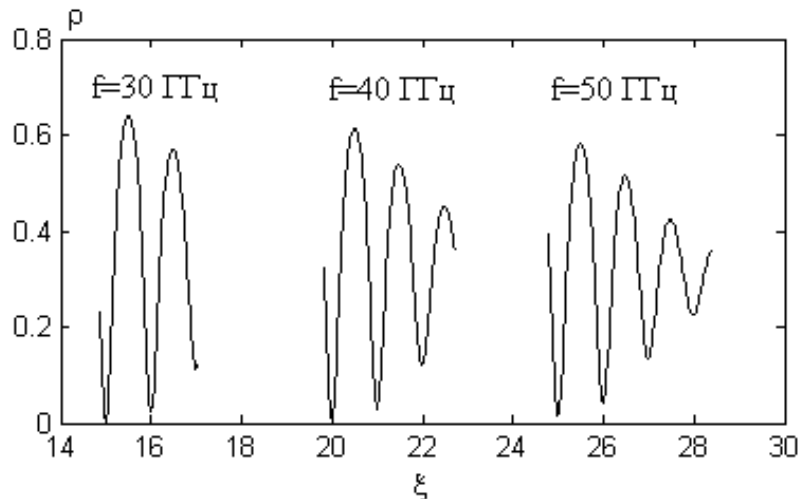


Рис. 4. Зависимость коэффициента отражения микроволнового излучения от параметра ξ и частоты, $d=24$ мм.

Из результатов расчета характеристик T , E , ρ по трем моделям видно (рис. 5), что наличие отражающего слоя приводит к смене положений минимумов и максимумов ρ на шкале параметра ξ : точки минимума имеют полуцелые значения, максимума – целые. В модели с симметричным подводом мощности электромагнитного излучения минимумы коэффициента отражения соответствуют четным значениям параметра, а максимумы – нечетным, т.е. можно оценить, какие температурные режимы требуют минимальных или максимальных энергетических затрат при заданной частоте и геометрии. Для поддержания заданных температурных режимов схема с односторонним подводом мощности более экономична с точки зрения энергетических затрат, чем при симметричном подводе мощности. Наличие отражающего слоя создает температурные поля с почти полным поглощением подводимой мощности микроволнового излучения.

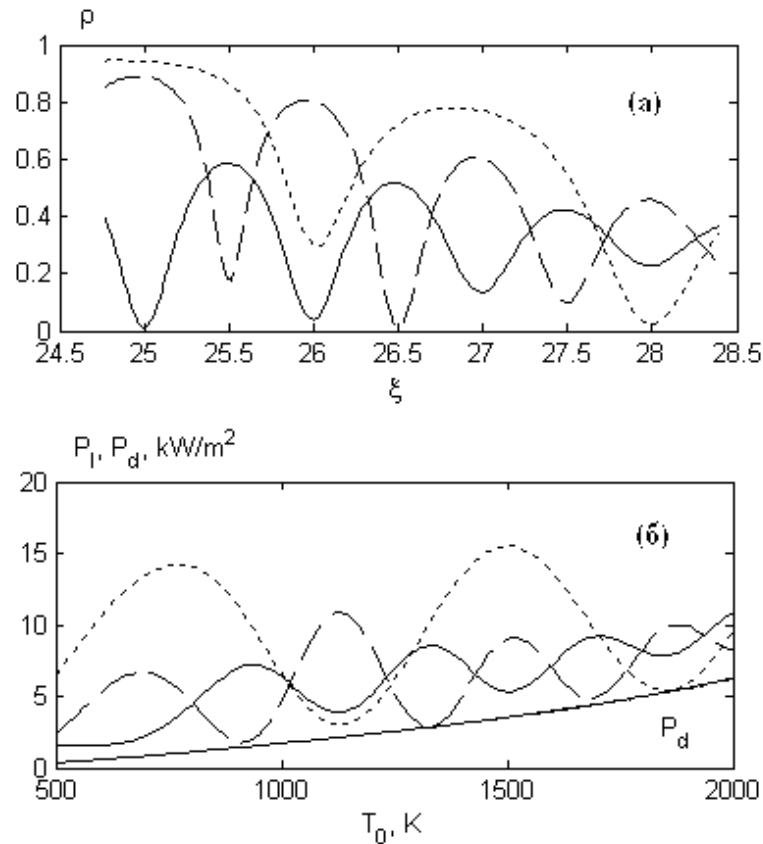


Рис. 5. Коэффициент отражения (а), подводимая и диссипируемая мощности микроволнового излучения (б); $f=50$ ГГц. Сплошная линия – модель с односторонним подводом мощности, точки – с симметричным подводом мощности, пунктир – с отражающим слоем.

Нестационарный нагрев керамики

Модель и метод решения. Для анализа временной зависимости температурного поля в процессе нагрева керамической пластины решается нестационарное уравнение теплопроводности

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \sigma |E|^2 \quad (19)$$

с начальным и граничными условиями

$$T(x, 0) = T_R, \quad \left. \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad T(R, t) = T_R.$$

Как показали расчеты [7], перепад температуры по сечению керамики представляет малую величину по отношению к максимальной температуре на любой момент времени. Следовательно, для решения волнового уравнения можно привлекать каналовое приближение и использовать полученные выше решения для распределения напряженности электрического поля при симметричном подводе мощности микроволнового излучения (13) $E(x) = E_0 \cos kx$.

Напряженность электрического поля E_0 в центре пластины связана с величиной подводимой мощности микроволнового излучения зависимостью

$$E_0(t) = \sqrt{8\mu_0 \omega P_l(t)} \left| \cos(kd/2) + i\sqrt{\varepsilon_k} \sin(kd/2) \right|. \quad (20)$$

Формулы (13) и (20) задают пространственно-временное распределение источника нагрева в уравнении теплопроводности. Уравнение (19) решается численно методом прямых, для чего выполняется дискретизация уравнения по пространственной переменной методом контрольного объема. В результате задача сводится к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений для температурного поля в узлах сетки. В матричной форме записи это можно представить так

$$\frac{dT}{dt} = AT, \quad (21)$$

где матрица A является трехдиагональной. Численное решение (21) выполнялось в системе компьютерной математики Matlab 7, в качестве решателя использовалась функция ode23t.

Результаты расчета. Проведен численный анализ временного изменения тепловых и электродинамических характеристик керамической пластины из окиси алюминия в поле микроволнового излучения при симметричном подводе мощности в зависимости от частоты поля и величины мощности. Толщина пластины $d=30$ мм, размер расчетной области $D=100$ мм.

Как видно из результатов расчета (рис. 6), распределение температуры в сечении пластины близко к постоянному значению, что служит основанием для использования канального приближения при расчете электродинамических полей. При приближении температуры к значениям, при которых для стационарных состояний находятся минимумы, происходит интенсивное поглощение микроволнового излучения и, как следствие, быстрый нелинейный рост температуры на коротких интервалах времени. На участках слабого изменения $\rho(T)$ временная зависимость температуры близка к линейной.

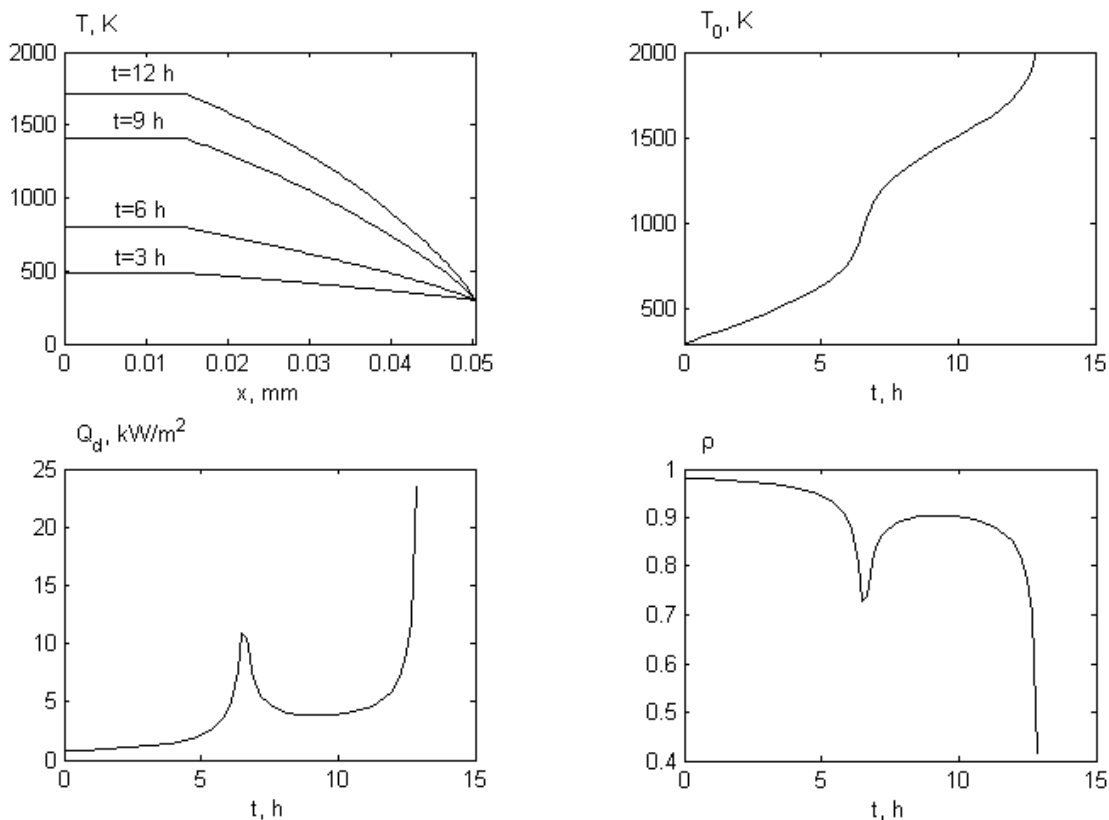


Рис. 6. Профили температуры керамической пластины и окружающего воздуха в выбранные моменты времени; временные зависимости температуры в центре пластины, диссипированной мощности и коэффициента отражения: $P_1=40$ кВт/м², $f=25$ ГГц.

С ростом частоты микроволнового излучения осцилляционный характер поведения $\rho(T)$ усиливается, что приводит к сложной временной картине поведения процесса нагрева керамики (рис. 7).

Время выхода на заданный температурный режим нелинейным образом зависит как от частоты микроволнового излучения, так и от подводимой мощности (рис. 8). Отметим, что увеличение час-

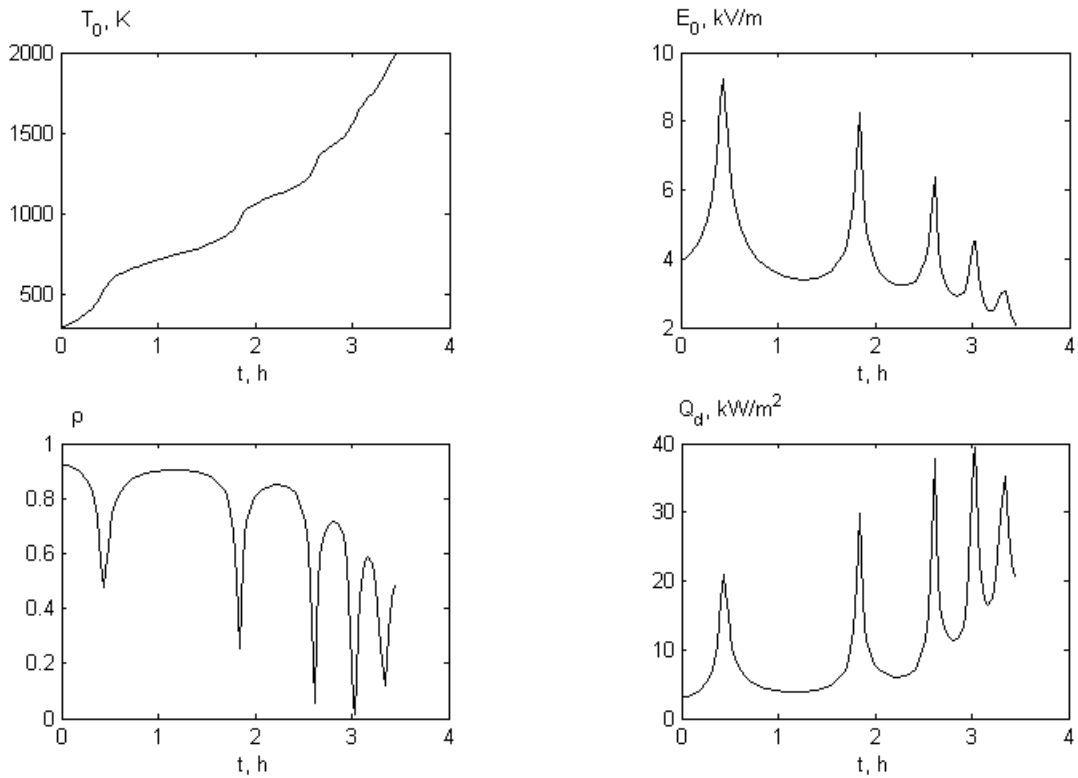


Рис. 7. Временные зависимости температуры и напряженности электрического поля в центре керамической пластины, диссипированной мощностью и коэффициентом отражения: $P_1=40$ кВт/м², $f=100$ ГГц.

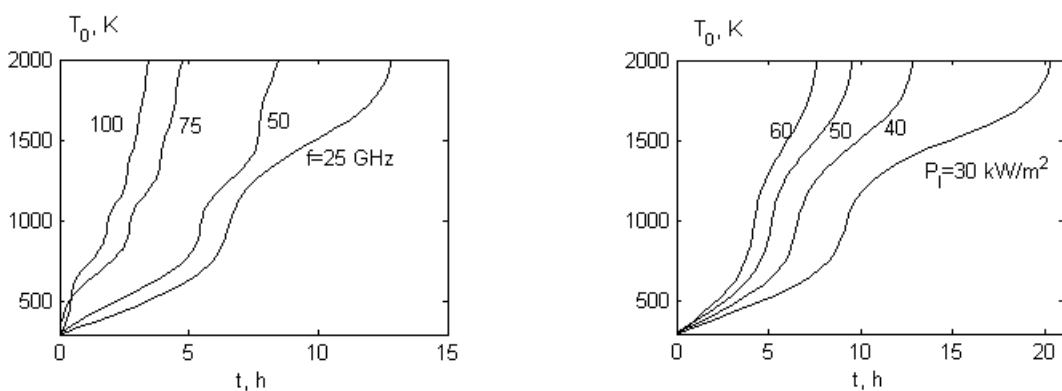


Рис. 8. Влияние частоты электромагнитного поля при фиксированной подводимой мощности микроволнового излучения $P_1=40$ кВт/м² и подводимой мощности при фиксированной частоте $f=25$ ГГц на изменение температуры в центре керамической пластины.

тоты и мощности микроволнового излучения приводят к уменьшению времени нагрева керамической пластины. При изменении частоты электромагнитного поля в интервале 25–100 ГГц и подводимой мощности в интервале 40–60 кВт/м² характерное время нагрева керамики до 2000 К микроволновым излучением составляет 3–10 часов, что существенно меньше, чем при традиционных методах нагрева. Из рис. 8 видно, что временные зависимости температуры от подводимой мощности микроволнового излучения при фиксированной частоте изменяются почти подобным образом.

Выводы

- Предложена достаточно простая каналовая модель для определения характеристик керамической пластины при микроволновом нагреве.
- Стационарное тепловое состояние керамического материала из окиси алюминия связано многозначной зависимостью с величиной подводимой мощности микроволнового излучения.
- Наличие отражающего слоя на одной поверхности пластины увеличивает КПД нагрева керамического материала.
- Нелинейные участки, связанные с увеличением температуры в процессе нагрева керамического материала микроволновым излучением, обусловлены наличием минимумов в зависимости коэффициента отражения от температуры.

Литература

1. *Niegs T.N., Kiggans J.O., Kimrey Jr.H.D.Jr.* // *Mat. Res. Soc. Symp. Proc.* – 1990. – 189. – 267.
2. *Thomas O.O., Jesse R.R., Johnson D.L., et al.* // *Jr., Ibid.* – 1992. – 269. – 277.
3. *Буков Ю.В., Рыбаков К.И., Семенов В.Е.* // *J. Physics D: Applied Physics.* – 2001. – 34. – R55.
4. *Кулумбаев Э.Б., Лелевкин В.М.* Стационарные тепловые состояния керамического цилиндра в поле микроволнового излучения // Матер. междунар. семинара “Проблемы моделирования и развития технологии получения керамики”. – Бишкек: МНТЦ, КРСУ, 2005. – С. 13–18
5. *Козлов П.В., Кулумбаев Э.Б., Лелевкин В.М., Рафатов И.Р.* Микроволновой нагрев керамических изделий // Матер. междунар. семинара “Проблемы моделирования и развития технологии получения керамики”. – Бишкек: МНТЦ, КРСУ, 2005. – С. 19–30.
6. *Энгельшт В.С., Гурович В.Ц., Десятков Г.А. и др.* Теория столба электрической дуги // Низкотемпературная плазма. – Т. 1. – Новосибирск: Наука, 1990. – 376 с.
7. *Кулумбаев Э.Б.* Нагрев керамического цилиндра радиальным микроволновым излучением // Матер. междунар. семинара “Проблемы моделирования и развития технологии получения керамики”. – Бишкек: МНТЦ, КРСУ, 2005.