

УДК 531 (575.2) (04)

**ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ В УДАРНОЙ СИСТЕМЕ
“БОЕК-ВОЛНОВОД-ПЛАСТИНА” ПРИ РАВНЫХ УДАРНЫХ
ЖЕСТКОСТЯХ БОЙКА И ВОЛНОВОДА**

В.Э. Еремьянц – докт. техн. наук, проф.,

Е.Г. Климова – соискатель

The mathematical description of wave processes under elastic striker percussion against the bar, which is rest on the plate, is given. The experimental researches affirm veracity of an accepted mathematical model of studied system.

В последнее время виброударные машины находят эффективное применение для очистки внутренних поверхностей золошлакопроводов, кузовов транспортных средств, бункеров приемных устройств и т.д. При этом очистка производится при ударах бойком машины по инструменту, опирающемуся на поверхность очищаемой трубы или пластины. Инструмент в этом случае играет роль волновода, по которому энергия удара передается от машины к обрабатываемой поверхности в виде волн деформаций.

Очевидно, что прочность элементов ударной системы машины и эффективность очистки поверхностей определяется параметрами волн деформаций, генерируемых в системе, которые в свою очередь зависят от геометрических характеристик и физических свойств элементов системы. К настоящему времени эти зависимости неизвестны, что затрудняет выбор рациональных параметров ударной системы и условий её нагружения. Поэтому установление таких зависимостей является актуальной задачей.

В данной работе эта задача решалась применительно к наиболее простой ударной системе, расчетная схема которой показана на рис. 1. В ней боек и волновод представляют собой стержни одинакового диаметра d , с длинами l и L , и выполнены из одного материала. При этом ударная жесткость бойка, опреде-

ляемая как произведение плотности материала на скорость распространения волны деформации в нем и на площадь поперечного сечения бойка равна ударной жесткости волновода. Ударные торцы бойка и волновода плоские, а торец волновода, опирающийся на пластину, имеет сферическую форму с радиусом сферы r_c . Такие системы характерны для гидравлических ударных механизмов.

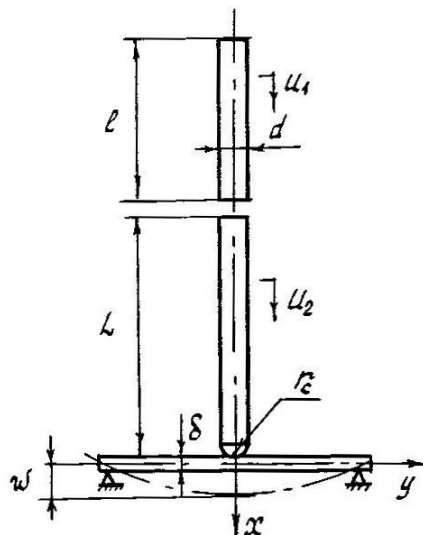


Рис. 1. Расчетная схема ударной системы.

При составлении математической модели рассматриваемой системы движение сечений бойка и волновода описывалось одномерными волновыми уравнениями:

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} - a^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

где $u_i = u_i(x, t)$ – перемещения сечений бойка ($i = 1$) или волновода ($i = 2$); x – координата сечения; t – время; a – скорость распространения волны деформации в бойке и волноводе: $a = \sqrt{E/\rho}$; E, ρ – соответственно модуль упругости и плотность материала элементов ударной системы.

Решение волновых уравнений (1) отыскивалось в форме Даламбера:

$$u_i(x, t) = f_i(at - x) + \varphi_i(at + x), \quad (2)$$

где $f_i(at - x), \varphi_i(at + x)$ – соответственно функции, описывающие перемещения сечений в волнах деформации, распространяющихся в положительном и отрицательном направлениях оси x . Вид этих функций находится из граничных условий задачи.

Уравнение движения пластины записывалось в виде:

$$D\nabla^2 \nabla^2 w + \rho \delta \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \bar{P}(z_0, y_0, t), \quad (3)$$

где $w = w(z, y)$ – прогиб пластины; $\bar{P}(z_0, y_0, t)$ – действующая сила $P_k(t)$, отнесенная к единице площади пластины; z_0, y_0 – координаты точки приложения силы; D – цилиндрическая жесткость пластины; m_0 – масса одного квадратного метра пластины:

$$D = \frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)}, \quad m_0 = \rho\delta; \quad (4)$$

δ – толщина пластины; E, ρ, μ – соответственно модуль упругости, плотность и коэффициент Пуассона материала пластины. В дальнейшем принимается, что для стальной пластины характеристики E, ρ, μ такие же, как и для материала бойка и волновода.

При достаточно больших размерах пластины в плане, таких, что волны деформации, отраженные от краев пластины, не оказывают влияния, по крайней мере, на первое взаимодействие волновода с пластиной, прогиб пластины в точке контакта с волноводом можно найти по формуле [1]:

$$w(z_0, y_0, t) = - \frac{1}{8\sqrt{Dm_0}} \int_0^t P_k(t) dt. \quad (5)$$

Знак минус принят потому, что сила, действующая на пластину, противоположна по направлению силе сопротивления $P_k(t)$, действующей на волновод и имеющей отрицательный знак.

Известно [2], что при ударе по волноводу бойком равного с ним сечения со скоростью V_0 в волноводе генерируется начальная волна деформации прямоугольной формы, описываемая функциями:

$$f_2(at - x) = \frac{V_0}{2a}(at - x), \quad (6)$$

$$f_2'(at - x) = \frac{V_0}{2a}, \quad f_2''(at - x) = 0.$$

Усилия в этой волне постоянны и определяются формулой:

$$P_n = -EFf_2'(at - x) = -EFV_0/2a, \quad (7)$$

где F – площадь поперечного сечения волновода.

Длительность этой волны: $T = 2l/a$.

Начальная волна, распространяясь по волноводу, воздействует на пластину, приводя к её прогибу. При этом в волноводе генерируется отраженная от пластины волна, описываемая функцией $\varphi_2(at+x)$. С этого момента времени перемещения сечений волновода определяются выражением:

$$u_2(x, t) = f_2(at - x) + \varphi_2(at + x). \quad (8)$$

В этом выражении неизвестен вид функции $\varphi_2(at+x)$, который находится из граничных условий в контакте волновода с пластиной. Принимая за начало оси x точку контакта волновода с пластиной, запишем граничное условие в виде:

$$EF \frac{\partial u_2(0, t)}{\partial x} + P_k(t) = 0. \quad (9)$$

Первый член левой части этого уравнения описывает упругую силу в волноводе, а второй – сопротивление перемещению контактного сечения волновода.

При сферическом контактном торце волновода контактная сила P_k определяется формулой Герца:

$$P_k = K\alpha^{3/2}, \quad (10)$$

где α – местная деформация контактных поверхностей волновода и пластины

$$\alpha = u_2(0, t) - w(0, 0, t), \quad (11)$$

K – постоянный коэффициент, определяемый при контакте сферы и плоскости из одинакового материала, как

$$K = \frac{2E}{3(1-\mu^2)} \sqrt{r_c}.$$

Для упрощения решения задачи проводилась линеаризация контактной характеристики (10) методом Бидермана [3]. При этом зависимость контактной силы от местной деформации представлялась в виде:

$$P_k = 0, \text{ при } 0 < \alpha < \alpha_0; \quad (12)$$

$$P_k = c(\alpha - \alpha_0), \text{ при } \alpha_0 < \alpha,$$

где c – приведенный коэффициент жесткости, определяемый из условия равенства максимальной контактной силы и потенциальной энергии деформации при этой силе в линейной и нелинейной моделях, α_0 – постоянный коэффициент:

$$c = 1,25K^{2/3} P_m^{1/3}, \quad (13)$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{5} \alpha_m = \frac{1}{5} \left(\frac{P_{km}}{K} \right)^{2/3}, \quad (14)$$

где P_{km} , α_m – максимальная сила в контакте волновода с пластиной и соответствующая ей деформация контактных поверхностей.

Так как в выражения (13), (14) входит максимальное значение контактной силы P_{km} , которое заранее не известно, величины c и α_0 находятся методом последовательных приближений. В ряде случаев, как будет показано ниже, эти величины могут быть определены сразу по параметрам ударной системы.

Учитывая соотношения (11), (12), запишем граничное условие (9) в виде:

$$EF \frac{\partial u_2(0, t)}{\partial x} + c[u_2(0, t) - w(0, 0, t) - \alpha_0] = 0.$$

Дифференцируя последнее выражение по времени, получим:

$$\frac{\partial^2 u_2(0, t)}{\partial x \partial t} + \frac{c}{EF} \frac{\partial u_2(0, t)}{\partial t} - \frac{c}{EF} \frac{\partial w(0, 0, t)}{\partial t} = 0. \quad (15)$$

Из уравнения (5) следует, что при $x = 0$, $z_0 = 0$, $y_0 = 0$:

$$\frac{\partial w(0, 0, t)}{\partial t} = -\frac{1}{8\sqrt{Dm_0}} P_k(t).$$

Поскольку

$$P_k(t) = EF[-f_2'(at) + \varphi_2'(at)],$$

то

$$\frac{\partial w(0, 0, t)}{\partial t} = -\frac{EF}{8\sqrt{Dm_0}} [-f_2'(at) + \varphi_2'(at)]. \quad (16)$$

Дифференцируя выражение (8) по времени и по координате x , запишем:

$$\frac{\partial u_2(0, t)}{\partial t} = af_2'(at) + a\varphi_2'(at), \quad (17)$$

$$\frac{\partial^2 u_2(0, t)}{\partial x \partial t} = -af_2''(at) + a\varphi_2''(at). \quad (18)$$

Подставив соотношения (16)–(18) в граничное условие (15), после преобразований приходим к уравнению:

$$\Psi'(\xi) + (b + \beta)\Psi(\xi) = \Phi'(\xi) - (b - \beta)\Phi(\xi), \quad (19)$$

где $\xi = at$, $b = \frac{c}{EF}$, $\beta = \frac{c}{8a\sqrt{Dm_0}}$,

$$\Psi(\xi) = \varphi_2'(\xi), \quad \Phi(\xi) = f_2'(\xi).$$

После подстановки в это уравнение функций (6) оно принимает вид:

$$\Psi'(\xi) + (b + \beta)\Psi(\xi) = -\frac{V_0}{2a}(b - \beta).$$

Общим решением этого уравнения при начальных условиях

$$P_k(0) = EF[-\Phi(0) + \Psi(0)] = 0$$

является функция

$$\Psi(\xi) = \frac{V_0}{2a(b + \beta)} [2be^{-(b+\beta)\xi} - (b - \beta)]. \quad (20)$$

С учетом этой функции зависимость усилий от времени в отраженной волне описывается выражением:

$$P_o(x, t) = EF\Psi(at + x) = \frac{EFV_0}{2a(b + \beta)} [2be^{-(b+\beta)(at+x)} - b + \beta], \quad (21)$$

а зависимость усилий от времени в контактном сечении:

$$P_k(t) = -\frac{EFV_0 b}{a(b + \beta)} (1 - e^{-(b+\beta)at}). \quad (22)$$

Контактные усилия возрастают на всем протяжении времени действия начальной волны, достигая максимального значения в момент времени $T = 2l/a$.

При $t > T$ выполняется условие $\Phi(\xi) = f_2'(\xi) = 0$ и уравнение (19) принимает вид:

$$\Psi'(\xi) + (b + \beta)\Psi(\xi) = 0.$$

Решением данного уравнения при начальных условиях

$$EF\Psi(aT) = P_k(aT) = P_{km}$$

является функция:

$$\Psi(at + x) = -\frac{V_0 b}{a(b + \beta)} \left(1 - e^{-(b+\beta)aT}\right) e^{-(b+\beta)(at+x-aT)}.$$

Усилия в контактном сечении, а также усилия в отраженной волне описываются одним выражением, так как при $f_2'(0,0) = 0$ имеет место равенство

$$P_k(t) = P_o(0,t) = P_{km} e^{-(b+\beta)(at-aT)}. \quad (23)$$

Из полученной формулы следует, что контактные усилия после момента времени $t = T$ убывают по экспоненциальному закону. При этом теоретически длительность процесса взаимодействия волновода с пластиной стремится к бесконечности. Но практически эту длительность можно ограничить интервалом времени τ , на котором контактные усилия падают до величины, составляющей 1% от максимального значения:

$$\tau = \left[1 + \frac{2,3}{(b + \beta)l}\right] T. \quad (24)$$

Для определения прогиба пластины в точке её контакта с волноводом подставим выражения (22) и (23) в формулу (5). После интегрирования полученных выражений найдем: при $0 < t < T$

$$w(0,0,t) = \frac{V_0 \beta}{a(b + \beta)} \left(at - \frac{1}{(b + \beta)} (1 - e^{-(b+\beta)at}) \right); \quad (25)$$

при $T < t$

$$w(0,0,t) = \frac{V_0 \beta}{a(b + \beta)} \times \left[at - \frac{1}{(b + \beta)} (1 - e^{-(b+\beta)aT}) \cdot e^{-(b+\beta)(at-aT)} \right]. \quad (26)$$

Заметим, что между коэффициентами b и β существует следующее соотношение:

$$\beta = bs\nu^2, \text{ где } s = \frac{\pi}{16} \sqrt{3(1 - \mu^2)}, \quad \nu = \frac{d}{\delta}. \quad (27)$$

Для стали с модулем упругости $E = 20,4 \cdot 10^{10}$ МПа и коэффициентом Пуассона $\mu = 0,3$ можно принять $s = 0,3244$.

С учетом этого соотношения выражение (22) для максимального значения контактной силы можно переписать в виде:

$$P_{km}(t) = -\frac{EFV_0}{a(1 + s\nu^2)} \left(1 - e^{-b(1+s\nu^2)aT}\right). \quad (28)$$

При достаточно большом отношении диаметра волновода к толщине пластины ν или большой длительности начальной волны T экспоненциальный член в скобках последнего выражения пренебрежимо мал по сравнению с единицей. В этом случае максимальное значение контактной силы не зависит от коэффициента контактной жесткости c и может быть найдено сразу по геометрическим размерам волновода, пластины и свойствам их материала. Затем по формуле (13) можно найти значение c , далее определить коэффициент b и при необходимости уточнить значение P_{km} .

При указанном условии зависимость прогиба пластины от времени (25) на интервале времени $0 < t < T$ практически линейная. Он достигает максимальной величины при $t = T$ и равен:

$$w(0,0,t)_m = \frac{2V_0 l s \nu^2}{a(1 + s\nu^2)}. \quad (29)$$

Максимальный прогиб также не зависит от коэффициента контактной жесткости c и определяется скоростью соударения, длиной бойка и отношением диаметра волновода к толщине пластины.

В качестве примера на рис. 2 штриховыми линиями показаны диаграммы зависимости усилий от времени в начальной волне, генерируемой при ударе бойком по волноводу (а), в отраженной от пластины волне (б) и в контакте волновода с пластиной (в), построенные по формулам, приведенным выше, при следующих исходных данных:

$$E = 20,4 \cdot 10^{10} \text{ МПа}, \quad \mu = 0,3, \quad \rho = 7850 \text{ кг/м}^3, \\ a = 5100 \text{ м/с}, \quad V_0 = 3,77 \text{ м/с}, \quad d = 28 \text{ мм}, \quad l = 388 \text{ мм}, \\ L = 1135 \text{ мм}, \quad r_c = 45 \text{ мм}, \quad \delta = 10 \text{ мм}.$$

Для оценки достоверности принятой математической модели были проведены соответствующие экспериментальные исследования. В ходе исследований с помощью тензодатчиков, наклеенных в среднем сечении волновода, были зафиксированы осциллограммы прямой и отраженной от пластины волн деформаций, которые показаны на рис. 2 сплошными линиями.

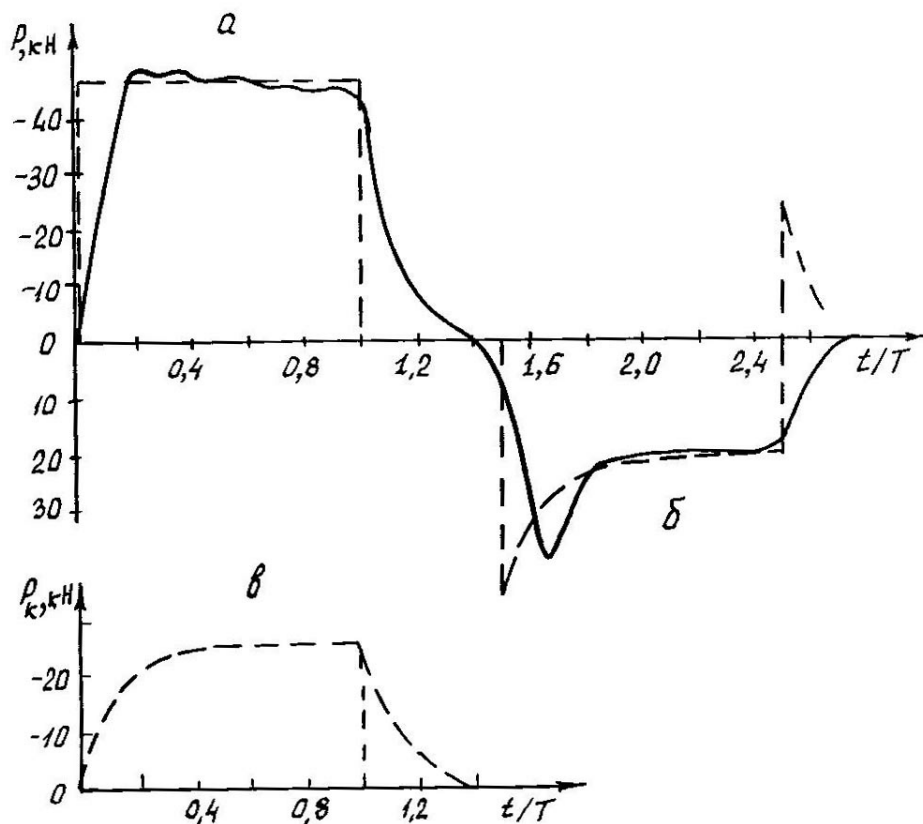


Рис. 2. Зависимость усилий от времени в прямой (а), отраженной (б) волне и в контактном сечении волновода с пластиной (в).

Сравнение теоретических и экспериментальных диаграмм показывает их хорошее качественное и количественное соответствие. Отличие в этих диаграммах заключается в том, что в реальной системе усилия в начальной волне деформации возрастают и падают не мгновенно, а за конечный промежуток времени. Это объясняется невозможностью обеспечить идеальную плоскостность и параллельность ударных торцов бойка и волновода.

В целом результаты экспериментов подтверждают достоверность модели, принятой в данной работе, и полученных с её помощью формул. Они могут быть рекомендованы для расчета и анализа волновых процессов в удар-

ной системе “боек-волновод-пластина” с целью поиска рациональных параметров её элементов.

Литература

1. Гольдсмит В. Удар. Теория и физические свойства соударяемых тел. – М.: Стройиздат, 1965. – 448 с.
2. Алимов О.Д., Манжосов В.К., Еремьянц В.Э. Удар. Распространение волн деформаций в ударных системах. – М.: Наука, 1985. – 356 с.
3. Пановко Я.Г. Введение в теорию механического удара. – М.: Наука, 1977. – 224 с.