А. Саадабаев, Ш. Биримкулов, Д. Эрматова

Приближенное решение интегрального уравнения первого рода в равномерной метрике

Рассмотрим линейное интегральное уравнение первого рода

$$\int_0^1 K(t,s)\, z(s)\, ds = u(t), \qquad t \in [0,1], \tag{1}$$

где $K(t,s)$ - непрерывная функция в квадрате $0 \le t, \quad s \le 1$, u(t) - заданная непрерывная функция, z(s)- искомая функция. Левую часть уравнения (1) обозначим через K(z), она является интегральным оператором. Решение уравнения (1) будем искать в пространстве непрерывных функций. Пусть ядро $K(t,s)$ - является симметричным и положительным и обозначим через $\{\varphi_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ ортонормированные собственные функции ядра, соответствующие характерическим значениям $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, причем $\lambda_k > 0$, и $\lambda_k \to \infty$ при $k \to \infty$.

Известно $[3]$, что решение уравнения (1) не является устойчивым от заданной функции u(t), т.е. нахождение решения уравнения (1) является некорректной задачей. Для нахождения устойчивого решения наряду с уравнением (1) рассмотрим интегральное уравнение второго рода $[2]$

$$\alpha z + K(z) = u(t), \qquad t \in [0,1], \tag{2}$$

где α - положительный действительный параметр.

Используя теорему Гильберта- Шмидта $[1]$, из уравнения (2) получим

$$\alpha z = u(t) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z_k}{\lambda_k} \varphi(t), \tag{3}$$

где $z_k = \int_0^1 \varphi_k(t) z(t) dt$ - неизвестные числа. Обе части (3) умножим на функцию $\varphi_i(t)$ и проинтегрируем от 0 до 1. Учитывая ортонор-мированность собственных функций $\varphi_k(t)$, получим

$$\alpha z_k = u_k - \frac{z_k}{\lambda_k}.$$

Отсюда
$$z_k = \frac{\lambda_k u_k}{1 + \alpha \lambda_k}.$$

Подставляя последнее значение z_k в (3), получим

$$z_\alpha(t) = \frac{u(t)}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u_k}{1 + \alpha \lambda_k} \varphi_k(t). \tag{4}$$

Покажем, что при $\alpha > 0$ z_α является непрерывной функцией.

Рассмотрим функциональный ряд в (4)

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u_k}{1 + \alpha \lambda_k} \varphi_k(t) \right| \le$$
$$\le \left[\sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\lambda_k}{1 + \alpha \lambda_k} \right]^2 u_k^2 \right]^{1/2} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\varphi_k(t)}{\lambda_k} \right]^2 \right]^{1/2}. \tag{5}$$

Здесь мы использовали неравенство Коши-Буняковского для суммы. Для любого k справедливо неравенство

$$\frac{\lambda_k}{1+\alpha\lambda_k} \le \frac{1}{\alpha}.$$

Тогда первое произведение в неравенстве (5) удовлетворяет неравенству

$$\left[\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{\lambda_k}{1+\alpha\lambda_k}\right]^2 u_k^2\right]^{1/2} \le \frac{1}{\alpha}\left[\sum_{k=1}^{\infty} u_k^2\right]^{1/2} \le \frac{1}{\alpha}\left[\int_0^1 u^2(t)dt\right]^{1/2} < \frac{1}{\alpha}C_0,$$

так как в силу неравенства Бесселя

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k^2 \le \int_0^1 u^2(t)dt,$$

т.е. ряд является сходящимся.

По определению собственной функции она удовлетворяет уравнению

$$\varphi_k(t) = \lambda_k \int_0^1 K(t,s)\varphi_k(s)ds, \qquad k = 1,2,...$$

или

$$\frac{\varphi_k(t)}{\lambda_k} = \int_0^1 K(t,s)\varphi_k(s)ds.$$

При фиксированном t функции $\varphi_k(t)/\lambda_k$ является коэффициентами Фурье ядра $K(t,s)$ как функции от s. Собственные функции образуют полную систему в пространстве $L_2(0,1)$. Тогда имеет место равенство Парсеваля

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{\varphi_k(t)}{\lambda_k}\right]^2 = \int_0^1 K^2(t,s)ds.$$

Каждый член функционального ряда слева является положительной и непрерывной функцией. Тогда в силу теоремы Дини [1] ряд слева сходится равномерно. Из этого и неравенства (4) следует равномерная сходимость ряда справа в (4), т.е. функция $z_\alpha(t)$ является непрерывной функцией и удовлетворяет уравнению (2).

Введем степень положительного оператора

$$A^\theta z = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{z_k}{\lambda^\theta}\varphi_k, \quad 0<\theta<1.$$

Пусть оператор $A^\theta : L_2(0,1) \to C(0,1)$. Функцию $u(t) \in C(0,1) \subset L_2(0,1)$ разложим в ряд Фурье по функциям $\{\varphi_k(t)\}$, т.е.

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k\varphi_k(t), \quad u_k = \int_0^1 u(s)\varphi_k(s)ds,$$

причем ряд Фурье сходится к $u(t)$ по норме пространства $L_2(0,1)$. Поставляя это в (4) и преобразуя, получим

$$z_\alpha^*(t) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_k u_k}{1+\alpha\lambda_k}\varphi_k(t).$$

Пусть $u(t) \in L_2(0,1)$, тогда при любом $\alpha > 0$ функция $z_\alpha^*(t) \in L_2(0,1)$. Действительно,

$$\left\|z_\alpha^*(t)\right\|_{L_2(0,1)}^2 = \left\|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_k u_k}{1+\alpha\lambda_k}\varphi_k(t)\right\|_{L_2(0,1)}^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda_k}{1+\alpha\lambda_k}\right)^2 u_k^2 \le \frac{1}{\alpha^2}\sum_{k=1}^{\infty} u_k^2 \le \frac{1}{\alpha^2}\int_0^1 u^2(t)dt < \infty. \qquad (6)$$

Функция $z_\alpha^*(t)$ удовлетворяет уравнению (2) в смысле $L_2(0,1)$. Подставляя $z_\alpha^*(t)$ в левую часть (2), получим

$$\int_0^1 \left[\left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a\lambda_k}{1+a\lambda_k} u_k\varphi_k + \frac{1}{1+a\lambda_k} u_k\varphi_k\right] - u(t)\right]^2 dt =$$

$$= \int_0^1 \left[\sum_{k=1}^{\infty} u_k\varphi_k(t) - u(t)\right]^2 dt = 0.$$

Из неравенства (6) получим оценку

$$\left\|z_\alpha^*(t)\right\|_{L_2} \le \frac{1}{\alpha}\|u\|_{L_2},$$

Отсюда

$$\left\|(\alpha \mathrm{E} + \mathrm{K})^{-1}\right\|_{L_2 \to L_2} \le \frac{1}{\alpha}.$$

Покажем , что

$$\left\|(\alpha \mathrm{E} + \mathrm{K})^{-1}\right\|_{L_2 \to L_2} = \frac{1}{\varepsilon}. \qquad (7)$$

В качестве функции $u(t)$ возьмем ортонормированную систему $\{\varphi_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$. Тогда

$$\left\|(\alpha \mathrm{E} + \mathrm{K})^{-1}\varphi_k\right\|_{L_2(0,1)} = \sup_{\|\varphi_k\|=1}\left\|(\alpha \mathrm{E} + \mathrm{K})^{-1}\varphi_k\right\| =$$

$$= \sup_k \frac{\lambda_k}{1+\alpha\lambda_{k.}} = \sup_k \frac{1}{\lambda_k^{-1}+\alpha} = \frac{1}{\alpha}$$

так как $\lambda_k^{-1} \to 0$ при $k \to \infty$.

Левую часть в (4) можно написать в следующем виде

$$z_\alpha \;\; z_\alpha(t) = \frac{u(t)}{\alpha} - \frac{1}{\alpha}K(\alpha \mathrm{E} + K)^{-1}u,\; u \in C(0,1), \qquad (8)$$

причем коэффициенты Фурье элемента $(\alpha \mathrm{E} + K)^{-1}$ равны $\frac{\lambda_k u_k}{1+\alpha\lambda_{k.}}$. Используя теоремы Гильберта-Шмидта, из (8) получим

$$|z_\alpha(t)| \le \frac{|u(t)|}{\alpha} + \frac{1}{\alpha}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{\lambda_k u_k}{1+\alpha\lambda_k}\right]^2\right]^{1/2}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{\varphi_k(t)}{\lambda_k}\right]^2\right]^{1/2} \le$$

$$\le \frac{u(t)}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2}\left[\int_0^1 u^2(t)dt\right]^{1/2} \max_{o<t,s<1}|K(t,s)| \le \left[\frac{1}{\alpha} + \frac{C_0}{\alpha^2}\right]\max_{o<t<1}|u(t)|.$$

Отсюда

$$\left\|(\alpha \mathrm{E} + \mathrm{K})^{-1}\right\|_{C(0,1) \to C(0,1)} \le \frac{C_0^*}{\alpha^2}. \qquad (9)$$

Пусть $u(t) \in R(K)$ – область значений интегрального оператора K, т.е. существует $z(t) \in C(0,1)$ такая, что $u(t) = K(z)$. Для этого $u(t)$. используя (8), приходим к равенству

$$|z_\alpha(t)| = \frac{K(z)}{\alpha} - \frac{1}{\alpha}K(\alpha \mathrm{E} + K)^{-1}Kz =$$

$$= \frac{K(\alpha \mathrm{E} + K)^{-1}}{\alpha}(\alpha \mathrm{E} + K - K)z = K(\alpha \mathrm{E} + K)^{-1}z.$$

Отсюда, используя теорему Гильберта-Шмидта и коэффициенты Фурье для элемента $(\alpha \mathrm{E} + K)^{-1}z$, получим

$$z_\alpha(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z_k}{1+\alpha\lambda_k}\varphi_k(t). \tag{10}$$

Рассмотрим ряд Фурье $\sum_{k=1}^{\infty} z_k\varphi_k(t)$ для функции $z(t)$. Пусть ряд Фурье от непрерывной функции $z(t)$ сходится равномерно. Составим разность

$$z_\alpha(t)-z(t)=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha\lambda_k}{1+\alpha\lambda_k}z_k\varphi_k(t),$$

причем в силу признака Абеля ряд справа сходится равномерно по α и t и сумма ряда является непрерывной функцией [1]

Тогда равномерно по t

$$\max_{o<t<1}|z_\alpha(t)-z(t)|\to 0 \quad \text{при} \quad \alpha\to 0. \tag{11}$$

Класс непрерывных функций, ряд Фурье которой по системе функций $\{\varphi_k(t)\}$ сходится равномерно к этой функции, обозначим через M. Таким образом, для любой функции $z(t)\in M$, которая является решением уравнения (1) выполняется предельный переход (11).

Предположим, что вместо функции задана u(t) задана функция $u_\delta(t)$, удовлетворяющая неравенству

$$\|u(t)-u_\delta(t)\|_{C(0,1)}\le\delta. \tag{12}$$

С заданной функцией $u_\delta(t)$, уравнение (1), вообще говоря решения не имеет, т.е. $u_\delta(t)\notin R(K)$.

Решение уравнения (2) при $u=u_\delta(t)$ обозначим через $z_\alpha^\delta(t)$, оно представимо в виде

$$z_\alpha^\delta(t)=(\alpha\mathrm{E}+K)^{-1}u_\delta(t). \tag{13}$$

Если параметры α и δ независимо друг от друга стремятся нулю, то $z_\alpha^\delta(t)$, вообще говоря, стремится к бесконечности. Покажем, что существует зависимость α от δ, при которой $z_{\alpha(\delta)}^\delta(t)$ стремится к точному решению уравнения (1).

Оценим разность $z_\alpha^\delta(t)-z(t)$. по норме пространства $C[0,1]$. Используя неравенство треугольника, получим

$$\begin{aligned}\|z_\alpha^\delta(t)-z_\alpha(t)\|_{C(0,1)}&\le\|z_\alpha^\delta(t)-z_\alpha(t)\|_{C(0,1)}+\\&+\|z_\alpha(t)-z(t)\|_{C(0,1)}\end{aligned} \tag{14}$$

Используя неравенства (9) и (12), получим

$$\begin{aligned}&\|z_\alpha^\delta(t)-z_\alpha(t)\|_{C(0,1)}\le\|(\alpha\mathrm{E}+K)^{-1}(u_\delta(t)-u(t))\|_{C(0,1)}\le\\&\le\|\alpha\mathrm{E}+K^{-1}\|_{C(0,1)\to C(0,1)}\|u_\delta(t)-u(t)\|_{C(0,1)}\le\frac{C_0^*\delta}{\alpha^2}\end{aligned} \tag{15}$$

Пусть точное решение $z(t)$ истокообразно представимо с помощью оператора $B: L_2(0,1)\to C(0,1)$, оператор B интегральный и перестановочный с оператором K, т.е. $z(t)=\mathrm{B}\vartheta$, $\vartheta\in L_2(0,1)$, Используя это, оценим разность

$$\|z_\alpha(t)-z(t)\|_{c(0,1)}=\|(\alpha E+K)^{-1}Kz-z\|_{C(0,1)}=$$

$$=\|(\alpha E+K)^{-1}(K-\alpha E-K)z\|_{C(0,1)}=$$

$$=\alpha\|(\alpha\mathrm{E}+K)^{-1}\mathrm{B}\vartheta\|_{C(0,1)}=\alpha\|B(\alpha\mathrm{E}+K)^{-1}\vartheta\|_{C(0,1)}.$$

Пусть в частном случае оператор B = K. Тогда получим

$$\left\| z_\alpha(t) - z(t) \right\|_{c(0,1)} \le \alpha \left\| K^{\theta} K^{1-\theta} (\alpha E + K)^{-1} \vartheta \right\|_{C(0,1)} \le$$

$$\le \alpha C_1 \left\| K^{1-\theta} (\alpha E + K)^{1} \vartheta \right\|_{L_2(0,1)}, \text{ где } \left\| K^{\theta} \right\|_{C(0,1) \to L_2(0,1)} \le C_1.$$

Используя неравенство момента [3]

$$\left\| A^{\theta} \vartheta \right\|_{L_2(0,1)} \le \left\| A\vartheta \right\|^{\theta}_{L_2(0,1)} \left\| \vartheta \right\|^{1-\theta}_{L(0,1)},$$

из последнего неравенства получим

$$\left\| z_\alpha(t) - z(t) \right\|_{c(0,1)} =$$

$$aC_1 \left\| K(\alpha E + K)^{-1} \vartheta \right\|^{1-\theta} \left\| (\alpha E + K)^{-1} \vartheta \right\|^{1-(1-\theta)}_{L_2(0,1)} \le \tag{16}$$

$$\le \alpha C_1 \left\| \vartheta \right\|^{1-\theta}_{L_2(0,1)} \frac{1}{\alpha^{\theta}} \left\| \vartheta \right\|^{\theta}_{L_2(0,1)} = \alpha^{1-\theta} C_1 \left\| \vartheta \right\|_{L_{2(0,1)}}.$$

Здесь мы использовали равенство (7) и неравенство

$$\left\| K(\alpha E + K)^{-1} \right\|_{L_2(0,1) \to L_2(0,1)} \le 1.$$

Учитывая неравенство (15) и (16), из неравенства (14) получим оценку

$$\left\| z^{\delta}_{\alpha}(t) - z(t) \right\|_{c(0,1)} \le C^{*}_{0} \frac{\delta}{\alpha^{2}} + \alpha^{1-\delta} C_1 \left\| \theta \right\|_{L_{2(0,1)}}. \tag{17}$$

Параметр $\alpha = C_2 \delta^{j}$. Подставляя это в неравенство (17) приравнивая степени δ, получим $1 - 2j = j(1-\theta)$, отсюда $j = \dfrac{1}{3-\theta}$. Тогда из неравенство (17) получим

$$\left\| z^{\delta}_{\alpha(\delta)}(t) - z(t) \right\|_{c(0,1)} \le C^{*}_{2} \delta^{(1-\theta)/(3-\theta)},$$

где постоянная C^{*}_{2} зависит от C^{*}_{0}, C_1 $\left\| \vartheta \right\|_{L_2(0,1)}$. В последней оценке постоянная C^{*}_{2} неравномерно ограничена от $\left\| \vartheta \right\|_{L_2(0,1)}$, т.е. существует последовательность $\vartheta_n \in L_2(0,1)$ такая, что $\left\| \vartheta_n \right\| \to \infty$ и $C^{*}_{0} \to \infty$. Рассмотрим в пространстве $L_2(0,1)$ ограниченный шар

$$S_r = \left\{ \vartheta \in L_2(0,1) : \left\| \vartheta \right\|_{L_2(0,1)} \le r \right\},$$

и $M_r = K(S_r)$ - образ шара при отображении K, причем [1] M_r компактное множество в C (0,1). Тогда любого решения уравнения (1), принадлежащего множеству M_r, справедлива оценка

$$\left\| z^{\delta}_{\alpha(\delta)}(t) - z(t) \right\|_{c(0,1)} \le C^{*}_{2}\left(C^{*}_{0}, C_1, r \right) \delta^{(1-\theta)/(3-\theta)}. \tag{18}$$

ТЕОРЕМА 1 Пусть : 1) уравнение (1) имеет единственное решение; 2) ядро $K(t, s)$ непрерывно в квадрате $0 \le t,\ s \le 1$ и симметрично; 3) оператор K, $0<\theta<1$, действует из пространства $L_2(0,1)$ в C(0,1). Тогда для любого решения (1), принадлежащего множеству $M \subset C(0,1)$

$$M = \left\{ z(t) \in C(0,1) : z = K\vartheta, \vartheta \in L_2(0,1) \right\}$$

выполняется предельное равенство

$$\lim_{\alpha \to 0} (\alpha E + K)^{-1} K z = z(t)$$

и справедлива оценка

$$\left\| (\alpha E + K)^{-1} K(z) - z(t) \right\|_{C(0,1)} \le C_1 \left\| \varphi \right\|_{L_2(0,1)} \alpha^{1-\theta}.$$

ТЕОРЕМА 2 Пусть выполняются все условия теоремы 1 и задан элемент $u_\delta(t)$. удовлетворяющий неравенству (2).

Тогда для любого решения уравнения (1), принадлежащего множеству $M_r \subset C(0,1)$ справедлива равномерная оценка

$$\left\| (\alpha E + K)^{-1} u_\delta - K(\vartheta) \right\|_{C(0,1)} \le C_2^* \left(C_0^*, C_1, r \right) \delta^{(1-\theta)/(3-\theta)}$$

для любого $\vartheta \in S_r$.

Таким образом, показали, что функция $(\alpha E + K)^{-1} u_\delta$ является приближенным решением уравнения (1) при заданном $u_\delta(t)$.

Литература

1. Колмогоров А.Н. ,Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа: Учеб. для мат. спец. ун-тов.-4-е изд., перераб.-М: Наука, 1976.
2. Лаврентьев М. М. Об интегральных уравнениях первого рода// Док. АН СССР.-1959.-Т.127, № I.-С. 31-33.
3. Тихонов А. Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач.-М.: Наука, 1986.